A410

2021. november 18., csütörtök 12:11

A410

A4 Valószínűségszámítás — X. EA

dr. Keszthelyi Gabriella
Sztochasztika és Dinamikai rendszerek tanszék

2021. november 18.

Mi lesz a zh-ban?

- Kombinatorika
- 1D Diszkrét eloszlások (Súlyfüggvény tulajdoságai, várható érték, szórás)
- Nevezetes diszkrét eloszlások (Binom, Negativ binom, Hipergeom, Geom, Egyenletes, Poisson) !
- Feltételes valószínűség, Bayes tétele, Teljes valószínűség tétele !
- 1D Folytonos eloszlások (Eloszlás- és sűrűségfv tulajdonságai, várható érték, szórás)
- Nevezetes folytonos eloszlások (Egyenletes, Exponenciális, Béta, Erlang) !
- Poisson folyamat (Poisson eloszlás vs. Exponenciális eloszlás) !!
- Normális eloszlás, Centrális Határeloszlás Tétele

Amikre ma ránézünk (és szintén benne lesznek)

- Geometriai valószínűségek
- Vegyes eloszlások (eloszlások kombinációja)
- Valváltozók kapcsolata (Transzformáció, Konvolúció, Korreláció, Függetlenség)
- 2D Eloszlások (2D súlyfüggvény, együttes/feltételes/perem sűrűségfv, együttes/perem eloszlásfv tulajdonságai)
- 2D Várható érték, szórás (várható érték függvényei, feltételes várható érték, feltételes szórás)

ZH 22.-én 8:00

F2E PALI csoportja

KF51 GABI GÁBOR csoportja

2D eloszlás (diszkrét)

Legyen egy kísérlet kimenetele egy random üzenet hossza. Tegyük fel, hogy az üzenet M hosszú részekre van törve, ezekből $Q = q$ darab van és a maradék hossza $R = r < M$. Tehát ha az üzenet N bit hosszú, akkor $N = qM + r$. Tegyük fel, hogy N geometriai eloszlású $(1-p)$ paraméterrel. Mi az együttes eloszlás? Mik a peremeloszlások?

Együttes:

GEOM

$$P(Q = q, R = r) = P(N = qM + r) = (1-p)p^{qM+r}$$

Perem:

geom. összeg

$$P(Q = q) = \sum_{k=0}^{M-1}(1-p)p^{qM+k} = (1-p)p^{qM}\boxed{\frac{1-p^M}{1-p}} = (1-p^M)(p^M)^q$$

$$P(R = r) = \sum_{q=0}^{\infty}(1-p)p^{qM+r} = \frac{(1-p)}{1-p^M}p^r$$

$$(1-p)p^r \underbrace{\sum_{q=0}^{\infty}(p^M)^q}_{\text{geometriai}} \quad \text{sor}: \ \frac{1}{1-p^M}$$

Poisson-ok konvolúciója

$X \sim Poisson(\lambda)$, $Y \sim Poisson(\mu)$ függetlenek

$$P(X+Y=k) = \sum_{i=0}^{k} P(X+Y=k, X=i) =$$

FÜGGETLENSÉG

$$= \sum_{i=0}^{k} P(Y=k-i, X=i) = \sum_{i=0}^{k} P(Y=k-i)\cdot P(X=i) =$$

$$= \sum_{i=0}^{k} e^{-\mu}\frac{\mu^{k-i}}{(k-i)!}e^{-\lambda}\frac{\lambda^i}{i!} = e^{-(\mu+\lambda)}\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\frac{k!}{i!(k-i)!}\lambda^i\mu^{k-i} =$$

$$= e^{-(\mu+\lambda)}\frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}\binom{k}{i}\lambda^i\mu^{k-i} = e^{-(\mu+\lambda)}\frac{(\mu+\lambda)^k}{k!}$$

$$(\mu+\lambda)^k = \binom{k}{0}\mu^k + \binom{k}{1}\mu^{k-1}\lambda + \dots \binom{k}{k}\lambda^k$$

$= \text{Poisson}(\lambda+\mu)$

Teljes Valószínűség Tétele

A BME különböző épületeiben egymástól függetlenül p valószínűséggel lesz áramszünet. A karbantartók nem tudják végigjárni az összes épületet, hanem X darabra néznek rá, ahol $X \sim Poisson(\lambda)$. Jelölje Y a (meglátogatott) áram nélkül maradt épületek számát, mi lesz Y eloszlása?

$$P(Y=i|X=k)=\binom{k}{i}p^i(1-p)^{k-i}$$

k db épületet járták végig a karbantartók, azok közül i-ben volt áramszünet

$$P(Y=i)=\sum_{k=0}^{\infty}P(Y=i|X=k)\cdot P(X=k)=$$

$$=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{k}{i}p^i(1-p)^{k-i}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=\sum_{k=i}^{\infty}\binom{k}{i}p^i(1-p)^{k-i}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}=$$

$k \geq i$

$$\frac{(\lambda p)^i}{i!}e^{-\lambda}\underbrace{\sum_{k=i}^{\infty}\frac{(\lambda(1-p))^{k-i}}{(k-i)!}}_{\text{exponenciális Taylor sor } e^{\lambda(1-p)}}=\frac{(\lambda p)^i}{i!}e^{-\lambda p}$$

Y-nak az eloszlása Poisson(λp)

Feltételes eloszlás (diszkrét)

A BME-s épületek száma, ahol tűz van, $X \sim Poisson(\lambda)$ és ahol áramszünet van, az $Y \sim Poisson(\mu)$. Azt a fülest kapjuk a karbantartóktól, hogy összesen n épületben van baj (de azt nem tudták megmondani, hogy melyikben van tűz és melyikben áramszünet). Mi lesz a lángokban álló épületek számának eloszlása?

X, Y függetlenek

Feltételes vsség

$$P(X=i|X+Y=n)=\frac{P(X=i,Y=n-i)}{P(X+Y=n)}=\frac{\frac{\lambda^i}{i!}\cancel{e^{-\lambda}}\cdot\frac{\lambda^{n-i}}{(n-i)!}\cancel{e^{-\mu}}}{\frac{(\lambda+\mu)^n}{n!}\cancel{e^{-(\lambda+\mu)}}}=$$

$$=\binom{n}{i}\left(\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)^i\left(\frac{\mu}{\lambda+\mu}\right)^{n-i}$$

Binom$\left(n, \frac{\lambda}{\lambda+\mu}\right)$

Transzformáció (diszkrét)

Legyen $X \sim Poisson(\lambda)$ és $Y = 2X+1$. Mi lesz Y eloszlása? $D^2(Y)=?$

$P(X=k)=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda}$

$$P(Y=k)=P(2X+1=k)=P(X=(k-1)/2)=\frac{\lambda^{\frac{k-1}{2}}}{\left(\frac{k-1}{2}\right)!}e^{-\lambda}$$

$$D^2(Y)=E(Y^2)-(E(Y))^2=E(Y^2)-(E(Y))^2=$$

$$=E((2X+1)^2)-(E(2X+1))^2=E(4X^2+4X+1)-(2E(X)+1)^2=$$

$$4E(X^2)+\cancel{4E(X)}+\cancel{1}-4(E(X))^2-\cancel{4E(X)}-\cancel{1}=$$

$$=4\underbrace{(E(X^2)-(E(X))^2)}_{D^2(X)}=4\lambda$$

$D^2(Y) = D^2(2X+1) =$

$= D^2(2X) = 2^2 D^2(X) = 4\lambda$

Függetleség vs. kovariancia

$X \sim Uni(-1,1)$, $Y = X^2$ Független-e X, Y? $COV(X,X^2)=?$

ha X, Y független $\Rightarrow$ cov(X,Y)=0

$\not\Leftarrow$

cov$(X,X^2)=0$

X, Y NEM FÜGGETLENEK

FÜGGETLENEK

$X \sim Uni(-1,1)$, $Y = X^2$ Független-e X, Y? $COV(X, X^2) =$?

$P(X < -1/2) = \frac{1}{4}$

$P(X^2 < 1/4) = P(-1/2 < X < 1/2) = \frac{1}{2}$

$P(\underbrace{X < -1/2 \cap X^2 < 1/4}_{\emptyset}) = 0 \neq P(X^2 < 1/4) \cdot P(X < -1/2) = \frac{1}{8}$

TÉNYLEG NEM FÜGGETLENEK!

$E(X) = 0$

$E(X^2) = \frac{1}{3}$

$D^2(X) = \frac{(b-a)^2}{12} = \frac{2^2}{12} = \frac{1}{3} = E(X^2) - E(X)$

$E(X^3) =$

$$E(X^3) = \int_{-1}^{1} \frac{x^3}{2}\, dx = \left[\frac{x^4}{8}\right]_{-1}^{1} = \underline{0}$$

$COV(X, X^2) = E(X \cdot X^2) - E(X) \cdot \boxed{E(X^2)} = 0 - 0 \cdot 0 = \underline{0}$

Korreláció

$D^2(X) = D^2(Y)$

$$CORR(X,Y) = \frac{COV(X,Y)}{D(X)D(Y)}$$

X, Y azonos szórású valváltozók. $CORR(X + Y, X - Y) =$?

$$COV(X+Y, X-Y) = E(\overbrace{(X+Y)(X-Y)}^{X^2-Y^2}) - \overbrace{E(X+Y)E(X-Y)}^{(E(X)+E(Y))(E(X)-E(Y))} =$$

$$= E(X^2 - Y^2) - (E(X))^2 + E(X)E(Y) - E(X)E(Y) - (E(Y))^2 =$$

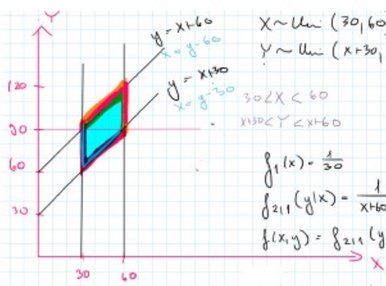
$$= \underbrace{E(X^2) - (E(X))^2}_{D^2(X)} - \underbrace{E(Y^2) + (E(Y))^2}_{-D^2(Y)} = 0$$

$COV(X,Y) = 0 \Rightarrow$

$CORR(X,Y) = 0$

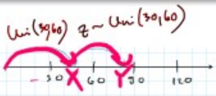
Bolhás példa

Egy bolha ugrál a számegyenesen (1D) pozitív irányba. Ugrásainak hossza $Uni(30, 60)$ eloszlású. Legyen X az első hely ahova ugrik, Y a második hely (koordinátája). Mi lesz $f_1(x)$, $f_2(y)$, $f_{2|1}(y|x)$, $f_{1|2}(x|y)$, $f(x,y)$, $E(X)$, $E(X|Y)$, $E(Y)$, $E(Y|X)$, $COV(X, Y) =$?



$X \sim Uni(30, 60)$

$Y \sim Uni(x+30, x+60)$



$30 < X < 60$

$x+30 < Y < x+60$

$60 < Y < 120$

$f_1(x) = \frac{1}{30}$

$f_{2|1}(y|x) = \frac{1}{x+60-(x+30)} = \underline{\underline{\frac{1}{30}}}$

$f(x,y) = f_{2|1}(y|x) \cdot f_1(x) = \underline{\underline{\frac{1}{900}}}$ SZORZAT SZABÁLY

$f_2(y) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x,y)\, dx$ $\xrightarrow{60 < y < 90} \int_{30}^{y-30} \frac{1}{900}\, dx = \frac{y-60}{900}$

$120 > y > 90$: $\int_{y-60}^{60} \frac{1}{900}\, dx = \frac{120-y}{900}$

$f_{1|2}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} \xrightarrow{60 < y < 90} \frac{\frac{1}{900}}{\frac{y-60}{900}} = \frac{1}{y-60}$

$90 < y < 120$

0 egyébként

$$E(XY) = \int_{30}^{60}\int_{x+30}^{x+60} f(x,y) \cdot x \cdot y\, dy\, dx = \int_{30}^{60} \left[\frac{y^2}{2} \cdot x\right]_{x+30}^{x+60} dx =$$

$$= \int \frac{(x+60)^2 - (x+30)^2}{2}\, dx = 90$$

$$f_{1|2}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \begin{cases} \xrightarrow{60<y<90} \dfrac{\frac{1}{900}}{\frac{y-60}{900}} = \dfrac{1}{y-60} \\ \xrightarrow{90<y<120} \dfrac{\frac{1}{900}}{\frac{120-y}{900}} = \dfrac{1}{120-y} \end{cases}$$

$$E(XY) = \iint f(x,y)\cdot x\cdot y\,dy\,dx = \int_{30}^{60} \left[\frac{y^2}{2}\right]_{x+30}^{x+60} = \int_{30}^{60} \frac{(x+60)^2-(x+30)^2}{2}\,dx = 90$$

$$E(X) = 45 = \frac{30+60}{2}$$

$$E(Y) = \int_{-\infty}^{\infty} y\cdot f_2(y)\,dy = \int_{60}^{90} \frac{y-60}{900}\cdot y\,dy + \int_{90}^{120} \frac{120-y}{900}\cdot y\,dy = \frac{1}{900}\left(\left[\frac{y^3}{3} - 30y^2\right]_{60}^{90} + \left[60y^2 - \frac{y^3}{3}\right]_{90}^{120}\right) = 90$$

$$E(Y|X) = \int_{x+30}^{x+60} \frac{1}{30}\cdot y\,dy = \left[\frac{y^2}{60}\right]_{x+30}^{x+60} = \frac{(x+60)^2-(x+30)^2}{60} = x+45$$

$$E(X|Y) = \begin{cases} \xrightarrow{60<y<90} \displaystyle\int_{30}^{y-30} \frac{1}{y-60}\cdot x\,dx = \left[\frac{x^2}{2(y-60)}\right]_{30}^{y-30} = \frac{(y-30)^2-30^2}{2(y-60)} = \frac{y}{2} \\ \xrightarrow{120>y>90} \displaystyle\int_{y-60}^{60} \frac{1}{120-y}\cdot x\,dx = \left[\frac{x^2}{2(120-y)}\right]_{y-60}^{60} = \frac{60^2-(y-60)^2}{2(120-y)} = \frac{y}{2} \end{cases}$$

$$COV(X,Y) = \underset{90}{E(X\cdot Y)} - \underset{90\,\cdot\,45}{E(X)\cdot E(Y)} = -4050$$

A bolhás valójában egy konvolúció

$Y = X + Z$ ahol $X, Z \sim Uni(30, 60)$

$f_X(x) = \frac{1}{30}$

$f_Z(z) = \frac{1}{30}$

$60 < y < 120$

$30 < y - x < 60$

$y - 60 < x < y - 30$

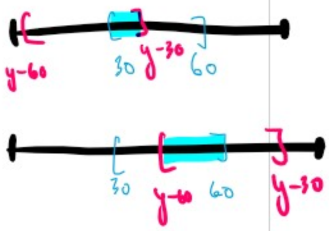
$30 < x < 60$

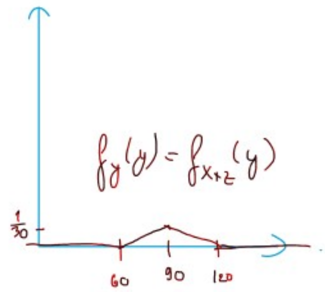
$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{\infty} \underbrace{f_X(x)}_{\frac{1}{30}} \underbrace{f_Z(y-x)}_{\frac{1}{30}}\,dx$

$x \in [30, 60] \cap [y-60, y-30]$

$$\int_{30}^{y-30} \frac{1}{900}\,dx = \frac{y-60}{900}$$

$$\int_{y-60}^{60} \frac{1}{900}\,dx = \frac{120-y}{900}$$





2D eloszlás és sűrűség

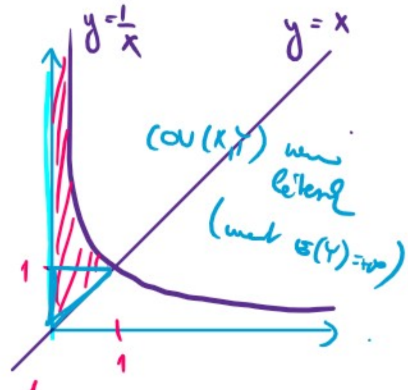
Legyen $f(x,y) = \frac{1}{2y}$ *a* $0 < x < 1$ *és* $1\cancel{x} < y < \overset{1}{x}$ *tartományon. Független-e* X, Y*?*
$f_1(x), f_2(y), f_{2|1}(y|x), f_{1|2}(x|y), E(X),$
$E(X|Y), E(Y), E(Y|X), COV(X,Y) = ?$

$$f_1(x) = \int_x^{\frac{1}{x}} \frac{1}{2y}\,dy = \left[\frac{\ln|y|}{2}\right]_x^{\frac{1}{x}} = \frac{\ln\frac{1}{x} - \ln x}{2} = -\ln x$$

$$f_2(y) \begin{cases} \xrightarrow{0<y<1} \displaystyle\int_0^y \frac{1}{2y}\,dx = \left[\frac{x}{2y}\right]_0^y = \frac{1}{2} \\ \xrightarrow{y>1} \displaystyle\int_0^{\frac{1}{y}} \frac{1}{2y}\,dx = \left[\frac{x}{2y}\right]_0^{\frac{1}{y}} = \frac{1}{2y^2} \end{cases}$$

$$f_{2|1}(y|x) = \frac{\frac{1}{2y}}{-\ln x} = \frac{1}{-2y\ln x}$$

$$f_{1|2}(x|y) \begin{cases} \to \frac{1}{2y} \Big/ \frac{1}{2} = \frac{1}{y} \\ \to \frac{1}{2y} \Big/ \frac{1}{2y^2} = y \end{cases}$$



Példa folyt.

$E(X) = \int_0^1 f_1(x)\cdot x\,dx = \int_0^1 -\ln x \cdot x =$

$E(Y) = \int_0^{+\infty} f_2(y)\cdot y\,dy = \int_0^1 \frac{y}{2}\,dy + \int_1^{+\infty} \frac{1}{2y^2}\cdot y\,dy = +\infty$

$E(Y|X) = \int_x^{1/x} \frac{y}{-2y\ln x}\,dy = \left[\frac{y}{-2\ln x}\right]_x^{1/x} = \boxed{\frac{\frac{1}{x}-x}{-2\ln x}}$

$E(X|Y)$: $0<y<1$: $\int_0^y \frac{1}{y}\cdot x\,dx = 1$; $y>1$: $\int_0^{1/y} y\cdot x\,dx = 1$

$E(X|Y)=1$

Feltételes eloszlás/vegyes eloszlás (folytonos)

Egy bizonyos tranzisztor élettartama Y exponenciális eloszlású, ismeretlen λ paraméterrel. A gyártó minőségbeli problémákat tapasztal, λ nem fix, hanem egyenletes eloszlású $[0, 1/2]$-n. Ha megfigyeljük az Y-t (azaz van egy $Y = y$ mérési eredményünk), mit mondhatunk ennek tükrében az λ eloszlásáról?

Legyen X a λ-t modellező valváltozó.

$f_1(x) = 2 \qquad 0 \le x \le 1/2$

$f_{2|1}(y|x) = xe^{-xy}$

$f(x,y) = f_{2|1}(y|x)\cdot f_1(x) = 2xe^{-xy}$

$f_2(y) = \int_0^{1/2} 2xe^{-xy}\,dx = \left[2x\cdot\frac{e^{-xy}}{-y}\right] - \int_0^{1/2} 2\frac{e^{-xy}}{-y}\,dx = \left[-\frac{2x}{y}e^{-xy} - \frac{2e^{-xy}}{y^2}\right]_0^{1/2} = \left[\frac{2e^{-xy}}{y}\left(-x-\frac{1}{y}\right)\right]_0^{1/2} = \frac{2e^{-\frac{y}{2}}}{y}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{y}\right) - \frac{2}{y}\left(-\frac{1}{y}\right)$

$f_{1|2}(x|y) = \frac{f(x,y)}{f_2(y)} = \frac{2xe^{-xy}}{\frac{2e^{-\frac{y}{2}}}{y}\left(-\frac{1}{2}-\frac{1}{y}\right)+\frac{2}{y^2}}$

Transzformáció (folytonos)

A Budapest-Esztergom távolság 50 km. Autóval nekivágva az átlagsebességünk (X) 50 és 80 km/h között mozog egyenletes eloszlással. Mi lesz az utazásunk idejének sűrűségfüggvénye?

$g(X) = Y = \frac{50}{X}$ idő eloszlása $\qquad t = \frac{s}{v}$

$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(50/x \le y) = P(50/y \le X) = 1 - F_X(50/y)$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{30}, & \text{ha } 50 < x < 80, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{ha } x < 50 \\ \frac{x-30}{30}, & \text{ha } 50 < x < 80, \\ 1 & \text{egyébként} \end{cases}$$

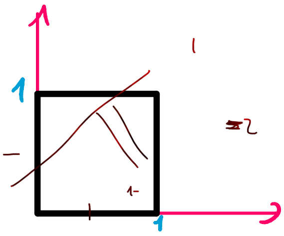
$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & \text{ha } y < 50/30 \\ 1 - \frac{50/y-30}{30}, & \text{ha } 50/30 < y < 80/30, \\ 1 & \text{egyébként} \end{cases} \quad 2 - \frac{5}{3y}$$

$$f_Y(y) = \begin{cases} \frac{5}{3y^2}, & \text{ha } 5/3 < y < 8/3, \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

Geometriai válószínűség

Józsi és Béla együtt dolgoznának egy group projecten, de egyikük sem érkezik pontosan a könyvtárba. Mindketten egyenletes eloszlással érkeznek meg 1 órás intervallumon. Mi lesz az érkezésük különbségének eloszlása?

$X \sim (0,1)$ $\quad Y \sim (0,1)$ $\quad P(|X-Y| < z) = 1$



$x - y < z \quad y > x - z$

$y - x < z \quad y < x + z$

2D eloszlás (folytonos)

Józsi és Béla együtt dolgoznának egy group projecten, de egyikük sem érkezik pontosan a könyvtárba. Ezúttal mindketten λ paraméterű exponenciális eloszlással érkeznek meg. Mi lesz az érkezésük különbségének eloszlása?

Vegyes eloszlás (diszkrét és folytonos keveréke)

Gyufaszálak eloszlása normális eloszlást követ 4cm várható értékkel és 0,2 cm szórással. Mi a vszsége, hogyha sorban húzunk a gyufásdobozból, akkor a 3. 4,2 cm-nél hosszabb gyufaszál a 11. húzásra kerül elő?

$X \sim N(4; 0,2)$ 1

$P(X > 4,2) = P(Z > (4,2 - 4)/0,2) = 1 - \Phi(1) = 0,158$

$Y \sim Negbinom(0,158; 11)$

$P(Y = 3) = \binom{10}{2} 0,158^3 0,842^8$

Irodalomjegyzék

- Vetier András—Valószínűségszámítás
- Alberto Leon-Garcia—Probability, Statistics, and Random Processes for Electrical Engineering
- Sheldon M. Ross —Introduction To Probability and Statistics for Engineers and Scientists
- Dimitri P. Bertsekas and John N. Tsitsiklis —Introduction to Probability

Köszönöm a figyelmet!