Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok
2007. november 26.

1. A G összefüggő gráfban teljesül, hogy bármely két *szomszédos* pont között létezik k darab, páronként éldiszjunkt út (ahol $k \geq 1$ egész). Bizonyítsuk be, hogy a G gráf k-szorosan élösszefüggő!

2. A G gráf csúcsai legyenek a sakktábla mezői és két csúcs akkor legyen szomszédos G-ben, ha a megfelelő mezők élszomszédosak. Jelölje A a G szomszédossági mátrixát. Határozzuk meg az A^{2007} mátrix főátlójában álló számok összegét!

3. Legyen $n = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7$ és $m = 2^2 \cdot 3^6 \cdot 7^4 \cdot 19^3$. Határozzuk meg n és m közös (pozitív) osztóinak számát és összegét!

4. Valamely n egészre teljesül, hogy $16n+12$ és $n+23$ ugyanazt a maradékot adják 178-cal osztva. Mi lehet ez a közös maradék?

5. Bizonyítsuk be, hogy $1 \cdot 8 \cdot 27 \cdot 64 \cdot \ldots \cdot 1000 + 1$ osztható 11-gyel. (A szorzatban az első tíz pozitív egész szám köbe szerepel.)

6. Határozzuk meg az alábbi szám utolsó két számjegyét!

$$9^{9^{9^{9}}} - 9^9$$

7. Értelmezzük az egész számok $\mathbb{Z}$ halmazán a $*$ műveletet a következőképpen:

$$a * b = \begin{cases} a + b, & \text{ha } a \text{ páros,} \\ a - b, & \text{ha } a \text{ páratlan.} \end{cases}$$

(Itt $+$ és $-$ az egész számok hagyományos összeadását és kivonását jelölik. Így például $4 * 5 = 9$ és $5 * 4 = 1$.) Csoportot alkot-e $\mathbb{Z}$ a $*$ műveletre nézve?

8. Legyen G egy olyan csoport, ami nem Abel-csoport. Mutassuk meg, hogy ekkor G-nek van olyan $g \in G$ eleme, amelyre $g \neq g^{-1}$.

A dolgozatra kérjük jól olvashatóan felírni a következő adatokat: név, Neptun-kód, Neptun szerinti gyakorlatvezető neve.

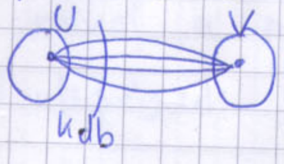
A feladatok megoldását indokolni kell, puszta eredményközlésért nem jár pont. A dolgozat megírása közben számológép (vagy más segédeszköz) nem használható.

1.) indirekt

t.f.h. nem „k élösszefüggő"

$\Rightarrow \exists$ legfeljebb $k-1$ él, hogy az elhagyásukkal szétesik a gráf legalább 2 komponensre.

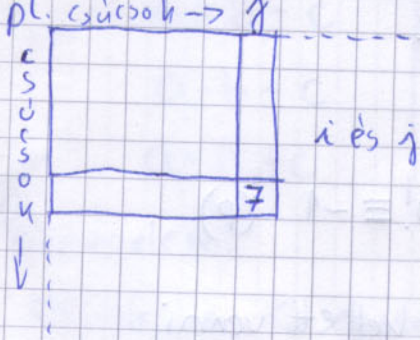
Van olyan eredetileg szomszédos pontpár, amelyik különböző komponensekbe kerül. (U, V)



A feltétel szerint $\exists$ közöttük $\geq k$ éldiszjunkt út. ↯

Mert bármely úton kell lennie elhagyott élnek $\Rightarrow$ legalább k db élnek, mivel viszont abból indultunk ki, hogy $k-1$... ↯

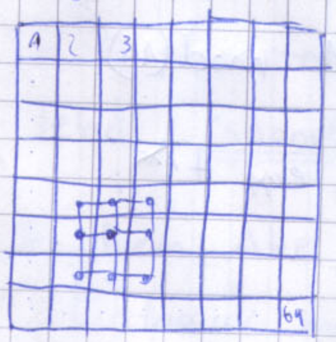
2.) Legyen G gráfnak A a szomsz-i mátrixa, olyan mátrix, amelynek a_{ij} eleme azt mutatja meg, hogy hány olyan séta van, amely az i pontból megy j-be.



i és j között 7 k hosszú séta van.

Keressük az i-ből j-be menő 2007 hosszú séták számát

A gráf



páros gráf

úgy lépkedünk, hogy sötét -> világos -> s -> v -> stb.

vagyis $\forall$ körséta <u>páros</u> hosszú, a 2007 <u>páratlan</u>, tehát <u>0</u> út. A főátlóban lévő elemek mind 0-k.

3.) $n = 2^5 \cdot 3 \cdot 5^3 \cdot 7$

$m = 2^2 \cdot 3^6 \cdot 7^4 \cdot 19^3$

n és m minden közös osztója osztja (n,m)-t.

$(n,m) = \underbrace{2^2 \cdot 3 \cdot 7}_{} = q$

↓

ebből hogy rakhatok össze osztókat?

első elem lehet 3 féle képpen $2^0, 2^1, 2^2$ 3

második elem lehet 2 féle képp $3^0, 3^1$ 2

harmadik szintén 2 $7^0, 7^1$ 2

$= \underline{\underline{12 \text{ db}}}$

osztók összege:

$(1+p_1+p_1^2+\dots+p_1^{\alpha_1})(1+p_2+p_2^2+\dots+p_2^{\alpha_2})+\dots = \overset{7}{(1+2+4)}\overset{4}{(1+3)}\overset{8}{(1+7)} = \underline{\underline{224}}$

4.) ezt nem írtam le :/

5.)

a.) megoldás 1

$11 \mid 1^3 \cdot 2^3 \cdot 3^3 \cdot 4^3 \cdot 5^3 \cdot 6^3 \cdot 7^3 \cdot 8^3 \cdot 9^3 \cdot 10^3 + 1$

Kiszámolom minden elemre

$1^3 \equiv 1 \quad (11)$

$2^3 \equiv 8 \quad (11)$

$4^3 \equiv -2 \quad (11)$

$\vdots$

$10^3 \equiv 10 \quad (11)$

majd ezekből képzem a szorzatot

$(1 \cdot 2 \cdot 8 \cdot \dots\; 10)+1$

ez egyszerűen elvégezhető szorzás, majd kiszámolod a maradékot, tényleg 0.

b.) megoldás 2

Wilson-tétel

p prím $\Rightarrow (p-1)! \equiv -1 \quad (p)$

$11 \mid 10! + 1^*$ észre kellett venni

$10! \equiv -1 \quad (11)$

$\Downarrow$

$10!^3 \equiv (-1)^3 \equiv -1 \mod (11)$

És mivel van még egy $+1^*$, ez elég is.

6.)

$g^2 \equiv 1 \ (40)$ $\qquad g^{2}$ páratlan

$$g^{g^{g}} = g^{2k+1} = (g^2)^k \cdot g \equiv g \ (40)$$

vagyis $\quad g^{g^{g}} \equiv 40l + 9$

$\varphi(100) = 40$ miatt $\quad g^{g^{g^{g}}} = g^{40l+9} = (g^{40})^l \cdot g^g \equiv g^g \ (100)$

és mivel a másik tag maradéka is ennyi, a különbségük 0.

7.)

1) A művelet nem vezet ki a halmazból. ✓

2) assz: (minden esetet ellenőrizni kell) ✓

$(a * b) * c$	$a * (b * c)$
$a+b+c$	$a+b+c$
$a+b-c$	$a+b-c$
$a-b-c$	$a-b-c$
$a-b+c$	$a-b+c$

3) egységelem:

Állítás a 0 egységelem.

$a * 0 = a$ ✓

$0 * a = a$

a 0 páros, ~~mert előáll~~ a

4) inverz elem:

1 eset van ha páros, legyen $a^{-1} = -a$

$a * (-a) = a + (-a) = 0$ ← egységelem

$(-a) * a = (-a) + a = 0$ ✓

Tehát csoport.

8.) Nem Abel, nem teljesül a kommutativitás.

Mutassuk meg, hogy $\exists g \in G \quad g \neq g^{-1}$

indirekt. $\qquad \Downarrow!$ tagadás $\Downarrow!$

tagadás: Tegyük fel, hogy $\forall g \in G \quad g = g^{-1}$ *

$$\underbrace{(a\cdot b)\cdot(b^{-1}}_{e\,!}\cdot a^{-1})$$

tehát

$(a\cdot b)(b^{-1}\cdot a^{-1}) = a\cdot e\cdot a^{-1} = a\cdot a^{-1} = e$ hasonlóan $(a\cdot b)(b^{-1}\cdot a^{-1}) = \ldots = e$

Ha az inverz elem egyértelmű, ezeknek meg kell egyeznie.

$\Rightarrow\ a\cdot b = b^{-1}\cdot a^{-1} \Rightarrow a\cdot b = b\cdot a$

($\star$ miatt) $b^{-1} = b$, $a^{-1} = a$ tetszőleges a,b-re, vagyis a művelet komm. ↯