Diszkrét idejű jelek

- $x[k]$ időtartomány beli jel $X(e^{j\Omega})$ frekvencia tartomány beli spektruma a DiszkrIdejű Fourier transzformációból kapható $X(e^{j\Omega}) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x[k] \cdot e^{-j\Omega k}$. ez csak akkor létezik, ha $x[k]$ abszolút összegezhető.

$X(e^{j\Omega})$-ból $x[k]$ az inverz Fourier transzformációval kapható:

$x[k] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} X(e^{j\Omega}) \cdot e^{j\Omega k} \, d\Omega$ ahol $\Omega = \frac{2\pi}{k}$ diszkrét körfrekvencia.

$X(e^{j\Omega})$ periodikus 2π periódussal. $|X(e^{j\Omega})|$ - az amplitúdó spektrum

$Arc(X(e^{j\Omega}))$ - a fázis spektrum

Energiaspektrum:

- Parseval tételének értelmében: $E = \sum_{k=-\infty}^{\infty} |x[k]|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |X(e^{j\Omega})|^2 \, d\Omega$
- Egységimpulzus spektruma: $\mathcal{F}\{\delta[k]\} = 1$
- Egységugrás spektruma: $\mathcal{F}\{a^k \varepsilon[k]\} = \frac{1}{1 - a \cdot e^{-j\Omega}}$

A Fourier transzformáció tételei:

1.) Linearitás: $\mathcal{F}\{a_1 x_1[k] + a_2 x_2[k]\} = a_1 \mathcal{F}\{x_1[k]\} + a_2 \mathcal{F}\{x_2[k]\}$

2.) Eltolási tétel: $x[k-k_0] \longleftrightarrow e^{-j\Omega k_0} X(e^{j\Omega})$

3.) Modulációs tétel: $x[k] \cdot e^{j\Omega_0 k} \longleftrightarrow X(e^{j(\Omega - \Omega_0)})$

4.) Konvolúció: $\mathcal{F}\{x_1[k] * x_2[k]\} = X_1(e^{j\Omega}) \cdot X_2(e^{j\Omega})$

(K13) Ismertesse a nemlineáris $^{\text{lin}}$ kirchoff típusú hálózat számítását tartományi linearizálással! Hogyan célszerű a tartományokat megválasztani nemlineáris csatolatlan kétpólusok, illetve háromimpólusok (csatolt nemlineáris kétpólusok) esetén?

- Nemlineáris karakterisztikák közelítő leírásának legegyszerűbb módja a tartományonkénti linearizálás.
- Elegendő a karakterisztika néhány pontját ismerni ehhez (invariáns komponensek esetét vizsg.)
- Ez a módszer dinamikus, nemlineáris hálózatok vagy rendszerek válaszainak számítására elvileg egyszerű, de többnyire számításigényes.

1.) Nemlineáris rezisztív hálózatra:

- Csatolatlanra a karakterisztika: $u_{N,k} = u_k(i_N)$
- Linearizált karakterisztikák: $u_{N,k} = R(p) \cdot i_{N,k} + u_k(p_k)$ $\quad I_k(p_k) < i_{N,k} < I_k(p_k+1)$
- Választunk a tartományokat jellemző $p_1, p_2 \dots$ sorszámok egy halmazát. Ez kijelöli Ω tartományt.
- A linearizált karakterisztikákat a kanonikus egyenletek első, lineáris egyenletekből álló csoportjában helyettesítve egy lineáris egyenletrendszert kapunk.
- A független változókra vonatkozó, a választott Ω tartományban érvényes lineáris egyenletrendszer megoldása szolgáltatja a független változók egy lehetséges halmazát
- Ha mindegyik benne van a választott tartományban, akkor megkapjuk a munkaponti értékek egy lehetséges halmazát.
- Ezeket a linearizált karakterisztikákba helyettesítve megkapjuk a függő változók munkaponti értékét.
- Nemlineáris ellenállás munkaponti értékeiből számolható a válaszok közelítő munkaponti értéke.

2.) Dinamikus hálózatra:

- Csatolatlan dinamikus elemekre, linearizált karakterisztikák:

$$i_Q = C(p) \cdot u_Q' \quad u_Q \in \Omega_Q(p) \quad ; \quad u_\psi = L(p) \cdot i_\psi' \quad i_\psi \in \Omega_\psi(p)$$

- ismertek a dinamikus értékek:

$$i_Q = C(p) \cdot u_Q' \quad , \quad C(p) = C(u_p) \quad , \quad u_Q \in \Omega_Q(p)$$

- Csatolatlan esetben $\Omega(p)$ egy intervallum
- két csatolt nemlineáris kondenzátor linearizált karakterisztikája:

$$i_{Q,1} = C_{11}(p)\, u_{Q,1}' + C_{12}(p) \cdot u_{Q,2}'$$

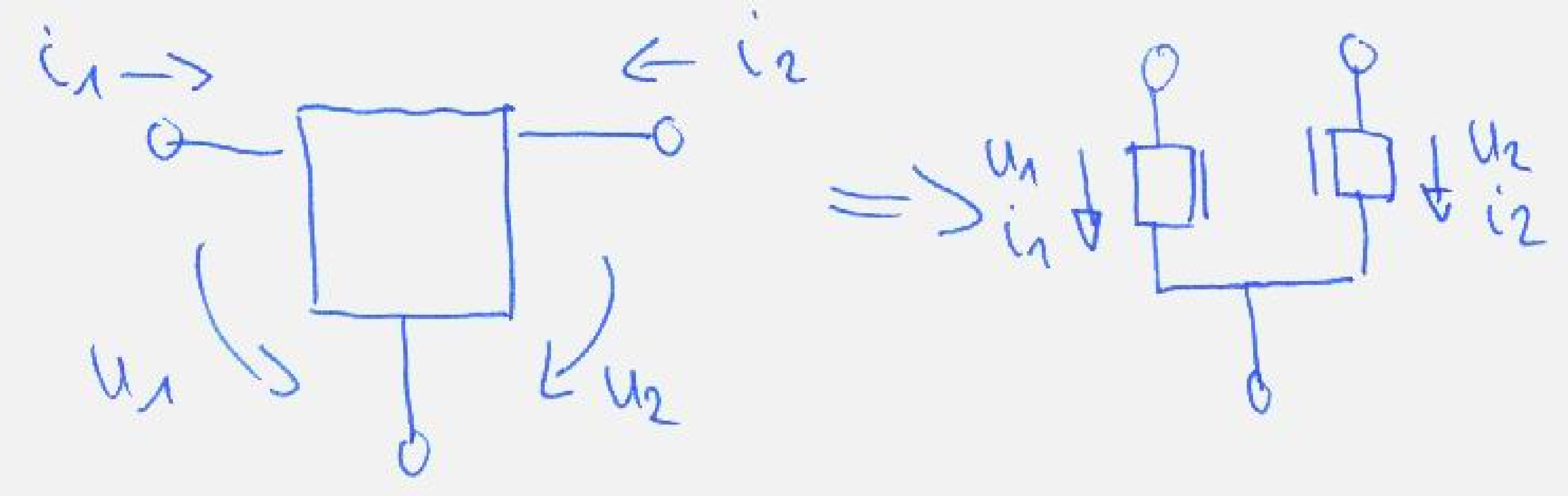
$$i_{Q,2} = C_{21}(p) \cdot u_{Q,1}' + C_{22}(p) \cdot u_{Q,2}'$$

$V_{Q_1}, V_{Q_2} \in \Omega_Q(p) \to \Delta$ tartomány

- A vizsgált tartományt az egyes tartományokra jellemző $p_1, p_2 \dots$ sorszámok értékeivel jellemezzük.
- Az állapotváltozás leírás linearizált normálalakja bármely tartományban előállítható.
- Valamennyi nemlineáris komponens független változóját választani kell tekintettel, hogy ki tudjuk jelölni az aktuális tartományokat.
- A linearizált állapotváltozás leírás normál alakja megoldható.
- Először meghatározzuk a kezdeti tartományt. Többnyire bekapcsolási folyamatot vizsgálunk. Minden $u_C = 0$, $i_L = 0$.
- A dinamikus komponensek kezdeti feszültségének vagy áramának ismeretében meghatározzuk a nemlineáris rezisztív komponensek kezdeti feszültségét vagy áramát.
- Az állapotváltozók kezdeti értékének ismeretében meghatározzuk a nemlineáris rezisztív komponensek kezdeti értékét.
- Jellemezze a kezdeti értékek által meghatározott tartományok összességét $\Omega(p_0)$
- Adjuk meg az állapotváltozás leírást az $\Omega(p_0)$ tartományban.
- Szerencsés esetben valamennyi $(u_{N,k}(t), i_{N,k}(t), u_{C,k}(t), i_{L,k}(t))^*$ változó ~~az~~ $\Omega(p_0)$-ban marad.
- Többnyire azonban valamely t_i időpontban valamely változó eléri kezdeti tartományának határait.
- Ekkor a trajektória átkerül egy szomszédos $\Omega(p_1)$-be, tehát ott oldjuk meg az állapotváltozás leírást.
- A kezdeti állapotot az előző állapotbeli végállapot határozza meg, az állapotváltozók folytonosak.
- Szerencsés esetben $(\quad)^*$ az $\Omega(p_1)$ ben maradnak.
- De többnyire t_2-ben valamely változó eléri kezdeti tartományának határait $\to \Omega(p_2)$ be, de ez lehet $\Omega(p_0)$ is, de mivel a kezdeti állapot más, más megoldást kapunk.
- Addig folytatjuk ezt, míg úgy nem ítéljük, hogy további számítás már nem nyújtana új információt. (pl: gerjesztés $\to$ áll., állapotvált. $\to$ áll.)
- Eljárás előnye: karakterisztikák egyszerűen közelíthetőek, elég néhány pont is.
- Hátrány: hosszadalmas ~~a~~ t_i-k számítása, ahol valamelyik változó eléri tartományainak határait.
- Első becslésre jó.

3. Csatolt nemlineáris ellenállás:

- nemlineáris rezisztív sokpólusok leírására használhatjuk



Explicit egyenletek:

$u_1 = U_1(i_1, u_2)$, $i_2 = I_2(i_1, u_2)$

- Ábrázolás: különböző $u_2 = U_{2,k}$ esetén megrajzoljuk az u_1, i_1 síkon az $u_1 = U_1(i_1, U_{2k})$ görbesereget és különböző i_1 esetén az u_2, i_2 síkon $i_2 = I_2(I_{1k}, u_2)$ -t.

- Tartományonkénti linearizálás: $u_1 = R(p) i_1 + A(p) u_2 + U_1(p)$, $i_2 = B(p) i_1 + G(p) u_2 + I_2(p)$ $i_1, u_2 \in \Omega_p$. Kézenfekvő Ω_p választása: i_1, u_2 síkon téglalapok, csak a tartomány 3 sarkaira lehet illeszteni -> folytonos függvény egy szakadásos közelítése lenne. Ezért a téglalapot valamelyik átlójánál félbevágjuk, az így adódó háromszöget tekintjük Ω_p-nek. Ekkor a síkot leíró 3-3 tartomány (R, A, U_1 vagy B, G, I_2) a 3 sarokpontban felvett u_1 vagy i_2 alapján egyértelműen meghatározható.

(J3) Ismertesse a diszkrét idejű és a folytonos idejű jelek komplex frekvencia tartománybeli leírásának módját, a rendszerelméletben előforduló legfontosabb speciális jeleket (egységugrás, Dirac impulzus), és a jeleken végzett legfontosabb lineáris műveletek (összeadás, állandóval szorzás, eltolás, differenciálás) megfelelőit a komplex frekvencia tartományban!

I. Folytonos jelekre:

1. Laplace transzformáció értelmezése:

a) Alkalmazás: – a válasz időfüggvények számítására igen alkalmas módszer
– Fourier transzformációval a nem abszolút integrálható jelekre is alkalmazható.

b) Hátrány: a transzformáció változójának és a transzformált mennyiségeknek nincs közvetlen fizikai tartalmuk

c) Definíció: $F(s) = \int_{-0}^{\infty} f(t) \cdot e^{-st}\, dt$ => $t \geq 0$ intervallumon érvényes választ lehet vele előállítani

ahol $s = \sigma + j\omega$ ahol σ biztosítja, hogy a definíciós integrál konvergens legyen

d) Inverz transzformáció: $f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{\sigma - j\omega}^{\sigma + j\omega} F(s) \cdot e^{st}\, ds$, de gyakorlatban felismeréssel

e) Elemi fgv-re: $\mathcal{L}\{\delta(t)\} = \underline{\underline{1}}$

$$\mathcal{L}\{\varepsilon(t)\} = \int_{-0}^{\infty} \varepsilon(t) \cdot e^{-st}\, dt = \left[-\frac{1}{s} \cdot e^{-st}\right]_{-0}^{\infty} = \underline{\underline{\frac{1}{s}}}$$

f.) kapcsolat a Fourier transzformációval:

$X(j\omega) = X(s)|_{s=j\omega}$ ha → $x(t)$ belépő
→ abszolút integrálható $\int_{-0}^{\infty} |x(t)|\, dt$

g.) Műveletek, tételek:

[1] Linearitás (összeadás):

$$\mathcal{L}\{C_1 x_1(t) + C_2 x_2(t)\} = C_1 X_1(s) + C_2 X_2(s) = C_1 \mathcal{L}\{x_1(t)\} + C_2 \mathcal{L}\{x_2(t)\}$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{C_1 X_1(s) + C_2 X_2(s)\} = C_1 \mathcal{L}^{-1}\{X_1(s)\} + C_2 \mathcal{L}^{-1}\{X_2(s)\}$$

$\boxed{2}$ Állandóval való szorzás:

$$\mathcal{L}\{C\,x(t)\} = C\cdot\mathcal{L}\{x(t)\} = C\cdot X(s)$$

$$\mathcal{L}^{-1}\{C\cdot X(s)\} = C\cdot\mathcal{L}^{-1}\{X_1(s)\} = C\cdot x(t)$$

$\boxed{3}$ Differenciálás: $f(t) \to F(s)$ Biz.: parciális integrálással definíció szerint

$$\frac{df(t)}{dt} \to sF(s) - f(-0)$$

$\boxed{4}$ Integrálás: $f(t) \to F(s)$

$$\int_{-0}^{t} f(\tau)\,d\tau \to \frac{1}{s}F(s)$$

Biz: $\int_{-0}^{\infty}\left(\int_{-0}^{t} f(\tau)\,d\tau\right)\cdot e^{-st}\,dt = \checkmark$

$\boxed{5.}$ Eltolási tétel $f(t) \to F(s)$

$$\varepsilon(t-T)f(t-T) \to e^{-sT}F(s)$$

$t-T=\tau$ $\downarrow$

Biz: $\mathcal{L}\{\varepsilon(t-T)f(t-T)\} = \int_{-0}^{\infty}\varepsilon(t-T)f(t-T)\cdot e^{-st}\,dt = \int_{-0}^{\infty} f(t-T)e^{-st}\,dt =$

$$= \int_{-0}^{\infty} f(\tau)e^{-sT}e^{-s\tau}\,d\tau = e^{-sT}\int_{-0}^{\infty}\underbrace{e^{s\tau}_{i}(\tau)}_{?}\,d\tau$$

!: Ha Laplace trafó e^{-sT}-vel van szorozva $\to$ hozzá tartozó időfüggvény $t<T$-re zérus!

$\boxed{6}$ Csillapítási tétel:

$$f(t) \to F(s)$$

$$f(t)\cdot e^{-st} \to F(s+\alpha)$$

$\boxed{7.}$ Konvolúció:

$$f(t) \to F(s),\quad g(t) \to G(s) \Rightarrow f(t) * g(t) \to F(s)\cdot G(s)$$

$\boxed{8.}$ Kezdeti és végérték tétel:

kezdeti: $X(+0) = \lim_{s\to\infty}(sX(s))$

végérték: $x(\infty) = \lim_{s\to 0}(sX(s))$

II. Diszkrét jelek:

1. Z-transzformáció:

a) Alkalmazás: – jól használható adott gerjesztésű válasz számítására
– Fő előny: Lineáris algebrai egyenletekhez vezet, de
nem feltétel → stabilitás
↘ jelek abszolút összegezhetősége
– Hátrány: z változónak nincs közvetlen fizikai tartalma

b) Definíció:

$$X[z] = \sum_{k=0}^{\infty} x[k]\, z^{-k}$$

, ahol z egy dimenzió nélküli komplex változó
komplex frekvencia

– Z transzformáció a $k \in Z^-$ hoz tartozó értékeket nem veszi figyelembe ($\emptyset$-nak vesszük)

c) Inverz transzformáció:

$$x[k] = \frac{1}{2\pi j} \oint_{|z|>r_0} X(z) \cdot z^{k-1}\, dz$$

→ Gyakorlatban nem használjuk, helyette felismeréssel.

– mivel az inverz transzformáció integrál belépő x(t)-t ad
↳ felismeréses trafónál is belépő jellegűnek vesszük a fv-t.

d) Alkalmazás elemi fv-ekre:

$\boxed{1.}$ $$Z\{\delta[k]\} = \sum_{k=0}^{\infty} \delta[k]\, z^{-k} = 1 \quad (z^{-k} = z^0)$$

$\boxed{2.}$ $$Z\{\varepsilon[k]\} = \sum_{k=0}^{\infty} 1 \cdot z^{-k} = \frac{1}{1-z^{-1}} = \frac{z}{z-1}$$

konv. sugár: $|z| > 1 \Downarrow r_0 = 1$

$\boxed{3.}$ $$Z\{\varepsilon[k] \cdot a^k\} = \sum_{k=0}^{\infty} a^k z^{-k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{z}\right)^k = \frac{z}{z-a}$$

$\left|\frac{a}{z}\right| < 1$
$|z| > |a|$
$r_0 = a$

e) Műveletek, tételek:

$\boxed{1}$ Linearitás: Z és inverz Z transzformáció egy lineáris művelet, így:

$$Z\{C_1 X_1[k] + C_2 X_2[k]\} = C_1 Z\{x_1[k]\} + C_2 Z\{x_2[k]\}$$

Z^{-1} – ugyanígy

2. Állandóval való szorzás: lásd előző tétel

3. Eltolási tétel:

$x[k] \rightarrow X(z)$

$x[k-k_0] \rightarrow z^{-k_0} \cdot X(z)$

ha a jel belépő!

Bizonyítás: definícióból

$k - k_0 = m$

$$\mathcal{Z}\{x[k-k_0]\} = \sum_{k=0}^{\infty} x[k-k_0]\, z^{-k} = \sum_{-k_0}^{\infty} x[m]\, z^{-m} \cdot z^{-k_0} = x[-k_0] + x[-k_0+1]\, z^{-1} + \dots$$

$$\dots + x[-1]\, z^{-k_0+1} + \underbrace{z^{-k_0} \sum_{m=0}^{\infty} x[m]\, z^{-m}} \checkmark$$

4. Csillapítási tétel:

$x[k] \rightarrow X(z)$

$q^k \cdot x[k] \rightarrow X\left(\frac{z}{q}\right)$

ahol q tetszőleges komplex vagy valós érték

ha $q \in \mathbb{R}$ és $-1 < q < 1 \Leftarrow$ ekkor exponenciális csillapítás

5. Konvolúció:

$$\left.\begin{aligned} x[k] &\rightarrow X(z) \\ y[k] &\rightarrow Y(z) \end{aligned}\right\} \quad x[k] * y[k] \rightarrow X(z)\,Y(z)$$

6. Kezdeti és végérték tétel:

Folytonos esethez hasonlóan, csak z-vel! (lásd előző lap)

$\downarrow$??

(H9.) Hogyan határozható meg egy diszkrét idejű, illetve egy folytonos idejű rendszer átviteli karakterisztikája hálózati reprezentációjának ismeretében? Hasonlítsa össze, és 1-1 példán illusztrálja a különböző módszereket!

I. Folytonos rendszer – $H(j\omega)$ meghatározása:

$\boxed{1}$ $H(j\omega)$-ról általánosan (tulajdonságok):

– Legáltalánosabban: $H(j\omega) = \frac{\text{válasz spektrum}}{\text{gerjesztés spektrum}} = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}$

– Komplex számításmód: $H(j\omega) = \frac{\omega \text{ körfrekv. válasz komplex csúcsértéke}}{\text{— " — gerjesztés — " —}}$ ⇒ $\boxed{\text{állandósult állapotban!}}$

! $H(j\omega)$ az ω komplex értékű fgv-e

– Exponenciális alakra hozva: $H(j\omega) = H(\omega) \cdot e^{j\varphi(\omega)}$

ahol $H(\omega) = |H(j\omega)|$ az amplitúdó karakterisztika

$\varphi(\omega) = \arg(H(j\omega))$ a fázis karakterisztika

– Létezés feltétele: létezik, ha a hálózat GV stabilis

↳ egyébként fizikailag értelmetlen

– Ha egy hálózat komponenseinek függvénye ω racionális fgv-e, akkor a hálózat egyenletek is racionálisak ⇒ megoldásuk is az!

↳ az ilyen hálózat által reprezentált rendszer $H(j\omega)$-ja is ω racionális függvénye.

– Általános alak: (normál alak)

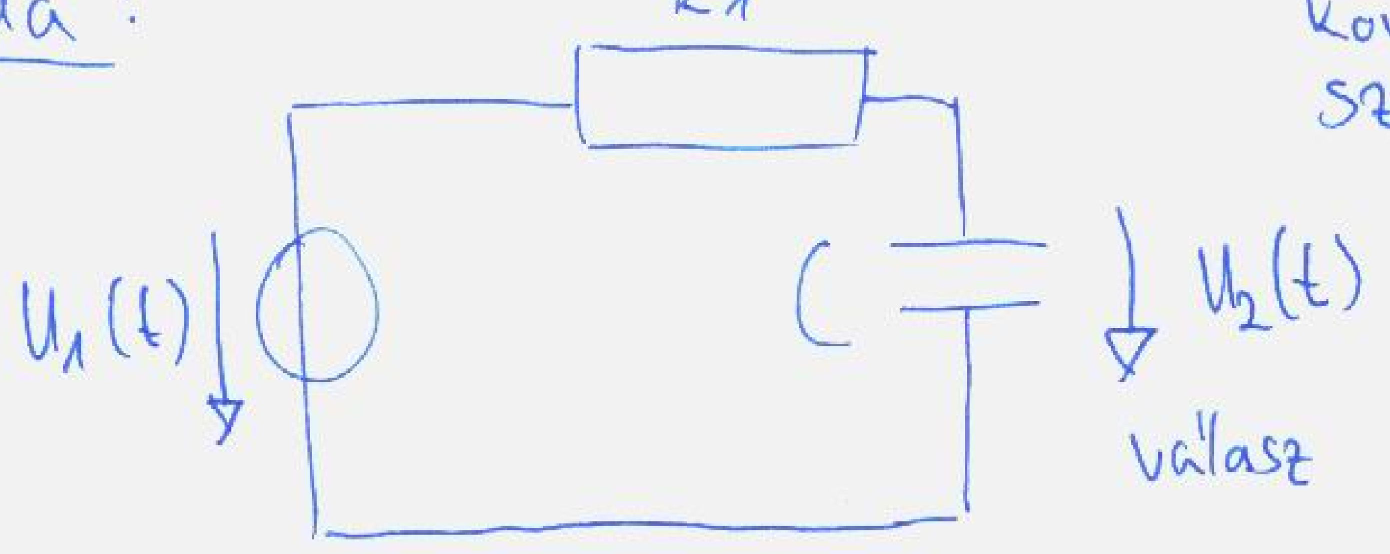
$$H(j\omega) = \frac{b_0 + b_1(j\omega) + b_2(j\omega)^2 + \ldots + b_m(j\omega)^m}{1 + a_1(j\omega) + a_2(j\omega)^2 \ldots a_n(j\omega)^n} \quad m \leq n$$

$\boxed{2}$ Megadási módok (folyt. időben)

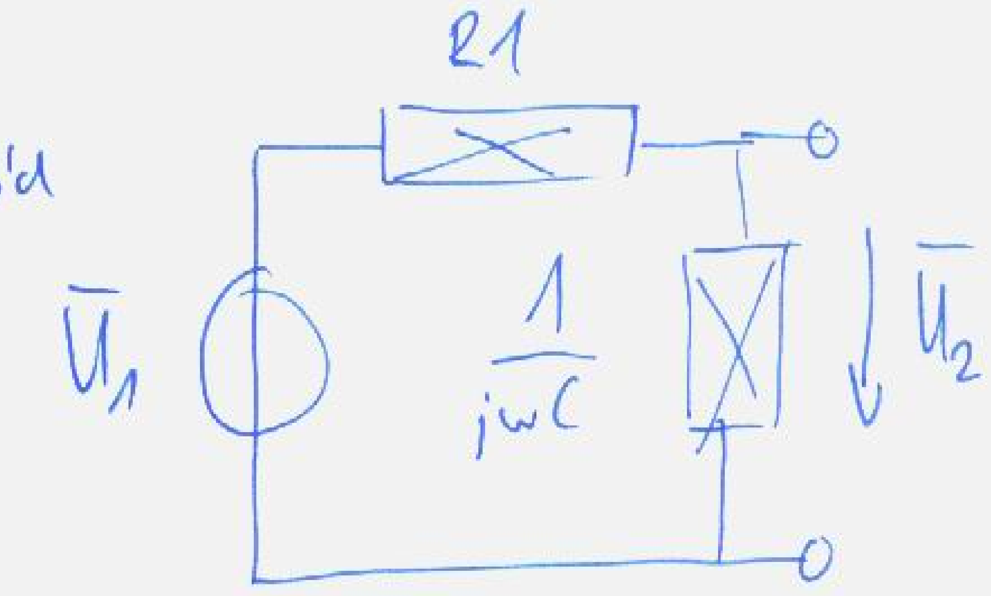
a) közvetlen a hálózatból: – Egyszerű hálózatra: komplex számításmóddal kifejezzük $Y(j\omega)$ választ úgy, hogy $U(j\omega)$-t közben paraméternek tekintjük (és ω is változik!)

$$\Rightarrow H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)}$$ -val kapjuk meg

Példa:



komplex számítási mód $\Rightarrow$



$$\bar{U}_2 = \bar{U}_1 \frac{\frac{1}{j\omega C}}{R_1 + \frac{1}{j\omega C}} = \bar{U}_1 \frac{1}{1+j\omega RC} \Rightarrow \boxed{H(j\omega) = \frac{Y(j\omega)}{U(j\omega)} = \frac{\bar{U}_1 \frac{1}{1+j\omega RC}}{\bar{U}_1} = \frac{1}{1+RCj\omega}}$$

b) $h(t)$ ismeretében:

- $\mathcal{F}\{\}$ transzformációval $H(j\omega)$-t kapjuk.
- de GV stabilitás fontos, hogy meglegyen ($h(t)$ abszolút integrálható)

$$H(j\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\}$$

c) $H(s)$ ből:

- Ha a rendszer GV stabilis: $H(j\omega) = H(s)\big|_{s=j\omega}$ helyettesítéssel.

Példa b) - c) re: - Adott $h(t) = \delta(t) - \varepsilon(t)\left[4e^{-4t} + e^{-t}\right]$

$\hookrightarrow$ megoldás: mivel a rendszer kauzális és GV stabilis (látszik $h(t)$ ből)

$$H(j\omega) = \mathcal{F}\{h(t)\} = 1 - \frac{4}{j\omega+4} - \frac{1}{j\omega+1} =$$

$$= \frac{(j\omega+4)(j\omega+1) - 4j\omega - 4 - j\omega - 4}{(j\omega+4)(j\omega+1)} = \frac{(j\omega)^2 - 4}{(j\omega)^2 + 5j\omega + 4} =$$

$$= \boxed{\frac{\frac{1}{4}(j\omega)^2 - 1}{1 + \frac{5}{4}j\omega + \frac{1}{4}(j\omega)^2}}$$

ez a normál alak.

II. Diszkrét rendszer $H(e^{j\vartheta})$-ja:

1. $H(e^{j\vartheta})$-ról általánosan

- Legáltalánosabban: $H(e^{j\vartheta}) = \dfrac{Y(e^{j\vartheta})}{U(e^{j\vartheta})} = \dfrac{\text{a válasz spektruma}}{\text{a gerjesztés spektruma}}$

- Ha az átviteli tényezőben a rögzített ϑ körfrekvenciát változónak tekintjük, az átviteli karakterisztikát kapjuk:

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{\overline{Y}_{be}}{\overline{U}_{be}} = \frac{\vartheta \text{ körfrekvencia válasz komplex csúcsértéke}}{\text{—''— gerjesztés —''—}} =$$

$$= \frac{b_0 + b_1 e^{-j\vartheta} + \ldots + b_m \cdot e^{-jm\vartheta}}{1 + a_1 \cdot e^{-j\vartheta} + \ldots + a_n \cdot e^{-jn\vartheta}}$$

- $H(e^{j\vartheta}) = k(\vartheta) \cdot e^{j\varphi(\vartheta)}$ alakban hozható, ahol:

$$\left.\begin{array}{l} k(\vartheta): \text{ amplitúdó karakterisztika} \\ \varphi(\vartheta): \text{ fázis karakterisztika} \end{array}\right\} 2\pi \text{ periodikus fv-ei}$$

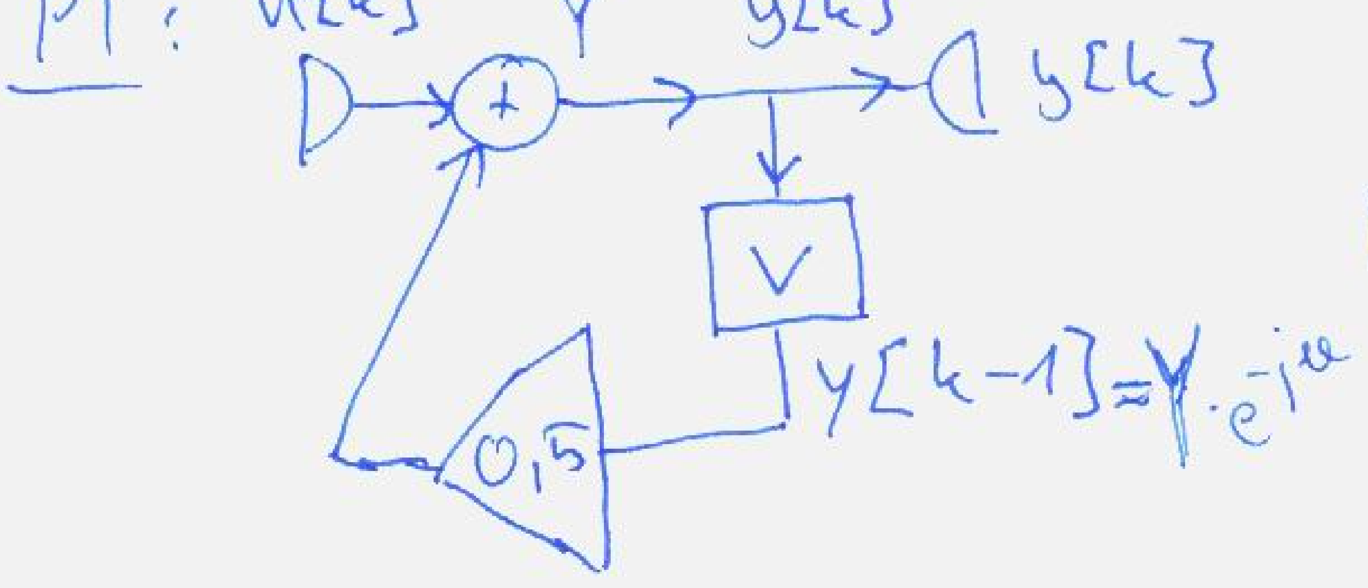
(oka: $e^{-jm(\vartheta+2\pi)} = \underbrace{e^{-jm2\pi}}_{=1} \cdot e^{-jm\vartheta}$)

- csak GV stabilis rendszerekre létezik (lásd R12-es tétel)

2. $H(e^{j\vartheta})$ előállítása:

a) Hálózatból közvetlenül:
- a számítást komplex számításmóddal végezzük
- vizsgáló jelek bevezetése: összegző kimenetére (ha kell)
- összegzőkre egyenletek → Y kifejezése
- $H(e^{j\vartheta}) = \dfrac{Y(e^{j\vartheta})}{U(e^{j\vartheta})}$ -val kapjuk

Pl:



komplex tartományban: $Y = U + 0{,}5\, Y \cdot e^{-j\vartheta}$

$$Y = \frac{U}{1 - 0{,}5 e^{-j\vartheta}}$$

$$\Downarrow$$

$$H(e^{j\vartheta}) = \frac{1}{1 - 0{,}5 e^{-j\vartheta}}$$

b) Rendszeregyenletből :

$\mathcal{F}\{\}$ transzformálva $H(e^{j\vartheta})$ -val

Pl: $y[k] - 0{,}5\, y[k-1] = u[k]$

c) Állapotváltozós leírásból

Példa:
$$\begin{cases} x_1[k+1] = a_{11} x_1[k] + a_{12} x_2[k] + u_1[k] \\ x_2[k+1] = a_{21} x_2[k] + a_{22} x_2[k] + u_2[k] \\ y[k] = c_1 x_1[k] + c_2 x_2[k] + d\, u[k] \end{cases}$$

$\mathcal{F}\{\}$

$$\begin{cases} e^{j\vartheta} X_1 = a_{11} X_1 + a_{12} X_2 + b_1 U \\ e^{j\vartheta} X_2 = a_{21} X_1 + a_{22} X_2 + b_2 U \\ Y = c_1 X_1 + c_2 X_2 + dU \end{cases} \qquad \begin{aligned} X_1 &= O \cdot U \\ X_2 &= O \cdot U \end{aligned}$$

$$Y = U \cdot \mathrm{fgv}(\vartheta) \Rightarrow H(e^{j\vartheta}) = \frac{Y(e^{j\vartheta})}{U(e^{j\vartheta})}$$

d) Átviteli függvényből

ha a rendszer stabilis : $H(e^{j\vartheta}) = H(z)\big|_{z=e^{j\vartheta}}$ helyettesítéssel

e) Impulzusválaszból

$$H(e^{j\vartheta}) = \mathcal{F}\{h[k]\}$$

→ Átviteli karakterisztika nevezőjéből el lehet dönteni, hogy stabilis-e a rendszer, és hogy egyáltalán létezik-e $H(e^{j\vartheta})$

feltétel: $|p_i| < 1$

pólusok abszolút értéke

R17. Ismertesse a folytonos idejű rendszer diszkrét idejű szimulációjának néhány módszerét! Mi a célja a szimulációnak? Illusztrálja az eljárásokat egy egyszerű ~~folytonos~~ folytonos idejű rendszerre!

- A diszkrét idejű rendszerek számítása lényegesen egyszerűbb, mint a folytonos idejű rendszereké
- A szimulátor egy olyan diszkrét idejű rendszer, amely a lehető legpontosabban szimulálja a folytonos idejű rendszer viselkedését.
- A mintavételi időközt a folytonos idejű jel sávszélessége vagy sávkorlátja alapján számíthatjuk: sávkorlátra: $T \le \frac{\pi}{\Omega}$ $\frac{\omega_s}{2} \ge \Omega$ $\omega_s = \frac{2\pi}{T}$
- A folytonos idejű rendszer gerjesztése: $u_c(t)$, válasza: $y_c(t)$; a diszkrét idejű rendszer gerjesztése legyen: $u_D[k] = u_c(kT+0)$, a folytonos jel jobboldali határértéke a kT pontokban.
- A szimuláció ideális, ha $y_D[k] = y_c[kT+0]$
- A szimulációnak meg kell őriznie a folytonos idejű rendszer stabilitási és kauzalitási tulajdonságait

Az impulzusválasz szimulációja:

- tekintsük az impulzusválaszt $D\cdot\delta(t) + \varepsilon(t)\cdot f(t)$ alakúnak
- ekkor a válasz a kT helyen a konvolúciós integrálból:

$$y_c(kT+0) = \int_{-0}^{kT+0} D\cdot\delta(\tau)\, u_c(kT+0-\tau)\, d\tau + \int_{0}^{kT} f(\tau)\, u_c(kT+0-\tau)\, d\tau$$

- az első integrál értéke: $Du_c(kT+0)$, a második integrált T hosszúságú intervallumra számítjuk: $y_c(kT+0) = Du_c(kT+0) + \sum_{i=1}^{k} \int_{iT-T}^{iT} f(\tau)\, u_c(kT+0-\tau)\, d\tau$, $k \in N$
- ezt az ~~eredményt~~ integrált közelítsük úgy, hogy összevethető legyen a diszkrét konvolúció:

$$y_D = \sum_{i=0}^{k} h_D[i]\, u_D[k-i] \qquad k \in N$$

- a következő eredményt kapjuk: $\boxed{h_c(t) = D\delta(t) + \varepsilon(t) f(t) \Rightarrow h_D[k] = D\delta[k] + T\varepsilon[k-1] f(kT)}$

Szimulátor a komplex frekvencia tartományban:

$$\frac{dy}{dt} = u(t) \qquad \frac{y[k] - y[k-1]}{T} = \begin{cases} u[k] & : \text{hátralépő Euler} \\ u[k-1] & : \text{előrelépő Euler} \\ \frac{u[k] + u[k-1]}{2} & : \text{Crank-Nicholson} \end{cases}$$

Crank-Nicholson derivátor:

$$H_D(z) = \frac{2}{T}\,\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$$

C-N integrátor:

$$\frac{y[k]-y[k-1]}{T} = \frac{u[k]+u[k-1]}{2}$$

$$H(z) = \frac{T}{2}\cdot\frac{1+z^{-1}}{1-z^{-1}}$$

Folytonos idejű derivátor:

$$H(z) = H(s)\Big|_{s=\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}}$$

Hátralépő Euler: $s \to \frac{1}{T}(1-z^{-1})$

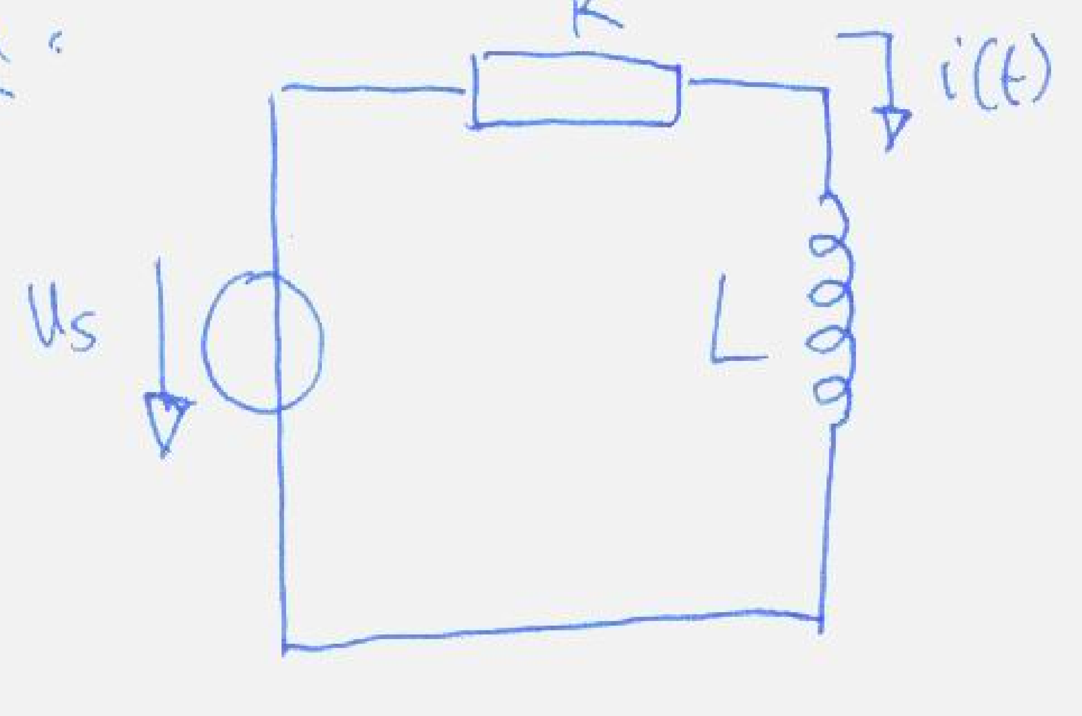
$$H_D(z) = \frac{1}{T}(1-z^{-1})$$

- komplex frekvenciatartományban úgy lehet szimulátort meghatározni, hogy a folyamatos idejű átviteli függvényben s helyébe mindenütt $\frac{1}{T}(1-z^{-1})$-et vagy $\frac{2}{T}\frac{1-z^{-1}}{1+z^{-1}}$-et helyettesítünk.

- A frekvenciatartományban meghatározott szimulátor az $\frac{\omega T}{2} < \frac{\pi}{6}$ feltétel teljesülése esetén $z \to e^{j\vartheta}$ helyettesítéssel kapható.

- A diszkrét idejű rendszer átviteli karakterisztikája arányos a folytonos idejű rendszer átviteli karakterisztikájával, ha $\omega < \frac{\omega_s}{6}$, $\omega_d = \frac{\pi}{T} = \frac{\omega_s}{2}$; $\frac{\omega_d T}{2} = \frac{\pi}{2}$; $\omega_f \to \infty$

Példa:



$$H(s) = \frac{1}{R+sL} = \frac{1}{L}\cdot\frac{1}{s+\frac{R}{L}}$$

$$h(t) = \varepsilon(t)\cdot\frac{1}{L}\cdot e^{-\frac{R}{L}t}$$

$$\Downarrow$$

$$h[k] = \frac{T}{L}\,\varepsilon[k-1]\cdot e^{-\frac{R}{L}Tk}$$

$$\Downarrow$$

$$H(z)$$

$$\Downarrow$$

rendszeregyenlet

(H10.) Hogyan határozható meg egy diszkrét idejű, illetve egy folytonos idejű rendszer átviteli függvénye hálózati reprezentációjának ismeretében? Hasonlítsa össze, és 1-1 példán illusztrálja a különböző módszereket!

I. Folytonos idő

- Lineáris, invariáns, kauzális hálózat esetén, $u(t)$ belépő gerjesztés esetén a belépő válasz $y(t)$.
- Az átviteli függvény az $y(t)$ és az $u(t)$ Laplace transzformáltjainak hányadosa.

$$H(s)=\frac{Y(s)}{U(s)} \quad \text{általános alakja: } H(s)=\frac{b_0 s^m+\ldots+b_{m-1}s+b_m}{s^n+\ldots+a_{n-1}s+a_n}$$

- Az átviteli függvény meghatározása:
  - $s=j\omega$ helyettesítéssel az átviteli karakterisztikából, ha az átviteli karakterisztika létezik (és a rendszer kauzális)
  - Az időtartomány beli állapot egyenletek Laplace tr. folmeállásából:

$$H(s)=\underline{C}^T[s\underline{\underline{E}}-\underline{\underline{A}}]^{-1}\underline{B}+D \qquad \dot{\underline{x}}=\underline{\underline{A}}\,\underline{x}+\underline{B}u$$
$$y=\underline{C}^T\underline{x}+Du$$

  - impulzusválasz Laplace transzformáltjából
  - Komplex frekvenciatartományban felírt egyenletekből:
    (magából a hálózatból) $R\to R$

$$L\frac{di(t)}{dt}\to L\left(sI(s)-i(-0)\right)$$

$$C\frac{du(t)}{dt}\to C\left(sU(s)-u(-0)\right)$$

II. Diszkrét idő:

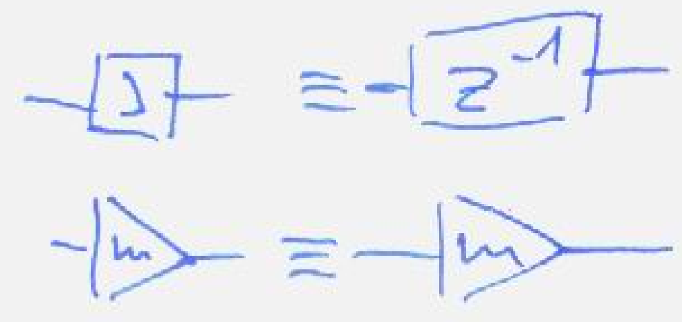
- Kauzális, lineáris, invariáns rendszer $u[k]$ belépő gerjesztéshez tartozó válasza $y[k]$.
- Az átviteli függvény az $y[k]$ és az $u[k]$ z transzformáltjainak hányadosa.

$$H(z)=\frac{Y(z)}{U(z)} \quad \text{általános alakja: } H(z)=\frac{b_0+b_1z^{-1}+\ldots+b_mz^{-m}}{1+a_1z^{-1}+\ldots+a_nz^{-n}}$$

- Az átviteli függvény meghatározása:
  - $e^{j\vartheta} = z$ helyettesítéssel az átviteli karakterisztikából, ha az átviteli karakterisztika létezik.
  - az időtartománybeli állapotváltozós leírásból:

    $$H(z) = \underline{c}^T \left[z\underline{\underline{E}} - \underline{\underline{A}} \right]^{-1} \underline{b} + D$$

  - impulzusválasz z transzformáltjából
  - komplex frekvenciatartományban felírt egyenletekből

    ↳ magából a hálózatból
  - rendszeregyenletből

(R18.) Ismertesse az átviteli karakterisztika és a jel sávszélességének fogalmát! Mi az alakhű jelátvitel fogalma és feltétele? Mit jelent az aluláteresztő, a felüláteresztő, a sáváteresztő és a sávzáró rendszer?

1.) Átviteli karakterisztika sávszélessége:

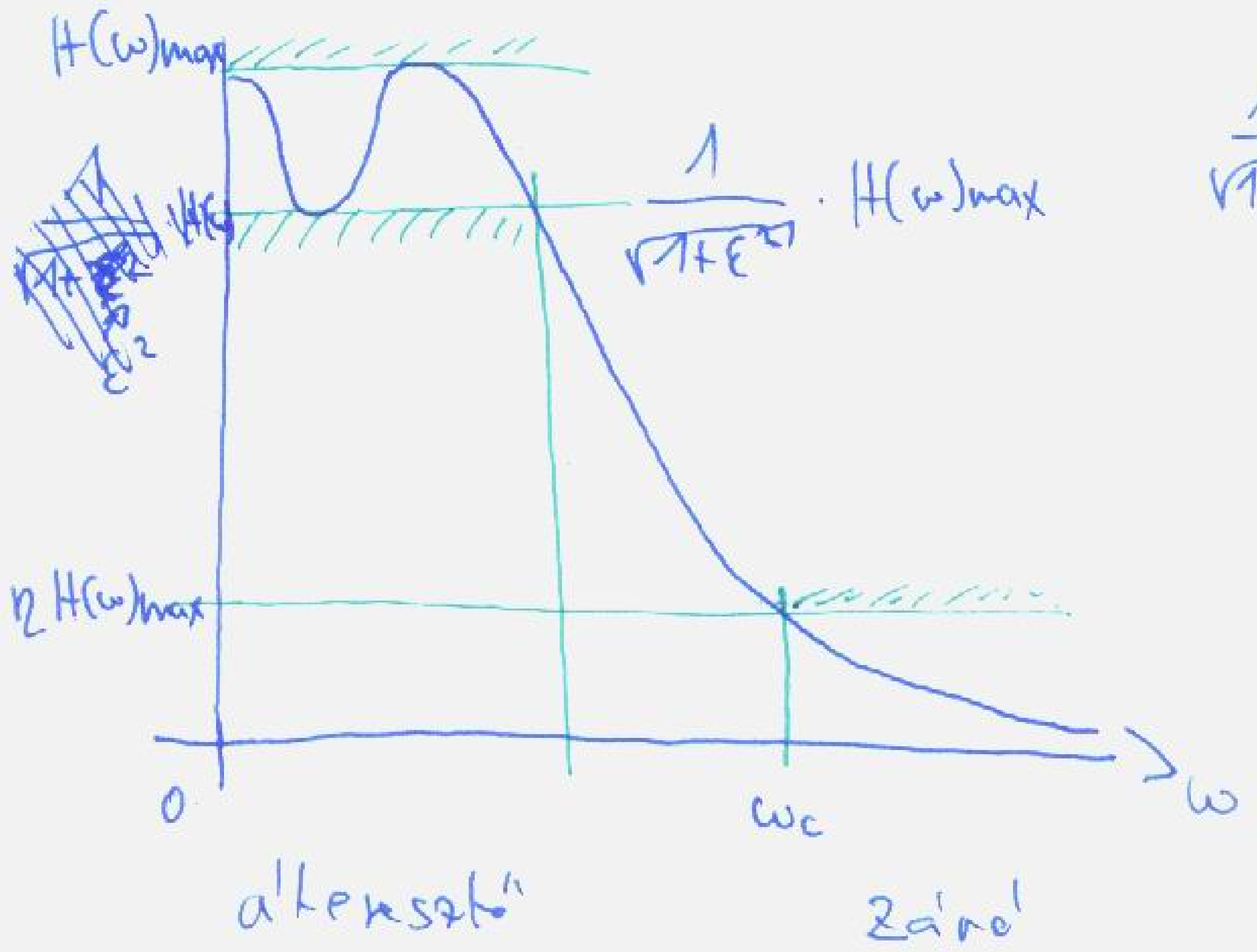
- Az átviteli karakterisztika áteresztő illetve záró sávja az a frekvencia intervallum, amelyben az amplitúdóspektrum nem tér el túlságosan valamely szélsőértéktől.

- áteresztő sáv: $\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}} H(\omega)_{max} \le H(\omega) \le H(\omega)_{max}$ $\quad \omega_a \le \omega \le \omega_b$

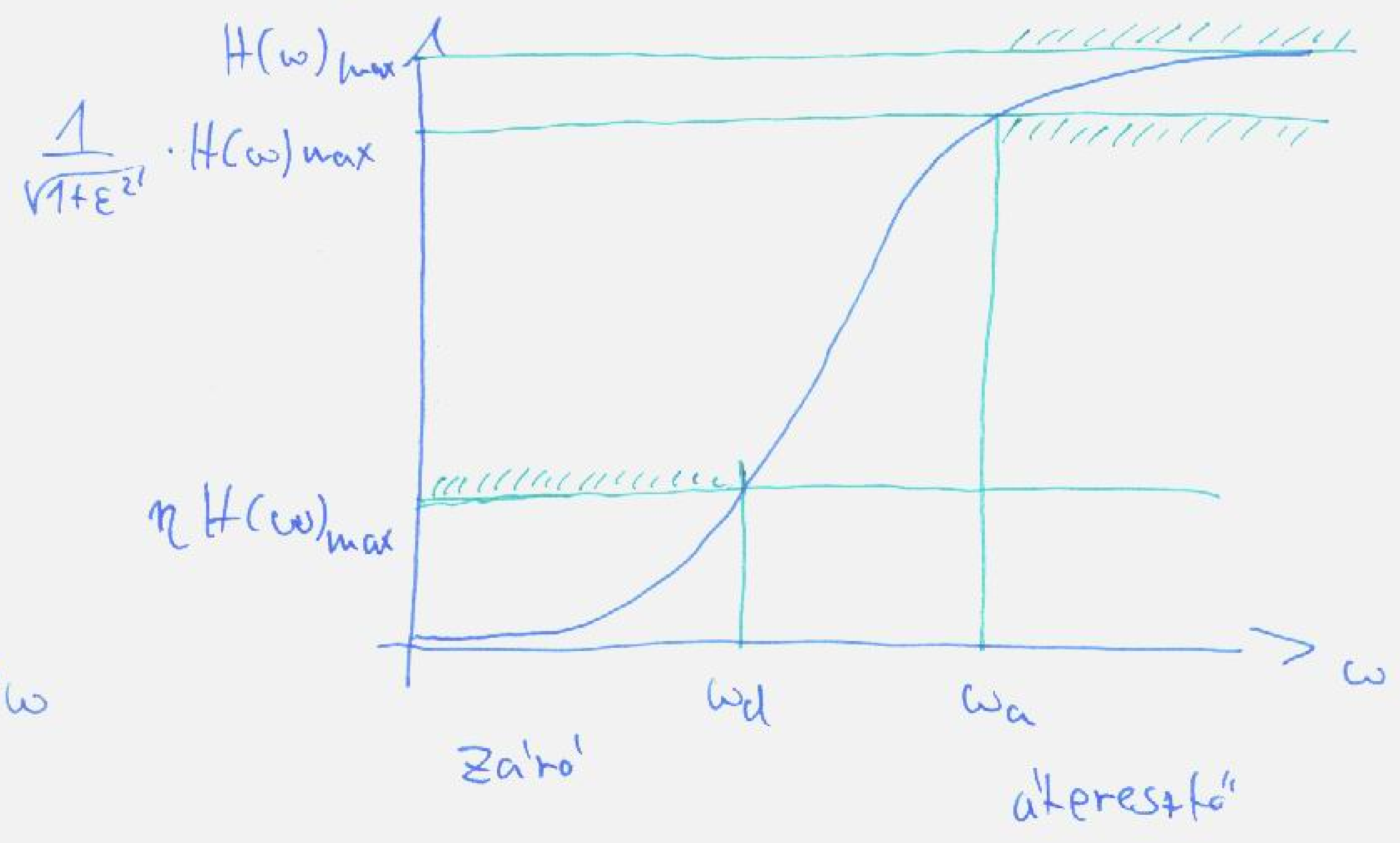
- záró sáv: $0 \le H(\omega) \le \eta\, H(\omega)_{max}$ $\quad \omega_a \le \omega \le \omega_b$ $\quad \eta < \frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2}}$

↳ ha ε nincs megadva, akkor $\varepsilon = 1$ és $\eta = \frac{1}{\sqrt{2}}$

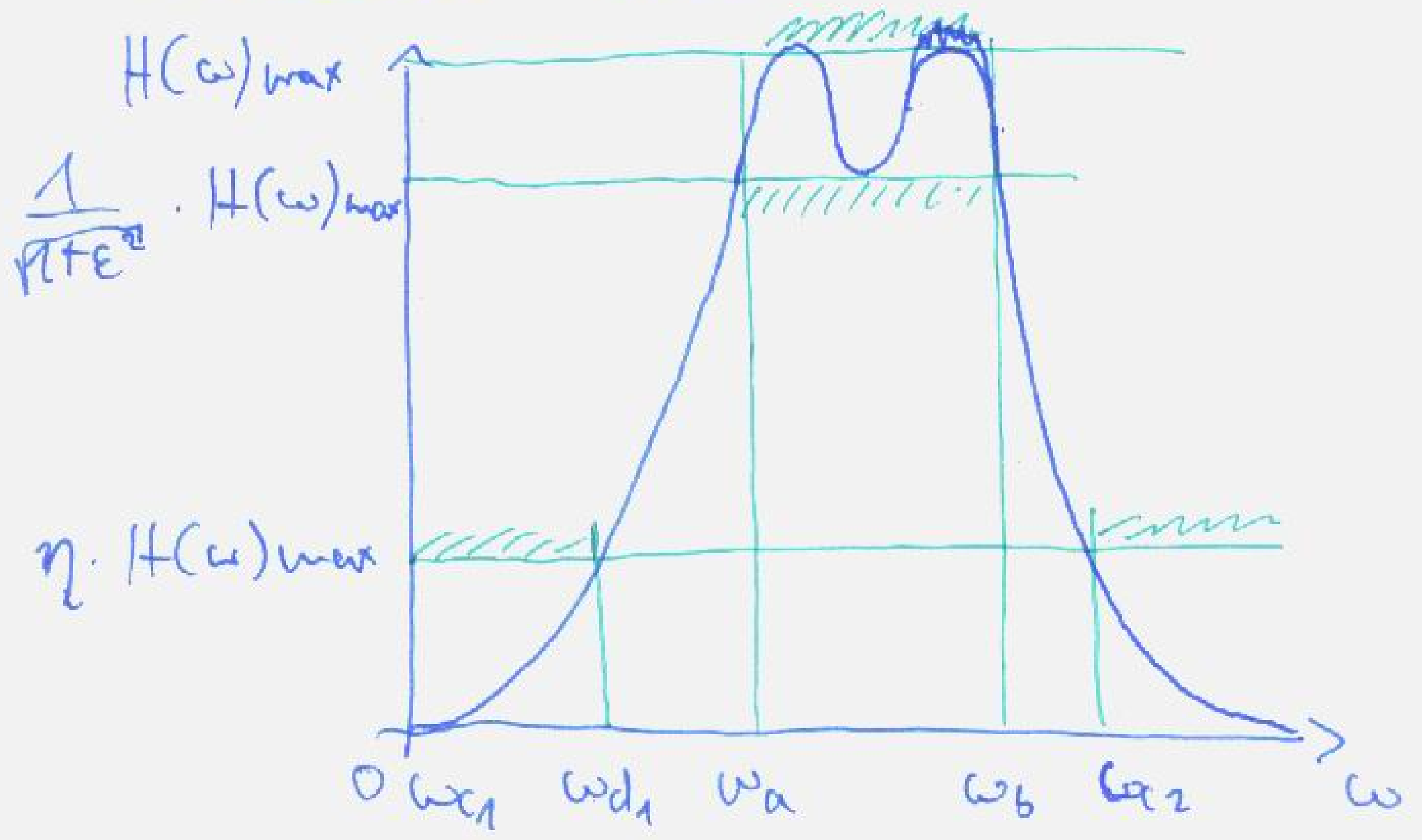
2.) Aluláteresztő szűrő:



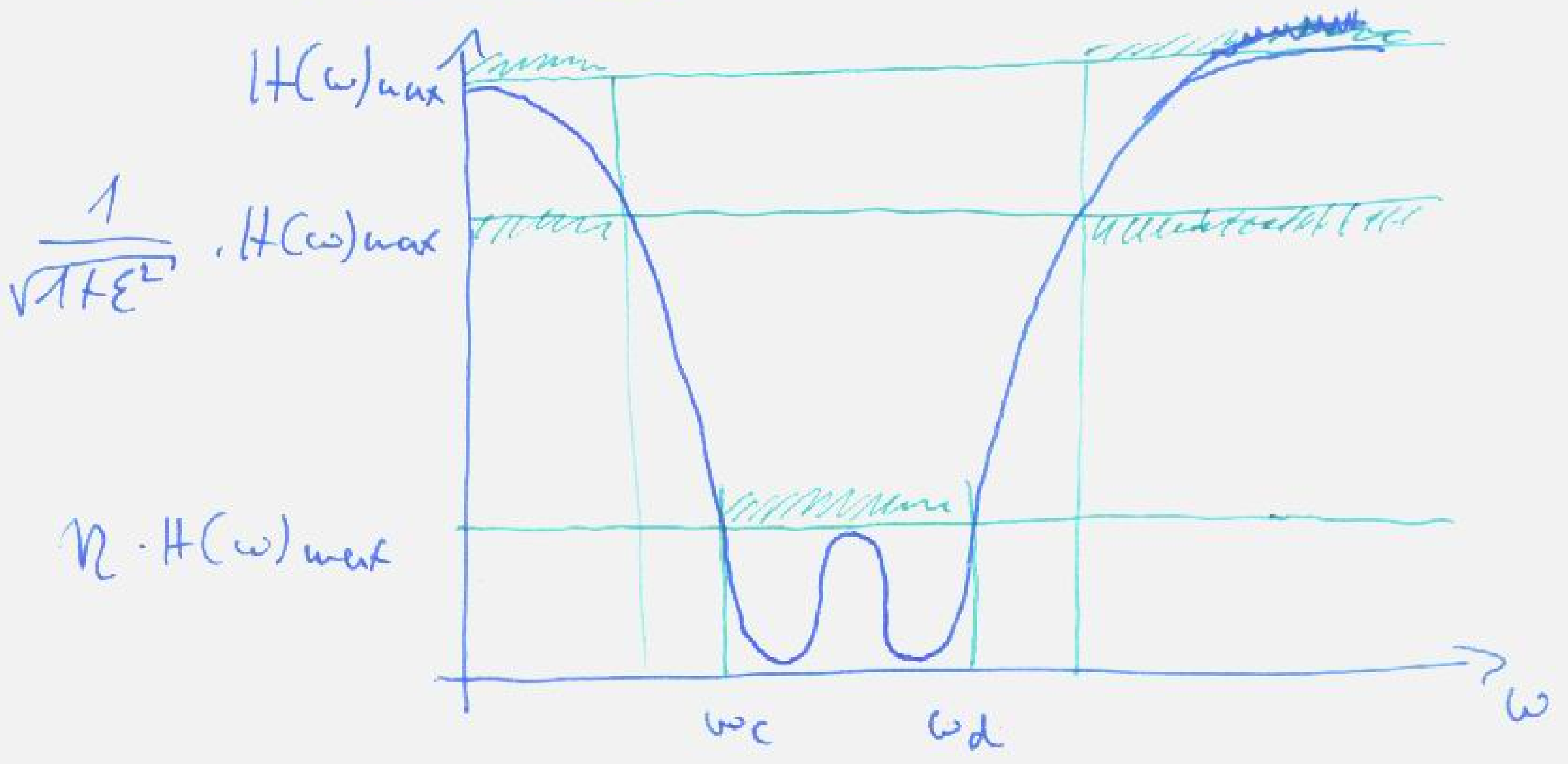
3.) Felüláteresztő szűrő



4.) Sáváteresztő



5.) Sávzáró



6.) A jel sávszélessége

- A jel sávszélessége az a frekvenciasáv, amelyen kívül a spektruma elhanyagolható.

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 \text{, ahol } |X(i\omega)| < \varepsilon |X(i\omega)|_{max} \text{, } 0 < \omega < \omega_1 \text{ ; } \omega_2 < \infty \text{, } 0 < \varepsilon < 1$$

- Ha $|X(i\omega)|$ nem monoton 0 hoz tart, akkor érdemes a burkolóját tekinteni.

7.) Alakhű átvitel

- $u(t)$ gerjesztésű lineáris, invariáns, kauzális, stabilis rendszerre.
- ideális alakhű átvitel: $y_0(t) = C \cdot u(t-T)$; $C > 0$; $T \geq 0$ -> ha $h_0(t) = C \cdot \delta(t-T)$
- az átviteli karakterisztika: $H_0(i\omega) = C \cdot e^{-i\omega T}$; $C > 0$; $T \geq 0$
- $|H_0(i\omega)| \sim$ állandó, $\mathrm{arc}\, H_0(i\omega) \sim$ lineáris
- Az alakhű jelátvitel akkor biztosított, ha az átviteli karakterisztika sávszélességébe belefér az átvivendő jel sávszélessége.

-> Rendszer sávszélessége: amelyen belül a rendszer $|H(i\omega)| \sim$ állandó és $\mathrm{arc}\, H(i\omega) \sim$ lineáris

-> Gerjesztőjel sávszélessége: az a frekvenciasáv, amelyen kívül a gerjesztőjel spektruma elhanyagolható.

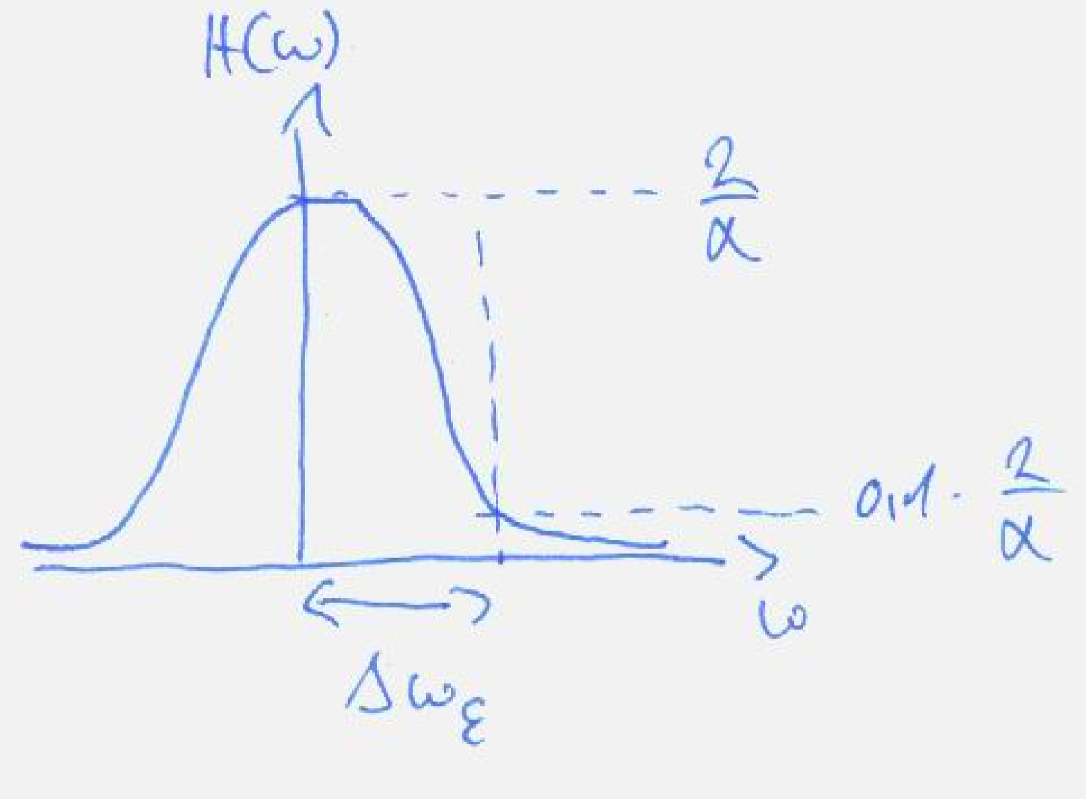
-> Az időfüggvény szélessége: az időfüggvény lényeges részének a szélessége (pl $\frac{1}{100}$-adán belül)

-> Spektrum szélessége: az a frekvencia intervallum, mely az amplitúdó spektrum lényeges részét tartalmazza

-> Időbeli szélesség · spektrum szélesség = állandó

-> Időfüggvény sávszélessége: = a spektrumának szélessége

$\Delta\omega = \Delta\omega_\varepsilon$

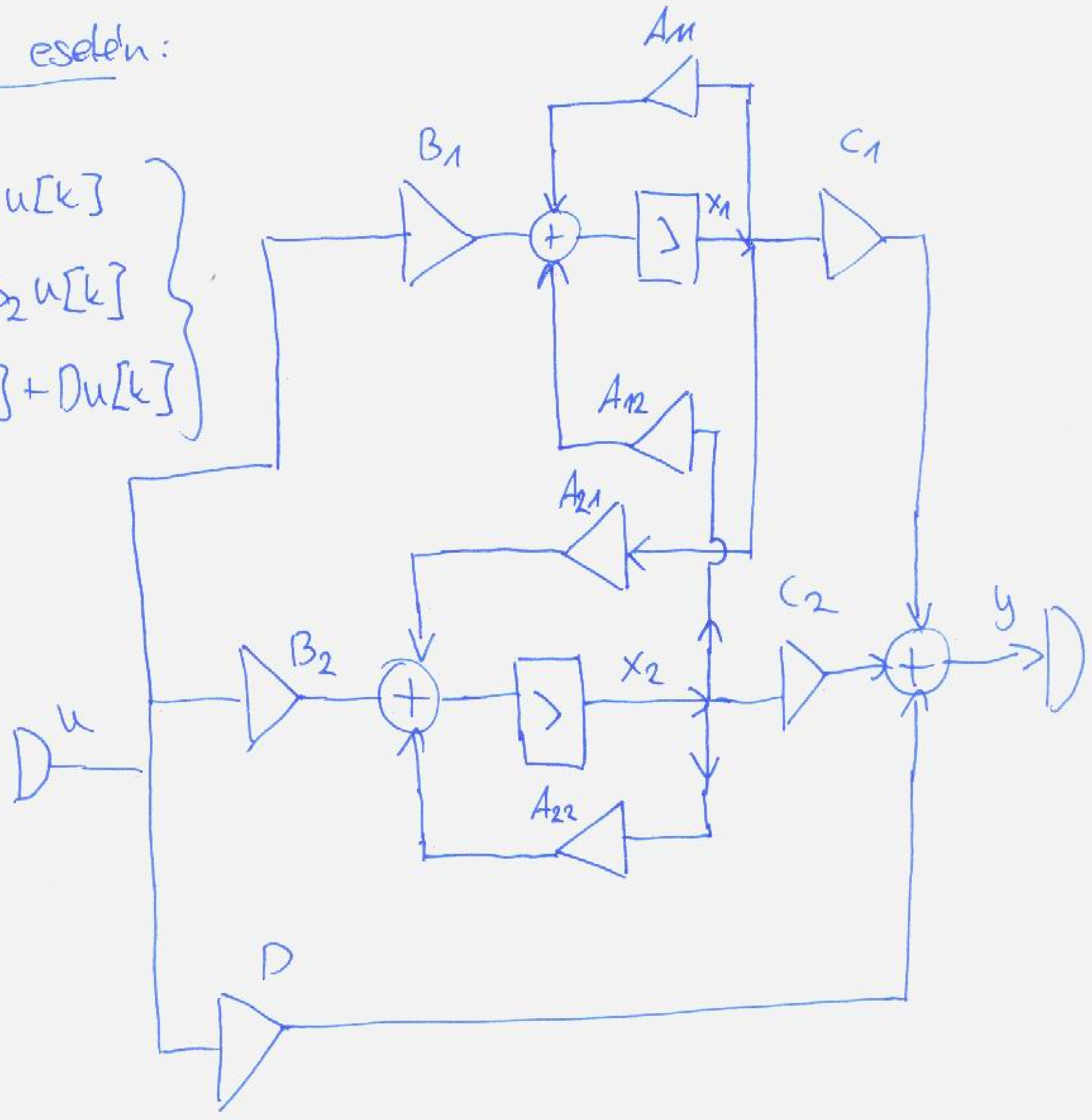


H11. Hogyan rendelhető jelfolyam típusú, diszkrét idejű hálózat az adott állapotváltozós leíráshoz, rendszer-egyenlethez vagy átviteli függvényhez? Mi az oka annak, hogy e feladatok megoldása Kirchoff-típusú hálózattal bonyolultabb?

Kanonikus realizáció: a lehető legkevesebb számú késleltetőt tartalmazó realizáció

Állapotváltozós leíráshoz $N=2$ esetén:

$$\left.\begin{aligned} x_1[k+1] &= A_{11}x_1[k] + A_{12}x_2[k] + B_1u[k] \\ x_2[k+1] &= A_{21}x_1[k] + A_{22}x_2[k] + B_2u[k] \\ y[k] &= C_1x_1[k] + C_2x_2[k] + Du[k] \end{aligned}\right\}$$



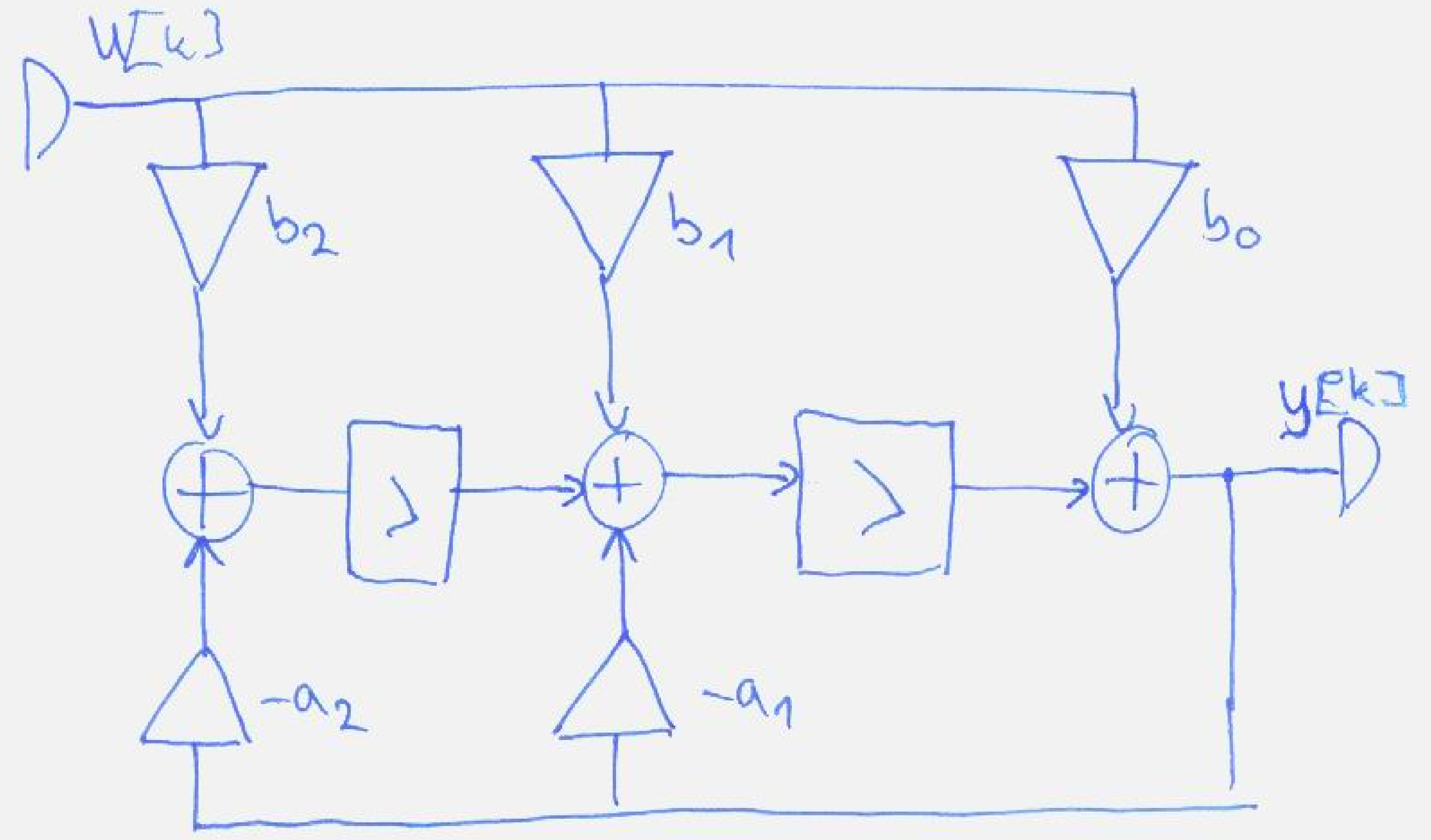
Az erősítők száma lehet kevesebb is, ha néhány együttható ∅ értékű

Rendszeregyenlethez:

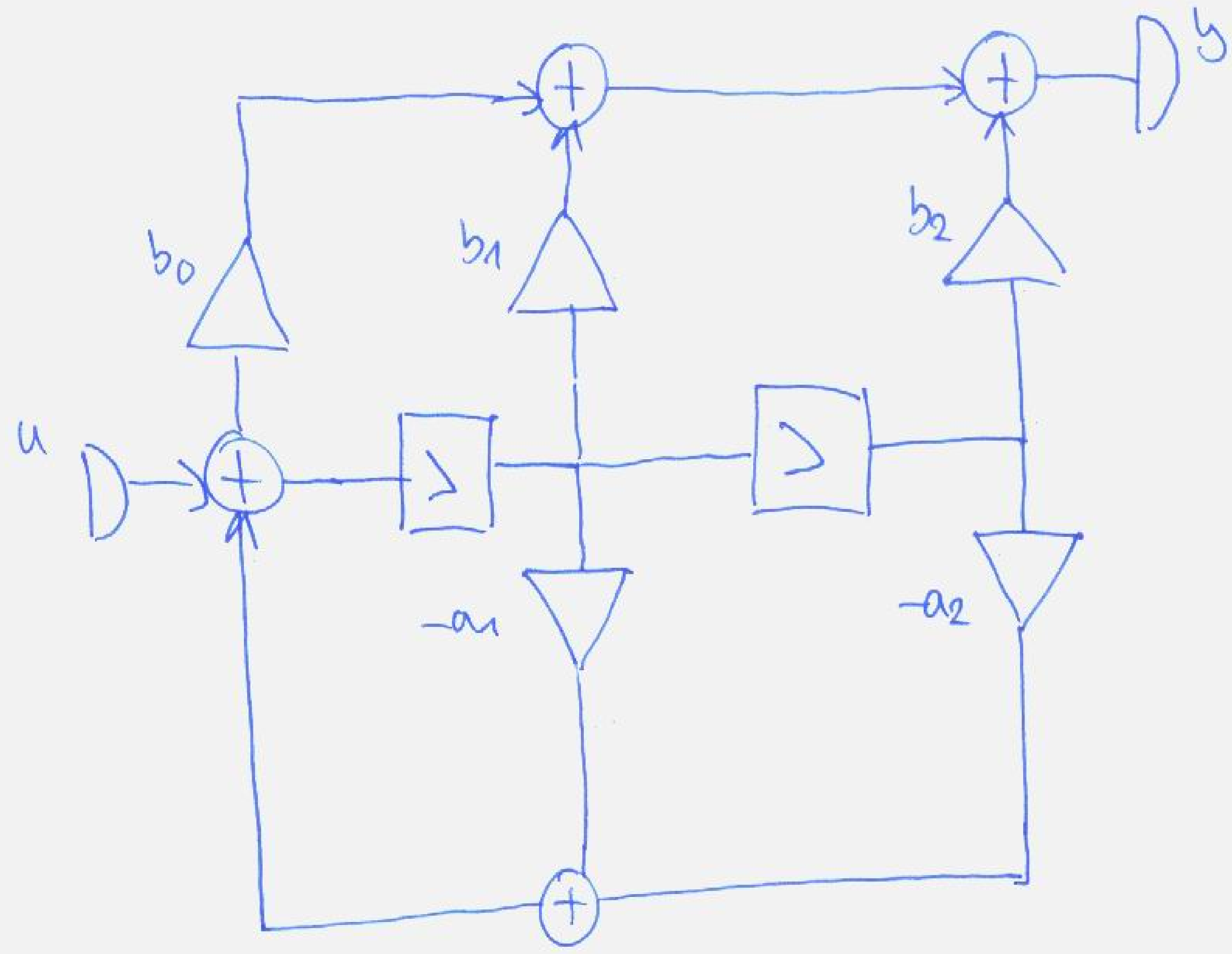
$N=2$ esetben kanonikus realizációk. Ezeket szokták direkt realizációnak nevezni.

$$y[k] = b_2u[k-2] + b_1u[k-1] + b_0u[k] - a_2y[k-2] - a_1y[k-1]$$

a)



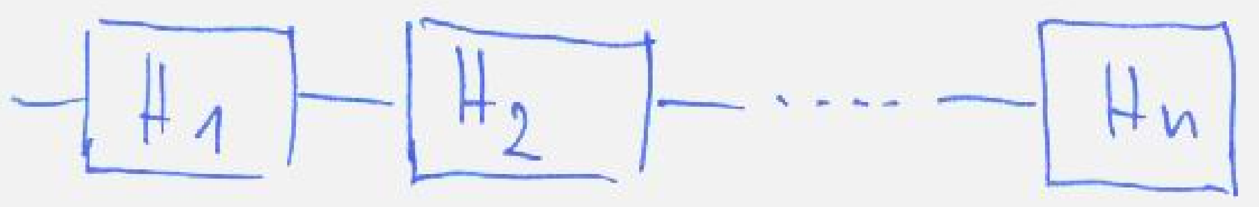
b)



Ezek a realizációk tovább bővíthetők
a) esetben balra b) esetben jobbra lehet hozzáteni az újabb tagokat.
Nagyon nagy N-ek esetén érdemes N = 1, 2, 3 direkt összekapcsolásával realizálni a hálózatot.

Átviteli függvényhez:

- A rendszeregyenlet kanonikus realizációjánál megadott két hálózatot szokás másodfokú alaptagnak nevezni. A magasabb fokszámú függvényeket ilyenek összekapcsolásával realizálják szükség esetén bevezetve egy első vagy harmadfokú alaptagot is



$H = \prod_i H_i$

- Az egyes H_i átviteli függvények a H gyöktényezős felbontásából kaphatók.
  ↳ max 2. fokú számláló
- Szorzás megvalósítása: az 1. alaptag bemeneti változója: $u[k]$. kimeneti változója a 2. alaptag bemeneti változója és így tovább

36. Ismertesse a diszkrét idejű, illetve a folytonos idejű periodikus jel előállítását Fourier sorával! Van-e lényeges különbség a két eset között? A jel mely jellemzői határozhatók meg egyszerűen Fourier soros alakjából?

I. Folytonos időben:

- Egy jel periodikus, ha $x(t) = x(t+T)$, ahol T a periódusidő
- az ω_0 alapkörfrekvencia: $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$
- ! A periodikus jelek előállíthatók olyan sin és cos függvények szuperpozíciójaként, amelyek körfrekvenciája az ω_0 alapkörfrekvencia egész számú többszöröse
- A jel N-ed rendű Fourier polinomjának általános alakja:

$$u_N(t) = U_0 + U_1^A \cdot \cos(\omega t) + U_1^B \sin(\omega t) + U_2^A \cos(2\omega t) + U_2^B \sin(2\omega t) + \dots + U_N^A \cos(N\omega t) + U_N^B \cdot \sin(N\omega t)$$

- Az együtthatók meghatározásának szempontja a négyzetes hiba minimalizálása $E_N^2 = \frac{1}{T}\int_0^T \left[u_N(t) - u(t)\right]^2 dt$
- A Fourier sor együtthatói függetlenek N-től, kiszámítási képletük:

$$U_0 = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,dt \qquad U_k^A = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\cdot\cos(k\omega t)\,dt \qquad U_k^B = \frac{2}{T}\int_0^T u(t)\cdot\sin(k\omega t)\,dt$$

$$u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty}\left(U_k^A \cdot \cos k\omega_1 t + U_k^B \cdot \sin k\omega_1 t\right)$$

Fourier sor komplex alakja:

- Egy periodikus $u(t)$ jel komplex Fourier sora: $u(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \overline{U}_k^C \cdot e^{jk\omega t}$
- Az $\overline{U}_k^C$ komplex Fourier együtthatók: $\overline{U}_k^C = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\cdot e^{-j\omega k t}\,dt$

$$U_0 = \overline{U}_0^C$$

$$U_k^A = 2\,\mathrm{Re}\,\overline{U}_k^C \qquad U_{-k}^C = \left(U_k^C\right)^*$$

$$U_k^B = -2\,\mathrm{Im}\,\overline{U}_k^C$$

Szakadásos függvény F-sora $\frac{1}{k}$-val, folytonos fgv-é legalább $\frac{1}{k^2}$-el csökken

A Fourier sor mérnöki valós alakja:

- $u(t) = U_0 + \sum_{k=1}^{\infty} U_k \cdot \cos(k\omega t + \rho_k)$

itt $U_k = 2|U_k^C|$ vagy $U_k = \sqrt{(U_k^A)^2 + (U_k^B)^2}$ és $\rho_k = \arg(U_k^C)$ vagy

$\rho_k = -\mathrm{arctg} \frac{U_k^B}{U_k^A}$

- U_0: állandó összetevő, $U_1 \cos(\omega t + \rho_1)$ alapharmonikus, a maradék a felharmonikus

(*)

II. Diszkrét időben:

- periodikus jel: $x[k] = x[k+K]$ K: ütemperiódus

- a Fourier sor valós alakja: $x[k] = \sum_{i=0}^{K/2} X_i^A \cdot \cos(i\vartheta_1 k) + X_i^B \sin(i\vartheta_1 k)$

$\vartheta_1 = \frac{2\pi}{K}$ alapharmonikus körfrekvencia

↳ A Fourier sorak összesen K db valós együtthatója van (X_i^A és X_i^B)

X_i^A: $\frac{K}{2}+1$ db X_i^B: $\frac{K}{2}-1$ db

- a Fourier sor komplex alakja:

∘ $x[k] = \sum_{-\frac{K}{2}+1}^{\frac{K}{2}} \overline{X}_i \cdot e^{ji\vartheta_1 k}$ ezt eltolva: $x[k] = \sum_{i=0}^{K-1} \overline{X}_i \cdot e^{ji\vartheta_1 k}$ $\vartheta_1 = \frac{2\pi}{K}$

és $\overline{X}_i = \frac{1}{K} \cdot \sum_{k=0}^{K-1} e^{-ji\vartheta_1 k} \cdot x[k]$

$\overline{X}_0$ a jel középértéke, $\overline{X}_1 \cdot e^{ji\vartheta k}$ az alapharmonikus, a többiek a felharmonikusok

∘ A valós alak együtthatói:

$$\overline{X}_0^A = \overline{X}_0 \; ; \; \underbrace{\overline{X}_i^A = 2\,\mathrm{Re}\{\overline{X}_i\} \quad \overline{X}_i^B = -2\,\mathrm{Im}\{\overline{X}_i\}}_{0 < i < \frac{K}{2}} \; ; \; \overline{X}_{\frac{K}{2}}^A = \overline{X}_{\frac{K}{2}}$$

→ A diszkrét és folytonos idejű F sor között az a különbség, hogy a folytonos idejű F-sor csak közelítőleg, a diszkrét idejű F sor pontosan előállítja a jelet

végtelen sok tagból áll, csak közelíteni tudjuk

véges tagból áll

(*): Jellemző adatok: U_0 középérték

- effektív érték: $U = \sqrt{U_0^2 + \frac{U_1^2}{2} + \frac{U_2^2}{2} + \dots}$

- hatásos teljesítmény: $P = U_0 I_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \cos(\rho_{U_k} - \varphi_{I_k}) \frac{U_k I_k}{2}$

(31.) Ismertesse a diszkrét idejű és a folytonos idejű jelek időtartománybeli leírásának módjait, a rendszerelméletben előforduló legfontosabb jeleket (egységugrás, Dirac impulzus) és a jeleken végzett legfontosabb lineáris műveleteket (összeadás, állandóval szorzás, eltolás, differenciálás)! Adjon a jelekre néhány osztályozási szempontot (pl periodikus, páros, belépő stb)!

I. Folytonos rendszer

1. Vizsgáló jelek módszere:

a) Lényeg: A válasz meghatározása az adott gerjesztéshez
-> eddig állapotváltozós leírás segítségével
-> de ezt gyakran nehéz előállítani

- E helyett: lehetőség van egy konkrét gerjesztéshez (nevezzük ezt vizsgálójelnek) tartozó válasz meghatározására.

  ↳ ennek ismeretében az adott gerjesztéshez tartozó válasz meghatározására

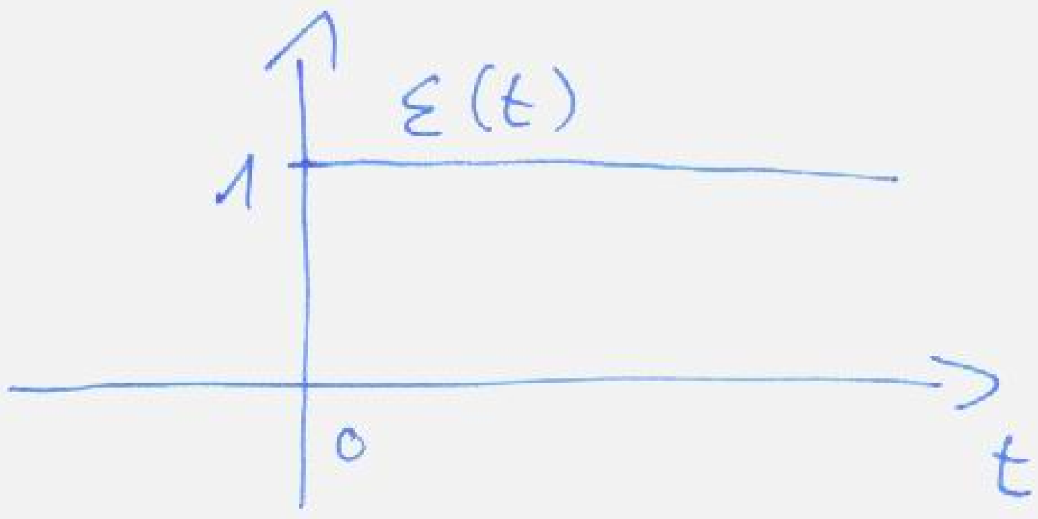
b) Célszerű megválasztás:
- olyan $u_0(t)$ vizsgálójelet érdemes használni, amelyhez ismerjük a hozzá tartozó $y_0(t)$-t. Így tetszőleges $u(t)$ gerjesztéshez tartozó $y(t)$ megadható
- előnye: $y_0(t)$ egyszerűen számolható, mérhető, ábrázolható.
- a fenti megfontolások lineáris invariáns $1u(t) \to 1y(t)$ rendszerekre vonatkozik (általánosítás: szuperpozícióval)

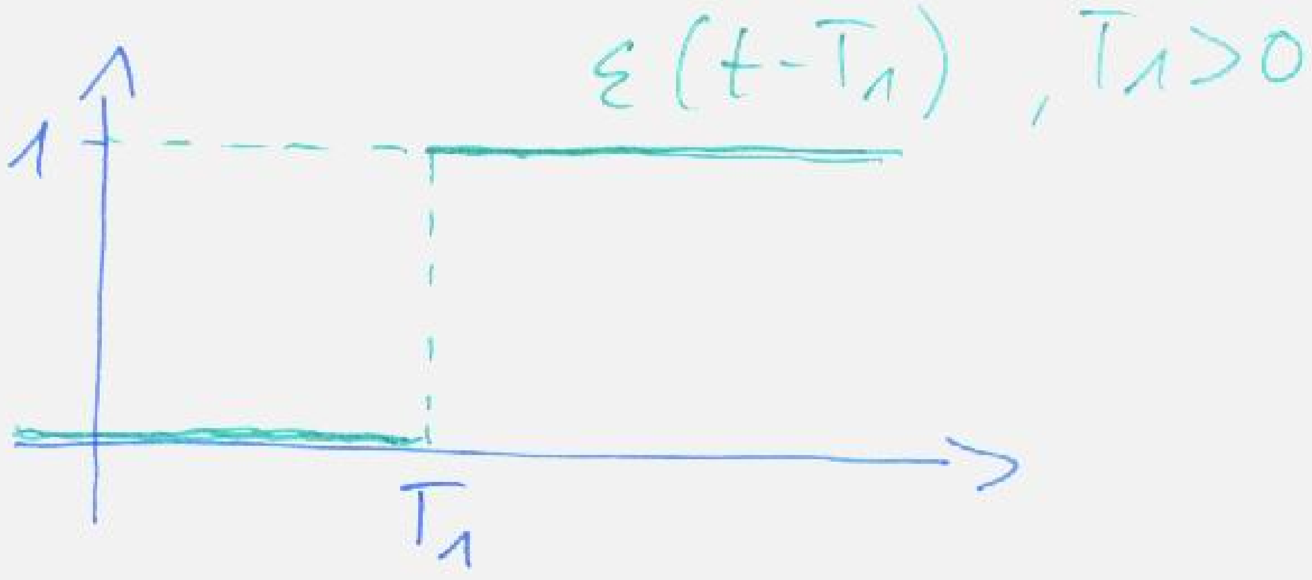
2. Vizsgáló jelek:

a) Egységugrás - $\varepsilon(t)$

-> Definíció: $\varepsilon(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } -\infty < t < 0 \\ 1 & \text{ha } 0 < t < \infty \end{cases}$

-> Ábra:





→ $t=\emptyset$ beli érték: elvileg tetszőleges, de szokás: $\varepsilon(\emptyset)=\frac{1}{2}$ ill $\varepsilon(\emptyset)=1$

→ Felhasználás:

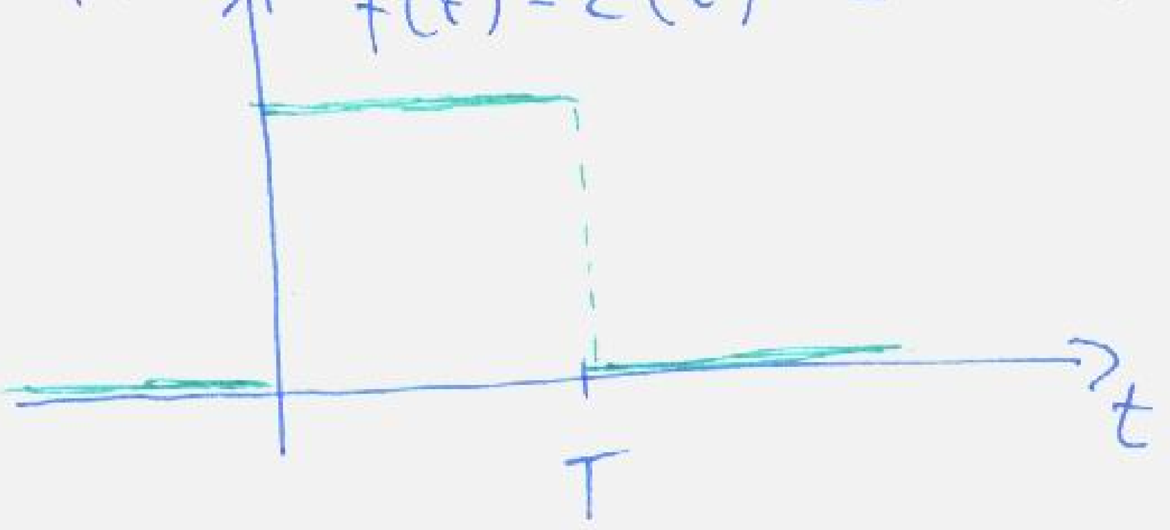
– belépő jelek előállítása: $f(t)=\varepsilon(t-t_0)\cdot\varphi(t)=\begin{cases}0 & \text{ha } -\infty<t<t_0\\ \varphi(t) & \text{ha } t_0<t<\infty\end{cases}$

– ablakozó jelek előállítása:

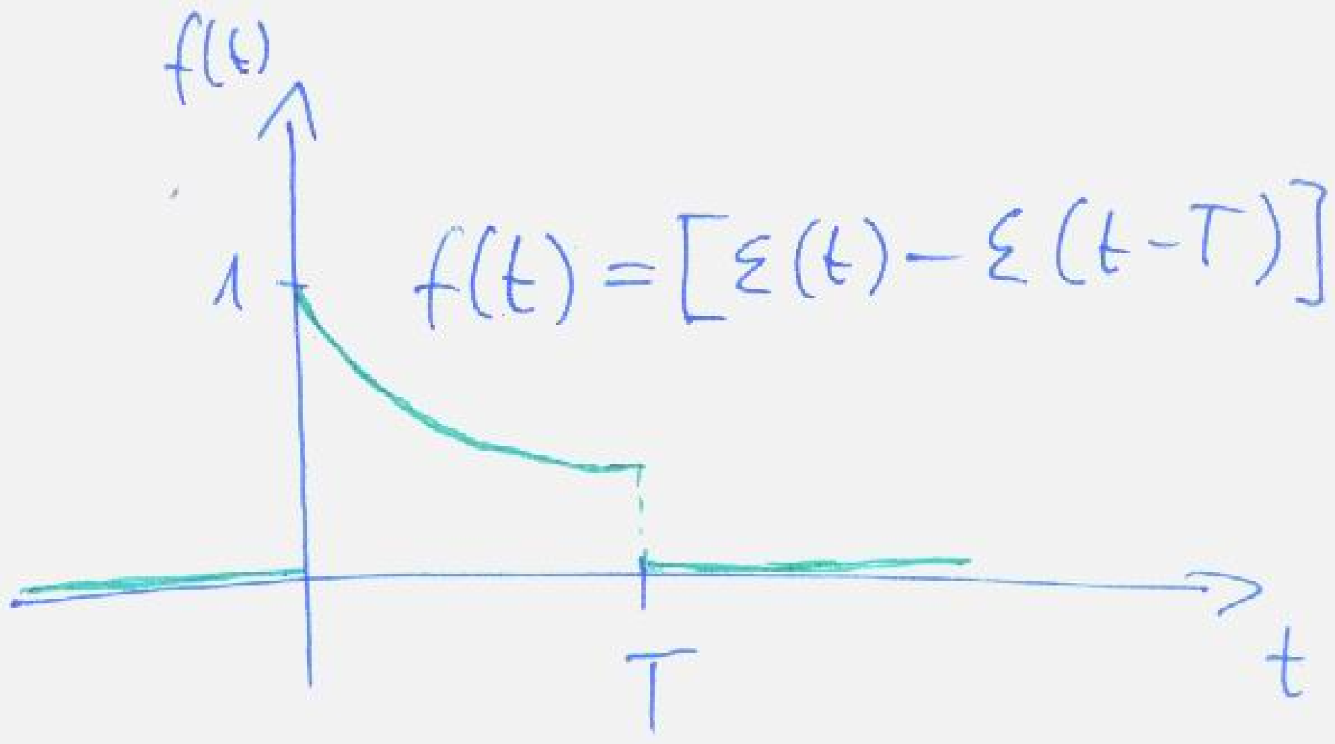
Pl: $f(t)=\left[\varepsilon(t-t_k)-\varepsilon(t-t_{k+1})\right]\varphi(t)=\begin{cases}\varphi(t) & \text{ha } t_k<t<t_{k+1}\\ \emptyset & \text{egyébként}\end{cases}$

→ Néhány függvény:

$f(t)=\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T)$

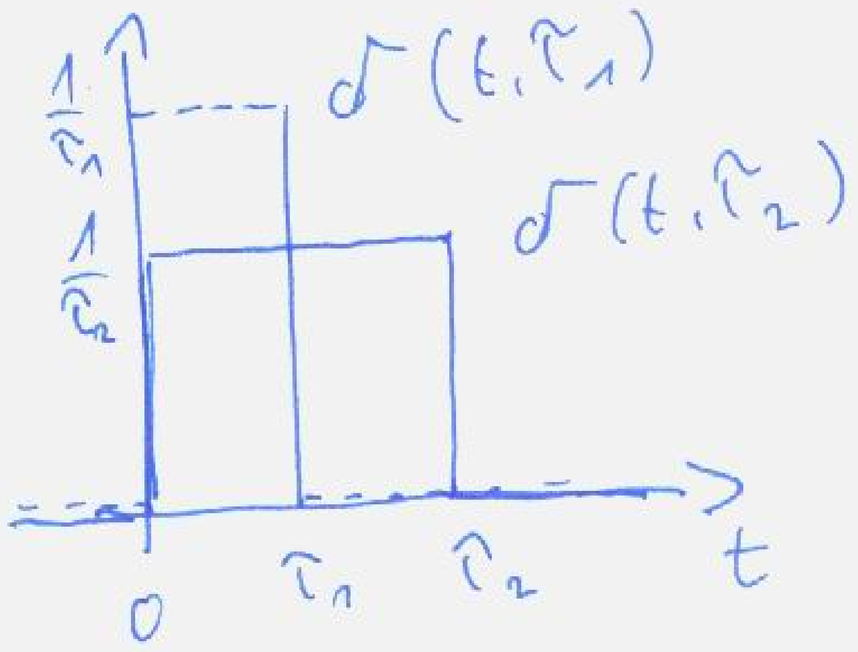


$f(t)=\left[\varepsilon(t)-\varepsilon(t-T)\right]\cdot e^{-\alpha t}$



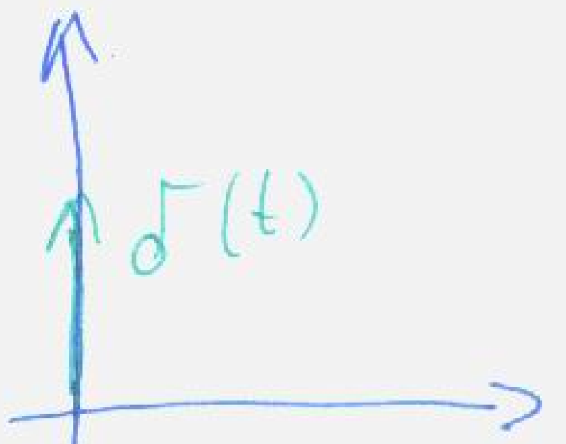
b) Egység impulzus (Dirac impulzus)

→ Definíció: elhanyagolható hosszú és egységnyi intenzitású impulzus



$\xrightarrow{\tau_1\to\emptyset}$

de a terület =
= áll = 1



Egységimpulzus:
∞ magas
∞ keskeny

$$\delta(t)\approx\frac{\varepsilon(t)-\varepsilon(t-\tau)}{\tau},\quad \tau\ll\tau_0$$

ahol τ_0 a vizsgált jelenségre jellemző legkisebb idő (időállandó)

$$\boxed{\delta(t)=\lim_{\tau\to 0}\delta(t,\tau)}$$

– Dirac impulzus: általánosított fv-el értelmezett

→ Tételek

(1) $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,d\tau=1$

(2) $\int_{-\infty}^{t}\delta(t)\,d\tau=\varepsilon(t)=\begin{cases}0 & \text{ha } t<0\\ 1 & \text{ha } t>0\end{cases}$ és $\varepsilon'(t)=\delta(t)$ (általánosított derivált)

(3) $\int_{-\infty}^{\infty}\delta(t)\,f(t)\,dt=f(\emptyset)$ (hasonlóan $\delta(t-t_0)$-ra)

→ **Általános derivált**: – szakadásban is értelmezve van a derivált:

$: f(t) = \int_{-\infty}^{t} f'(x)\,dx$ ahol $\lim_{t \to -\infty} f(t) = \emptyset$

– ez jogosít fel az $\varepsilon'(t) = \delta(t)$ formális használataira

3.) Vizsgáló jelek alkalmazása:

a) $\delta(t) \sim h(t)$

$u_0(t) = \delta(t) \to y_0(t) = h(t)$

Általános gerjesztésre adott válasz:

$$\boxed{y(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau \quad \text{: konv. tétel}}$$

→ belépő: $y(t) = \int_{0}^{\infty} u(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$

→ belépő + kauzális: $y(t) = \int_{0}^{t} u(\tau)\, h(t-\tau)\, d\tau$ mivel $h(t-\tau) = 0$

↳ ha $t - \tau < 0$

$\tau > t$

b) tetszőleges gerjesztésre adott válasz $g(t)$-vel:

$g(t) = \varepsilon(t) \cdot v(t) \to h(t) = \delta(t)\, v(t_0) + \varepsilon(t)\, v'(t)$

konvolúció tételből kiindulva:

Duhamel tétel: $\boxed{y(t) = v(t_0)\, u(t) + \int_{0}^{t} u(\tau)\, v'(t-\tau)\, dt}$

II. Diszkrét rendszer:

1.) Diszkrét idejű jelek

$x = x[k]$, $k \in \mathbb{Z}$ $\quad k = \dots -2, -1, 0, 1, 2 \dots$

→ exponenciális

$$x[k] = \begin{cases} 0 & k \in \mathbb{Z}^- \to \text{negatív egészek} \\ a^k & k \in \mathbb{N} \to \text{természetes} \end{cases}$$

→ trigonometrikus:

$x[k] = \cos \vartheta k \quad k \in \mathbb{Z}$ → periodikus, ha $\vartheta = \frac{2\pi M}{L}$: $M \in \mathbb{Z}$

L – diszkrét per. idő

↘ nem periodikus

pl: $\vartheta = \frac{4\pi}{3}$ periodikus

$\vartheta = 2$ nem periodikus

→ lineáris

$x[k] = k \quad k \in \mathbb{Z}$

2.) Egység impulzus és Egységugrás (vizsgálójelek itt is)

a) $\delta[k]$

Definíció : $\delta[k] = \begin{cases} 0 & k \in Z^+ \\ 1 & k = 0 \\ 0 & k \in Z \end{cases}$, hasonlóan $\delta[k-1] = \begin{cases} 1 & k = i \\ \emptyset & k \neq i \end{cases}$ $k, i \in \mathbb{Z}$

$\delta[k]$ analóg $\delta(t)$-vel, de $\delta[k]$ közönséges diszkr. idejű fgv.

Ábra: feljebb

Tétel: minden jelre : $x[k] = \sum_{i=-\infty}^{\infty} x[i]\,\delta[k-i]$

b) Egységugrás - $\varepsilon[k]$

Definíció : $\varepsilon[k] = \begin{cases} 0 & \text{ha } k \in Z^- \\ 1 & \text{ha } k \in N \end{cases}$; $\varepsilon[k-i] = \begin{cases} 0 & k \leq i-1 \\ 1 & k \geq i \end{cases}$

Ábra: megvolt

Felhasználás: - belépő jelekre : $\varepsilon[k]\,g[k] = \begin{cases} 0 & \text{ha } k \in Z^- \\ g[k] & \text{ha } k \in N \end{cases}$

- ablakozó jel megadása: úgy mint feljebb

c) diszkrét konvolúció : $y[k] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} u[n]\,h[k-n] = u[k] * h[k]$

$\left.\begin{array}{l} \text{-belépő} \\ \text{-kauzális} \end{array}\right\}$ úgy, mint folytonosra

III. Lineáris műveletek:

1) Összeadás: $x[k] + y[k] = z[k]$ ha $x[k_0] + y[k_0] = z[k_0]$ $\forall\, k_0 \in \mathbb{Z}$-re

2) Szorzás : $K \cdot x[k] = y[k]$ ha $K \cdot x[k_0] = y[k_0]$ $\forall\, k_0 \in \mathbb{Z}$-re

3) Eltolás : $y[k] = x[k-k_0]$ ha minden $k_0 \in \mathbb{Z}$-re igaz

(1)–(3): folytonos esetben hasonlóan

4) Deriválás: - diszkrét: nincsen!
- folytonos: $y(t) = x'(t)$, ha $y(t)$-t integrálva $x(t)$ előállítható.

IV. Jelek osztályozása:

1) Periodikus : - $x[k] = x[k+K]$ minden $k \in Z$ ahol K egész!
- $x(t) = x(t+T)$ minden t-re

2) Páros - páratlan: $x[k] = x[-k]$ minden $k \in Z$-re ; $x[k] = -x[-k]$ $\forall\, k \in Z$-re
$x(t) = x(-t)$ minden t-re ; $x(t) = -x(-t)$ $\forall\, t$-re

3) Belépő :

$x[k] = \begin{cases} \emptyset & k \in \mathbb{Z}^- \\ x[k] & k \in N \end{cases}$ $x(t) = \begin{cases} 0 & \text{ha } -\infty < t < \emptyset \\ x(t) & \text{ha } 0 < t < \infty \end{cases}$

(K14) Ismertesse a nemlineáris dinamikus Kirchoff típusú hálózat állapotváltozós leírásának elvét és kanonikus alakját! Mutasson közelítő módszereket az állapot-egyenlet megoldására (pl az előrelépő Euler módszer)! Illusztrálja 1 egyszerű példán!

---

1. Hálózati komponensek:

- A variáns nemlineáris, dinamikus hálózatok a lineáris és a nem lineáris (nem dinamikus) komponenseken kívül nemlineáris variáns dinamikus komponenseket is tartalmaznak:
  - -> ezek leírásához új mennyiségeket kell bevezetni: -> q töltés, -> ψ fluxus

a) nemlineáris kondenzátor:

- új mennyiség bevezetése: $q \to i_C = \frac{dq}{dt} = C \cdot \frac{du}{dt}$ $(q = C \cdot u)$
- karakterisztikája: $u(q)$ vagy $q(u)$ kapcsolat: $q = Q(u,t)$, $u = U(q,t)$
- mit modellez?: speciális szigetelőanyaggal elválasztott elektródapár modellje

b) nemlineáris tekercs:

- új mennyiség bevezetése: $\psi \to u_L = \frac{d\psi}{dt}$
- karakterisztika: $\psi = \Psi(i,t)$, $u = \frac{d\psi}{dt} = L \cdot \frac{di}{dt}$
  $\psi = L \cdot i$

- ha a), b) invariánsak, akkor nincs t-től való függés.

c) másik leírás nemlineáris, invariáns kondenzátorokra és tekercsekre:

-> kondenzátor: $i_C(t) = \frac{dq(t)}{dt} = \frac{dQ(u)}{du} \cdot \frac{du(t)}{dt}$

-> a karakterisztikák: $i = C \cdot u'$, ahol $C = C(u)$ a dinamikus kapacitás: $\boxed{C_{din} = \frac{dq}{du}\Big|_{\text{munkapont}}}$

-> tekercs: $u(t) = \frac{d\psi}{dt} = \frac{d\Psi(i)}{di} \cdot \frac{di(t)}{dt}$

-> a karakterisztikák: $u = L \cdot i'$, $L = L(i)$

$$\boxed{L_{din} = L(i) = \frac{d\psi}{di}\Big|_{\tilde{Q}}}$$

2. Az állapotváltozós leírás előállítása:

a) Kanonikus változók

- állapotváltozók:
  - nemlineáris tekercs fluxusa: ψ
  - nemlineáris kondenzátor töltése: q
  - lineáris tekercs árama: i_L
  - lineáris kondenzátor feszültsége: u_C
- dinamikus segédváltozók:
  - nemlineáris tekercs árama
  - nemlineáris kondenzátor feszültsége
- rezisztív segédváltozók:
  - nemlineáris ellenállás feszültsége és árama

b) Állapotváltozós leírás elve:

- Az állapotváltozók összességét $\underline{x} = \underline{x}(t)$ vektorokba foglaljuk
- Csoportosítva:

$$\left.\begin{array}{l} \underline{x}_a = \begin{bmatrix} u_C \\ i_L \end{bmatrix} \to \text{lineáris állapotváltozók} \\ \underline{x}_b = \begin{bmatrix} q \\ \psi \end{bmatrix} \to \text{nemlineáris áll. vált.} \end{array}\right\} \underline{x} = \begin{bmatrix} \underline{x}_a \\ \underline{x}_b \end{bmatrix}$$

- az állapotváltozós leírás normálalakja:

$$\left.\begin{array}{l} \to \underline{x}(t): \text{állapotvektor} \\ \to \underline{u}(t): \text{gerjesztésvektor} \\ \to \underline{y}(t): \text{válaszvektor} \end{array}\right\} \text{a normál alakban ezek szerepelnek.}$$

- A normál alak esetén a továbbiakban is ~~az~~ a cél:

$$\text{norm. alak} \left\{\begin{array}{l} \to \underset{\text{derivált}}{\underline{x}'} = \text{kifejezve } \underline{x} \text{ és } \underline{u} \text{ elemekkel} \\ \to \underline{y} = \text{— ıı —} \end{array}\right.$$

- De! A nemlineáris komponensek miatt ezek az egyenletek nemlineárisak. Ezért $\underline{x}'$ és $\underline{y}$ nemlineáris vektorfüggvénye $\underline{x}$-nek és $\underline{u}$-nak.

- $\underline{x}' = F(\underline{x}, \underline{u}, t) \qquad \underline{y} = G(\underline{x}, \underline{u}, t)$

- Matematikailag a gerjesztéseket nem tekintjük változóknak:

$$\text{matematikai normál alak} \left\{\begin{array}{l} \underline{x}' = \underline{f}(\underline{x}, t) \\ \underline{y} = \underline{g}(\underline{x}, t) \end{array}\right.$$

ahol $\underline{f}$ és $\underline{g}$ egy-egy ismert nem lineáris vektor függvény.

- Probléma: $\underline{F}$ és $\underline{G}$ illetve $\underline{f}$ és $\underline{g}$ függvények előállítása csak kivételes esetekben lehetséges
- Ezért az állapotváltozós leírást segédváltozókkal ki kell bővíteni, és ezt már lineáris műveletekkel meg lehet adni.

3. Az állapotváltozós leírás ~~kan~~ kanonikus alakja:

- Előbbi $\underline{x}_a$ és $\underline{x}_b$ vektorokkal bevezetjük: $\underline{w} = \begin{bmatrix} \underline{u}_q \\ \underline{i}_\Psi \end{bmatrix}$ $\begin{matrix} \to \text{nemlin. kond. fesz.} \\ \to \text{nemlin. tek. árama} \end{matrix}$ } dinamikus segédváltozók
- bevezetjük még $\underline{u}_N$, $\underline{i}_N$ rezisztív segédváltozókat is
- Cél: felírni a hálózati egyenleteket (ezek lineárisak) és a karakterisztikákat (ezek nemlineáris egyenletek)
- küszöböljük ki a
  - lineáris ~~tekercs~~ tekercs feszültségét
  - lineáris kondenzátor áramát
  - lineáris ellenállások feszültségét és áramát.
- a megmaradó lineáris egyenletekből fejezzük ki az N számú állapotváltozó deriváltját. Ezután marad még N_N számú (nemlineáris kétpólusok száma) számú lineáris egyenlet, amelyek az állapotváltozó deriváltját nem tartalmazzák.
- Eljárás lényege: nemlineáris karakterisztikákat nem használjuk fel, megtartjuk megadott alakjukban.
- A kanonikus változókra vonatkozó egyenletek:

(1) Az állapotváltozók idő szerinti deriváltjának kifejezése (N db egyenlet)

$$\boxed{\underline{x}' = \underline{K}_{xa} \cdot \underline{x}_a + \underline{K}_{xw} \cdot \underline{w} + \underline{K}_{xu} \underline{u}_N + \underline{K}_{xi} \cdot \underline{i}_N + \underline{K}_{xs} \cdot \underline{u}}$$

(2) Az N_N számú nemlineáris ellenállás feszültségére és áramára vonatkozó N_N db hálózategyenlet.

$$\boxed{\underline{K}_{Na} \underline{x}_a + \underline{K}_{Nw} \underline{w} + \underline{K}_{Nu} \cdot \underline{u}_N + \underline{K}_{Ni} \underline{i}_N + \underline{K}_{Ns} \cdot \underline{u} = \emptyset}$$

(3) N_N darab nemlineáris karakterisztika:

$$\boxed{\underline{F}_N(\underline{u}_N, \underline{i}_N) = \emptyset}$$

(4) N_w db egyenlet: nemlineáris variáns kondenzátor és tekercs karakterisztikái

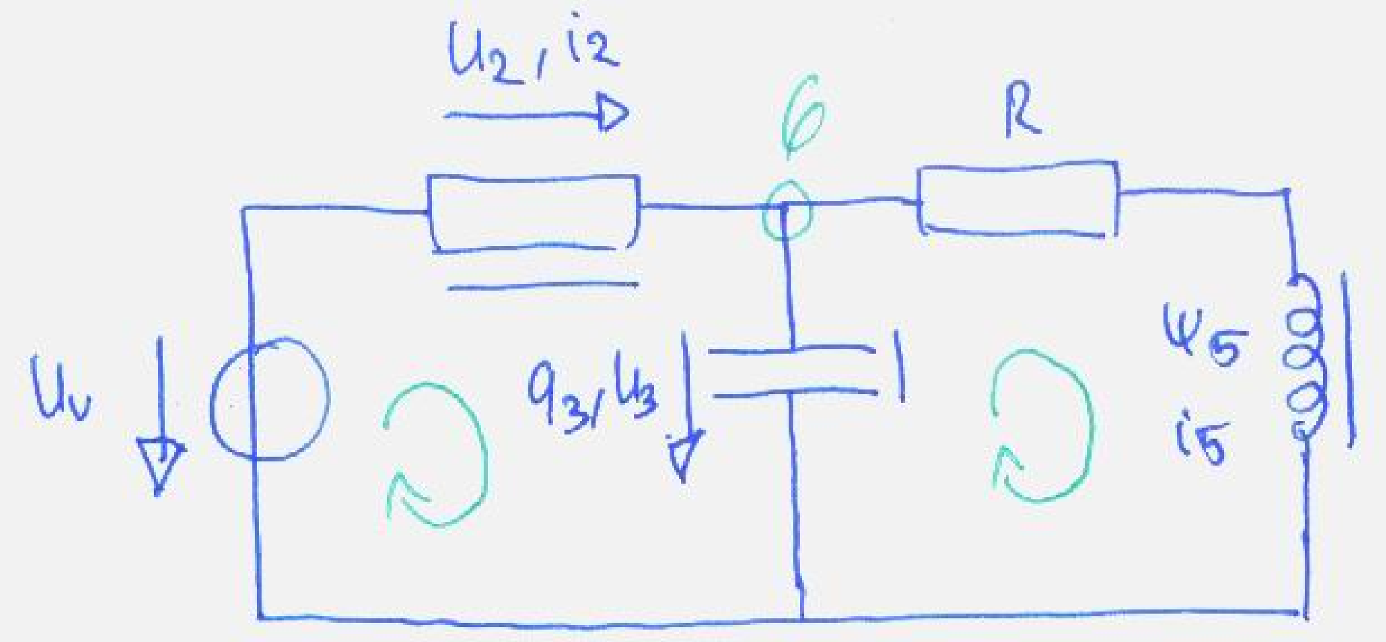
$$\boxed{\underline{F}_w(\underline{x}_w, \underline{w}) = \emptyset} \qquad \underline{F}_q(\underline{q}, \underline{u}_q) = \emptyset, \quad \underline{F}_\Psi(\underline{\Psi}, \underline{i}_\Psi) = \emptyset$$

(5) A válasz:

$$\boxed{\underline{y} = \underline{K}_{ya} \underline{x}_a + \underline{K}_{yw} \underline{w} + \underline{K}_{yu} \underline{u}_N + \underline{K}_{yi} \cdot \underline{i}_N + \underline{K}_{ys} \cdot \underline{u}}$$

— A kanonikus egyenletek többféleképpen is felírhatók

4. Példa :



megadva : $q_3(-0)=0$

$\Psi_5(-0)=0$

Kell : kanonikus egyenletek :

$u_2(i_2)$, $q_3(u_3)$, $\Psi_5(i_5)$

állapotváltozók : q_3, Ψ_5, u_3, i_5; segéd változók: u_2, i_2 } 6 ismeretlen → kell 6 db egyenlet, de ebből 3 már adott.

3 egyenlet :

$$\begin{cases} u_2 + u_3 - u_v = 0 \\ -u_3 + R i_5 + \dfrac{d\Psi_5}{dt} = 0 \\ -i_2 + \dfrac{dq_3}{dt} + i_5 = 0 \end{cases}$$

$u_2(i_2)$

$q_3(i_3)$

$\Psi_5(i_5)$

6 db egyenlet

↳ kanonikus egyenletek

↳ ha a deriváltakat kifejezzük, akkor megkapjuk az állapotváltozós leírás normál alakját

5. Közelítő módszerek

a) Munkaponti linearizálás (k12)

b) Tartomány linearizálás (k13)

c) numerikus megoldási módszerek

- a megoldás hibája tetszőlegesen kicsivé tehető
- cél a megoldás értékének számítása $0 < t_1 < t_2 < \ldots$ időpontokban
- feltételezzük : ismert a hálózat állapotegyenletének normál alakja és a kezdeti értékek adottak

→ Előre lépő Euler : Taylor sor elsőrendű közelítése

$$- \quad \underline{x}_{r+1} = \underline{x}_r + h_r \cdot \underbrace{f(\underline{x}_r, t_r)}_{\dot{x}(t_r)}$$

$r = 0,1,2\ldots$ $t_{r+1} = t_r + h_r$

$h_r = t_{r+1} - t_r$

- Pl : a rendszer lineáris, invariáns, egyetlen állapotváltozóval : $\dot{x} = -x + 1$ $x(0)=0$

→ hátralépő Euler :

$$- \underline{x}_{r+1} = \underline{x}_r + f(\underline{x}_{r+1}, t_{r+1}) h_r$$

~~x_{r+1}~~ x_{r+1} megoldás, nemlineáris egyenlet megoldását igényli

34) Ismertesse az inverz z-transzformáció és az inverz Laplace transzform. részlettörtekre bontáson alapuló módszerét! Illusztrálja az eljárást másodfokú nevező esetére! Hogyan kezeljük a komplex értékű, illetve a többszörös pólusokat?

I. Inverz Laplace transzformáció

a) Ha a visszatranszformálandó függvény valódi törtfüggvény (számláló fokszáma < nevező fokszáma) és a nevezőnek csak egyszeres gyökei vannak:

- Ekkor az $X(s) = \frac{M(s)}{N(s)}$ felbontható részlettörtek összegére, vagyis:

$$\frac{M(s)}{N(s)} = \frac{C_1}{s-p_1} + \frac{C_2}{s-p_2} + \dots + \frac{C_n}{s-p_n} \qquad f(t) = \varepsilon(t)\left[C_1 e^{p_1 t} + C_2 \cdot e^{p_2 t} + \dots\right]$$

- A C_k együtthatók letakarásos módszerrel kaphatók:

$$C_k = \left. \frac{M(s)}{(s-s_1)(s-s_2)\dots\cancel{(s-s_k)}\dots(s-s_n)} \right|_{s=s_k}$$

- A kapott részlettörtek felismeréssel inverz transzformálhatók.

b) Valódi törtfüggvény többszörös pólusokkal:

- $$X(s) = \frac{M(s)}{N(s)} = \frac{M(s)}{(s-p_1)^2(s-p_2)\cdot\dots\cdot(s-p_n)} = \frac{C_1^a}{(s-p_1)} + \frac{C_1^b}{(s-p_1)^2} + \frac{C_2}{(s-p_2)} + \dots + \frac{C_n}{(s-p_n)}$$

- Az így kapott részlettörtek felismeréssel inverz transzformálhatók.

c) Nem valódi törtfüggvény: a számláló fokszáma ≥ nevező fokszáma

- ilyenkor vagy polinomosztást kell végezni, vagy máshogy kell a törtfüggvényt $\frac{M(s)}{N(s)} = C + \frac{M^*(s)}{N^*(s)}$ alakra hozni, az $\frac{M^*(s)}{N^*(s)}$ már részlettörtekre bontható és inverz transzformálható

- ha a számláló fokszáma = a nevező fokszámával, akkor C konstans és inverz Laplace transzformáltja $C \cdot \delta(t)$

d) e^{-st} szorzók

- eltolva van (minden t-s tolódik)

II. Inverz Z transzformáció:

- a visszatranszformálandó függvény $\frac{z^{-1} \text{ polinomja}}{z^{-1} \text{ polinomja}}$ alakú.
- Ha z^{-1}-ben a nevező nem magasabb fokszámú, mint a számláló:
  - ↳ ha lehet, ki kell emelni z^{-1} valahanyadik hatványait a számlálóból. Előfordulhat, hogy már így létrejön a szükséges fokszámkülönbség.
  - ↳ ha a kiemelés nem lehetséges z^{-1}-ben polinomosztást kell végezni minden lépés után ellenőrizve, hogy létrejött-e már a szükséges fokszámkülönbség
- Ha z^{-1}-ben a nevező fokszáma magasabb a számláló fokszámánál, áttérhetünk z pozitív hatványaira.
- Ezután kell megvizsgálni a nevező pólusait, ha egyszeres pólusok vannak, letakarásos módszerrel részlettörtekre lehet bontani a függvényt, majd felismeréssel inverz transzformálni. Fontos, hogy részlettörtekre bontás előtt kiemeljük z-t a számlálóból, mert a z transzformáltak számlálójának mindegyikében szerepel z.
- Többszörös pólusok esetén a részlettörtek nevezőiben megjelennek $(s-p_1)^2$ és $(s-p_1)$ is, úgy, mint az inverz Laplace transzformáltnál (ez itt kétszeres pólus, 3-szoros pólusoknál $(s-p)^3 (s-p)^2$ és $(s-p)$ is megjelenik)

-
$$X(z) = C_1 \frac{z}{z-z_1} + C_2 \frac{z}{z-z_1} \Rightarrow x[k] = \varepsilon[k](C_1 z_1^k + C_2 z_2^k + \dots$$

- pl:
$$W(z) = 2z^{-1} + z^{-2}\left(0{,}5\frac{z}{z-0{,}1} - 0{,}4\frac{z}{z+0{,}2}\right)$$
$$\Downarrow$$
$$h(z) = 2\delta[k-1] + \varepsilon[k-2]\left(0{,}5 \cdot 0{,}1^{k-2} - 0{,}4\,(-0{,}2)^{k-2}\right)$$
↳ $k=2$-től érvényes.

K11. Ismertesse a nemlineáris, rezisztív hálózat munkapontjának fogalmát! Mutasson a munkapont meghatározására grafikus és numerikus módszert! Milyen eltérés van a nemlineáris kétpólus és háromópólus (vagy két csatolt kétpólus) kezelése között?

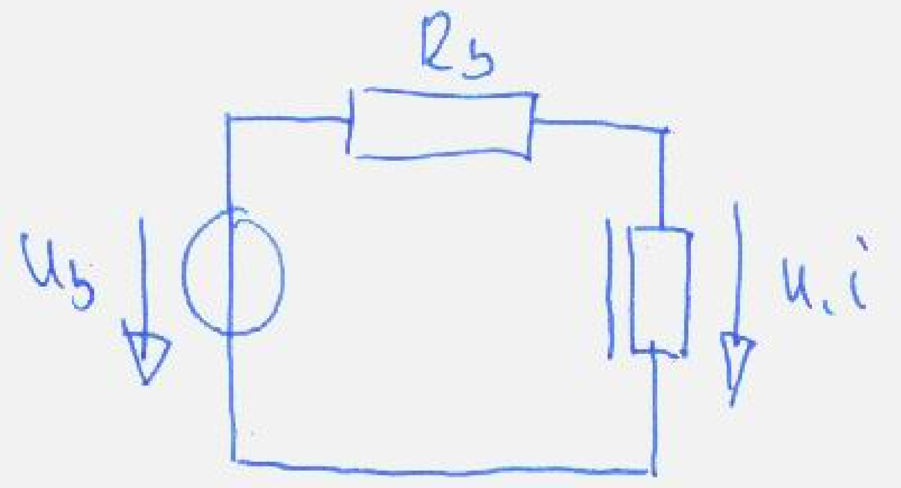
---

1. Definíció:

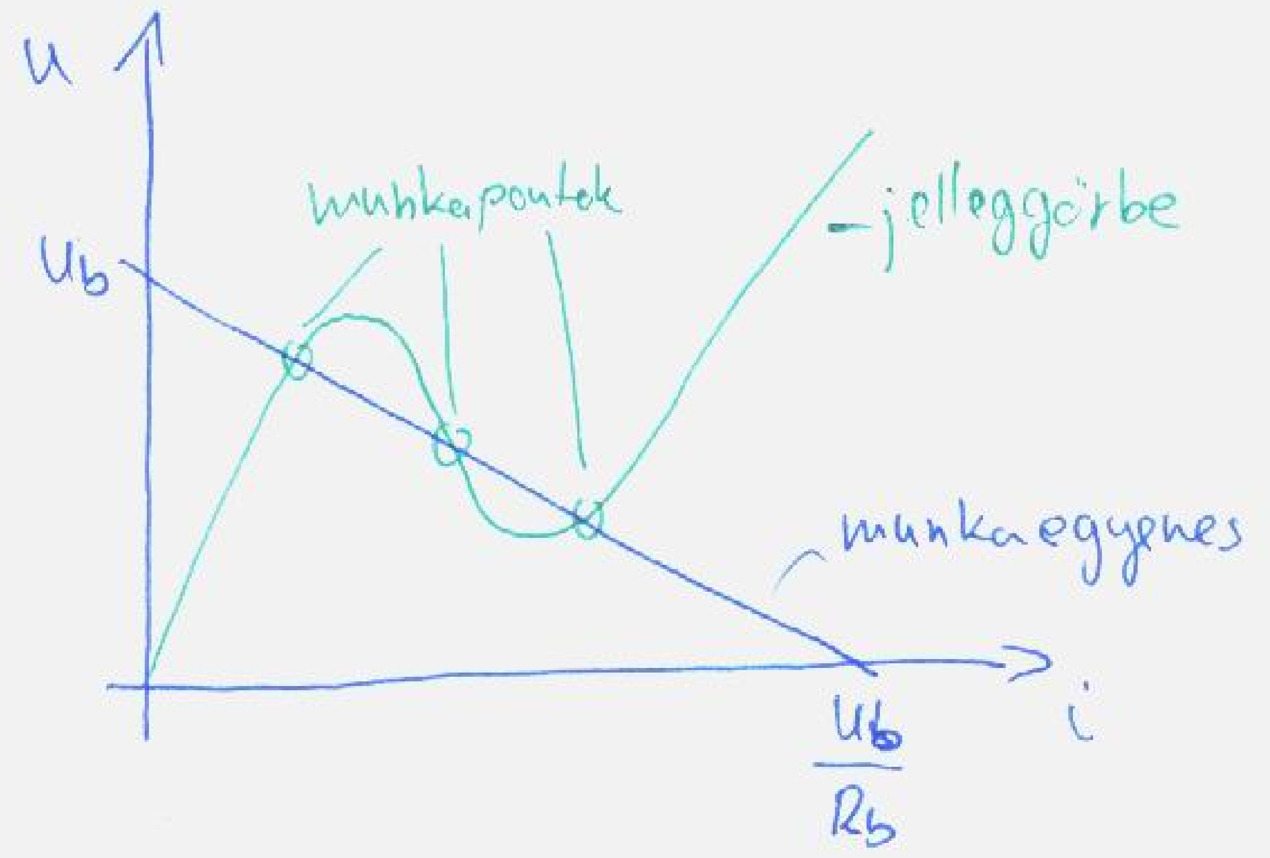
- A hálózatban ágyazott nemlineáris elemen létrejövő feszültség-áram párost munkapontnak nevezzük.
- A nemlineáris elem karakterisztikája $u = U(i)$ vagy $i = I(u)$ alakú.
- A karakterisztika megadható még grafikusan, számtáblázattal, elemi függvények kombinációjaként vagy szakaszonként értelmezett fgv-ekkel.

2. Munkapont szerkesztése egyetlen nemlineáris elem esetén:

a) Thevenin vagy Norton helyettesítő kép a nemlineáris elem kapcsaira:



A munkapontnak az $u = U_b - R_b \cdot i$ és a nemlineáris elem $u(i)$ karakterisztikáját is ki kell elégítenie



Az, hogy melyik munkapont lesz stabil csak dinamikus elemek segítségével dönthető el.

b) Szakaszonkénti linearizáció: → a jelleggörbét szakaszonként egyenessel közelítjük, felírjuk a közelítő egyenesekből kapott egyenleteket és karakterisztikákat.

→ Ez csak közelítő megoldást szolgáltat, a lehetséges megoldások számának becsléséhez hasznos. Ha a nemlineáris karakterisztika monoton növekvő, akkor csak egyetlen munkapont lehet.

→ Tegyük fel, hogy ismerjük a nemlineáris ellenállás karakterisztikájának egy lineáris közelítését! És $u = U_s - R_s \cdot i$

$$[1 + R_s G(p)]u = U_s - R_s \cdot I(p) \qquad u(p) < u < u(p+1)$$

→ Válasszunk egy p szakasz sorszámot. Ha a megoldás benne van az adott szakaszban → megkapjuk a lehetséges munkaponti u értéket, ha nincs benne, akkor a megoldás hamis.

-> Ha a nemlineáris karakterisztika monoton növekvő -> csak 1 munkapont -> ha megtaláltuk, kész vagyunk.

-> Első tájékozódásra -> lehetséges munkapontok számainak meghatározása

-> Egyszerű, általánosítása több nemlineáris ellenállást tartalmazó hálózatra kézenfekvő.

-> Pontossága elviekben tetszőlegesen növelhető.

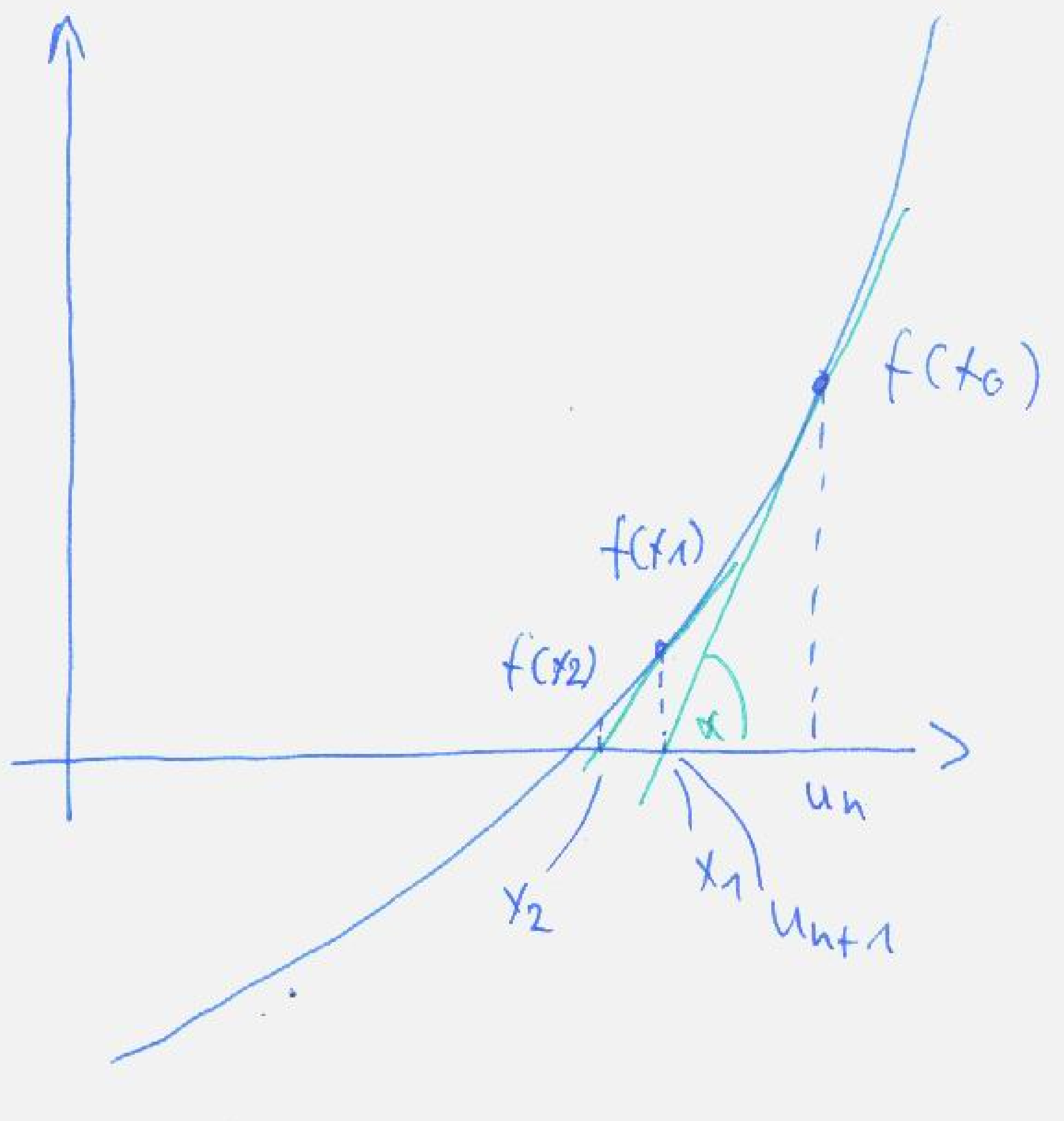
c) Newton - módszer:

$$- u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}, \text{ ahol } u + R_s \cdot I(u) - U_s = \emptyset$$

- A nemlineáris hálózati egyenletek zérushelyei határozhatók meg a Newton módszer segítségével.

- Egy tetszőleges x_0 kezdőpontban deriváljuk a függvényt, az érintő az x_1 pontban metszi az x tengelyt. Az $f(x_1)$ pontban újra meghatározzuk az érintőt, ez ismét metszeni fogja az x tengelyt és így folytatjuk, amíg a kívánt pontossággal megkapjuk....

- Hátránya, hogy csak egy zérushelyet ~~ta~~ találhatunk meg vele, illetve hogy a kezdőponttól függően nagyon sok ~~kezdő~~ lépés kellhet a zérushely eléréséig.



Taylor sorral:

$$f(x) = f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) = 0$$

$$f'(x_n) \cdot \Delta x_n = -f(x_n)$$

$$tg\, \alpha = \frac{f(u_n)}{u_n - u_{n+1}} = f'(u_n)$$

$$\hookrightarrow u_{n+1} = u_n - \frac{f(u_n)}{f'(u_n)}$$

35. Ismertesse a diszkrét idejű és a folytonos idejű szinuszos jel komplex leírásának és ábrázolásának módjait, és a jeleken végzett legfontosabb lineáris műveleteket (összeadás, állandóval szorzás, eltolás, differenciálás) komplex írásmódban!

I. Folytonos rendszerre:

1. A szinuszos mennyiségeket jellemző adatok:

$$u(t) = U \cdot \cos(\omega t + \varrho)$$

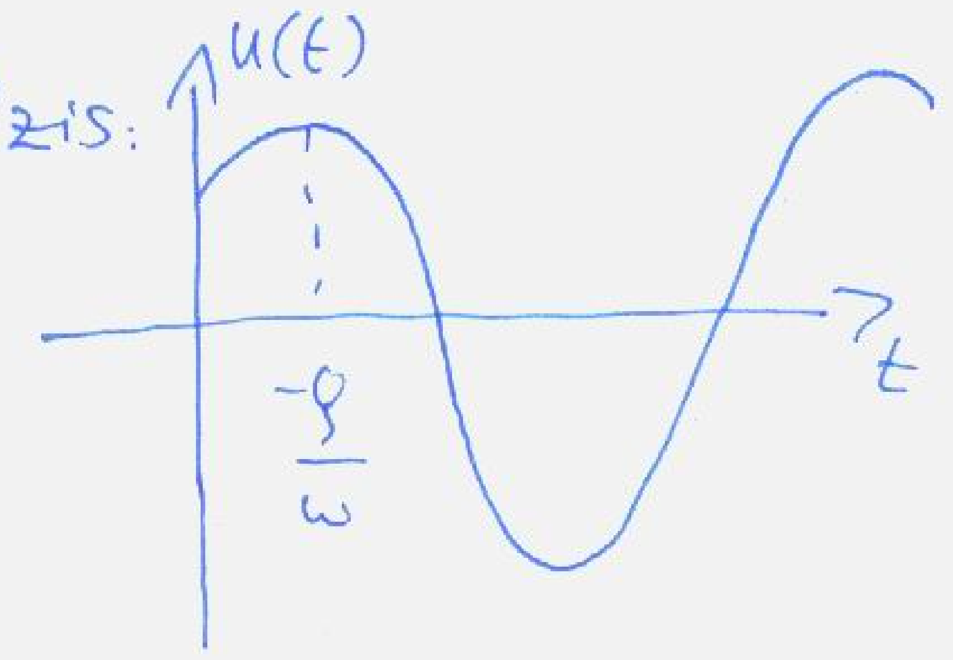
↳ • U: csúcsérték

• ω: körfrekvencia : $\left[\frac{rad}{sec}\right] = \left[\frac{1}{sec}\right] \Rightarrow \omega = \frac{2\pi}{T} = 2\pi f$

• T: periódusidő

• $\omega t + \varrho$ fázis $\Rightarrow \omega t + \varrho = \omega\underbrace{\left(t + \frac{\varrho}{\omega}\right)}_{\text{idő dimenziójú}}$

• ϱ: kezdőfázis:



2. Középérték, átlagérték:

a) Egyszerű középérték:

$$\boxed{U_c = \frac{1}{T}\int_0^T u(t)\,dt}$$

- szemléletes jelentés: görbe alatti előjeles terület
- ha $u(t) = U \cdot \cos(\omega t + \varrho) \Rightarrow E.K. = \emptyset$

b) Négyzetes középérték (effektív érték):

$$\boxed{U_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T u^2(t)\,dt}}$$

- $u(t) = U \cdot \cos(\omega t)$-re : $\cos^2(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2x$ miatt:

$$u^2(t) = \frac{U^2}{2} + \underbrace{\frac{U^2}{2}\cos 2\omega t}_{\text{átlag} = \emptyset} \Rightarrow \boxed{U_{eff} = \frac{U}{\sqrt{2}}}$$

3. Szinuszos jel komplex leírása:

a) Cél: A komplex számítási módszer szinuszos gerjesztés esetén a gerjesztett válasz meghatározására szolgál.

b) Komplex csúcsérték fogalma:

- Felhasználva: $e^{jx} = \cos x + j\sin x \Rightarrow Re\{e^{jx}\} = \cos x$

$$u(t) = U\cdot\cos(\omega t+\varphi) = Re\{U\cdot e^{j(\omega t+\varphi)}\} = Re\{U\cdot e^{j\varphi}\cdot e^{j\omega t}\} =$$

$$= Re\{\overline{U}\cdot e^{j\omega t}\}$$

$\overline{U}$ - a komplex csúcsérték

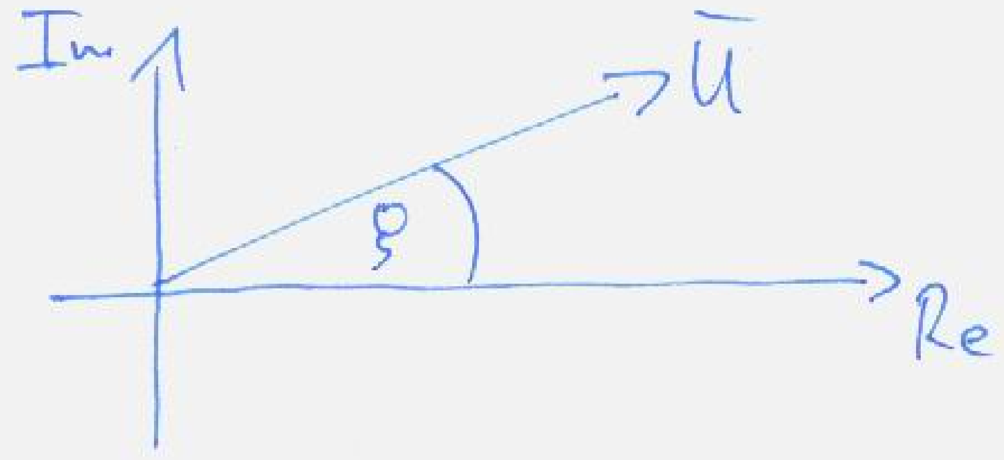
$$\boxed{\overline{U} = U\cdot e^{j\varphi}} \quad \text{ahol } |\varphi| \le \pm\pi$$

- Definíció: azt a komplex számot, amelynek abszolút értéke csúcsérték és szöge a kezdőfázis, komplex csúcsértéknek nevezzük:

$$u(t) = Re\{\overline{U}\cdot e^{j\omega t}\}$$

c) Ábrázolás -> fazor

- Definíció: komplex csúcsértéket, mint komplex vektort ábrázoljuk



- Mivel ω körfrekvencia adottnak tekinthető a számításokban, ezért $\overline{U}$ egyértelműen meghatározza $u(t)$-t!

4.) Fontosabb műveletek:

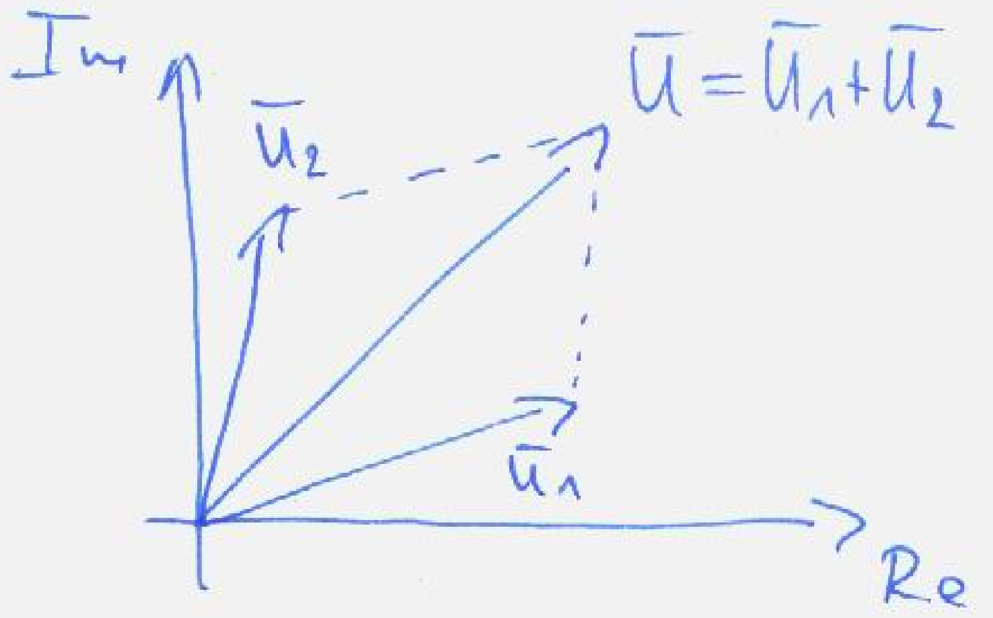
- A három alapművelet egyszerűen elvégezhető a szinuszos mennyiség fazorjának segítségével.

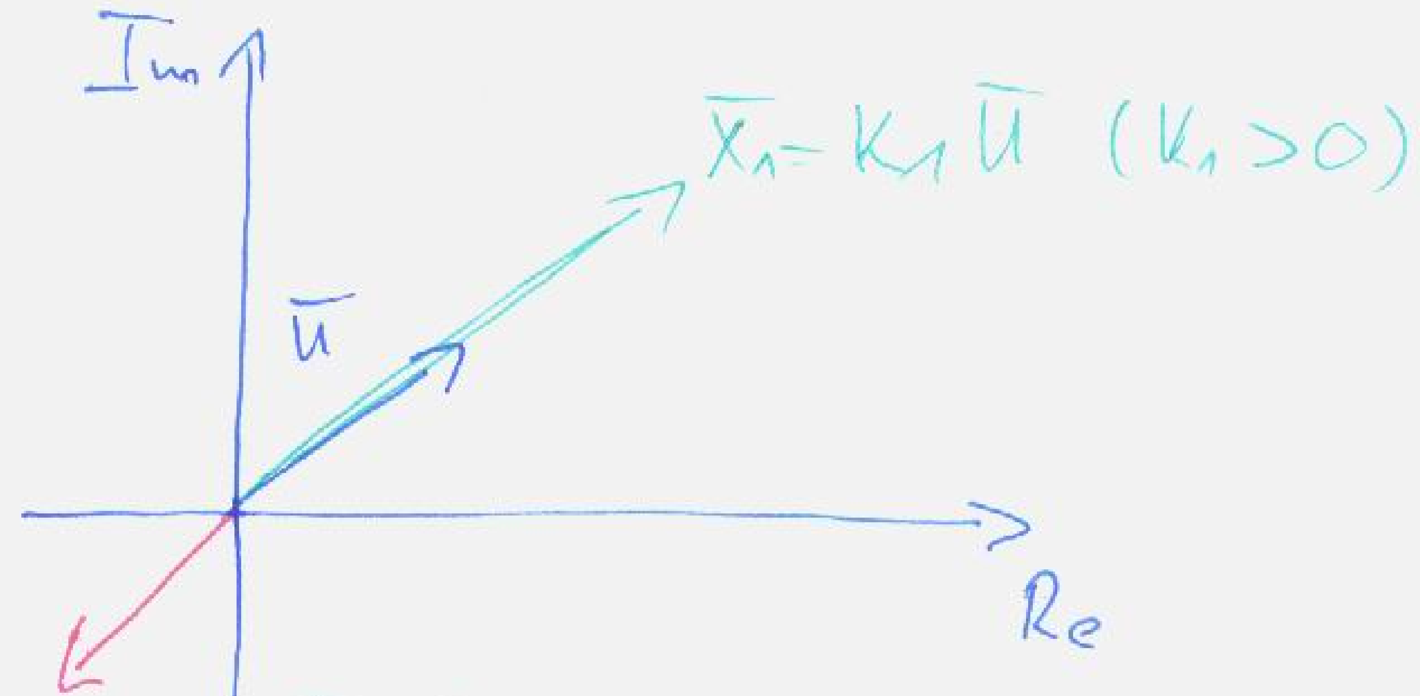
Szinuszos időfüggvény:		Fazorok (komplex csúcsérték)
$u(t) = u_1(t) + u_2(t)$	$\longleftrightarrow$	$\overline{U} = \overline{U}_1 + \overline{U}_2$
$x(t) = K\cdot u(t)$	$\longleftrightarrow$	$\overline{X} = K\cdot\overline{U}$
$y(t) = u'(t)$	$\longleftrightarrow$	$\overline{Y} = j\omega\overline{U}$

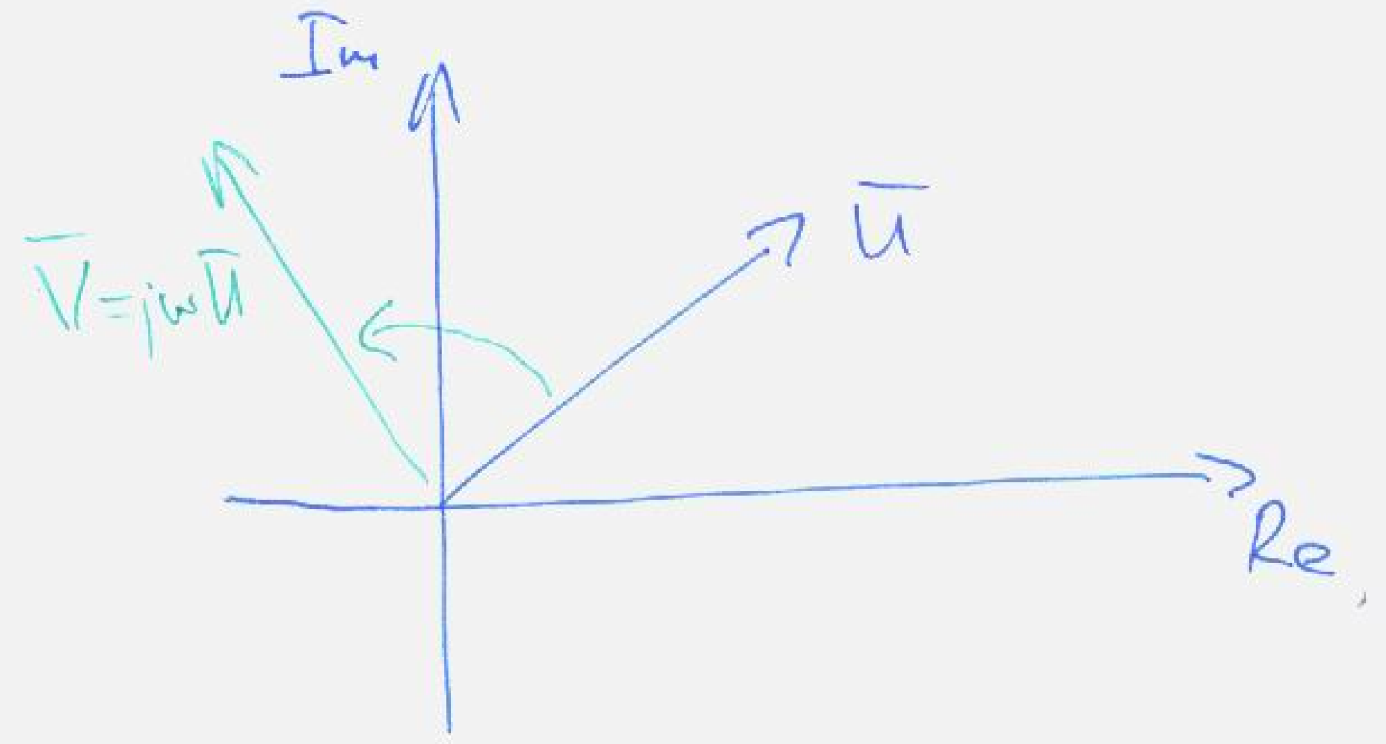
-> Bizonyítás: $y(t) = Re\{\overline{Y}\cdot e^{j\omega t}\} = \frac{d}{dt}\cdot Re\{\overline{U}\cdot e^{j\omega t}\} = Re\{\overline{U}\frac{d}{dt}\cdot e^{j\omega t}\} =$

$$= Re\{\overline{U}\cdot j\omega\cdot e^{j\omega t}\} \Rightarrow \overline{Y} = j\omega\overline{U}$$

Ábrázolás:







II. Diszkrét rendszerre:

1.) A diszkrét szinuszos mennyiséget jellemző adatok:

- A folytonos szinuszos jelből származtatható: $\omega = \frac{2\pi}{T}$ -vel

$\hookrightarrow \xi(t) = X \cdot \cos(\omega t + \rho)$

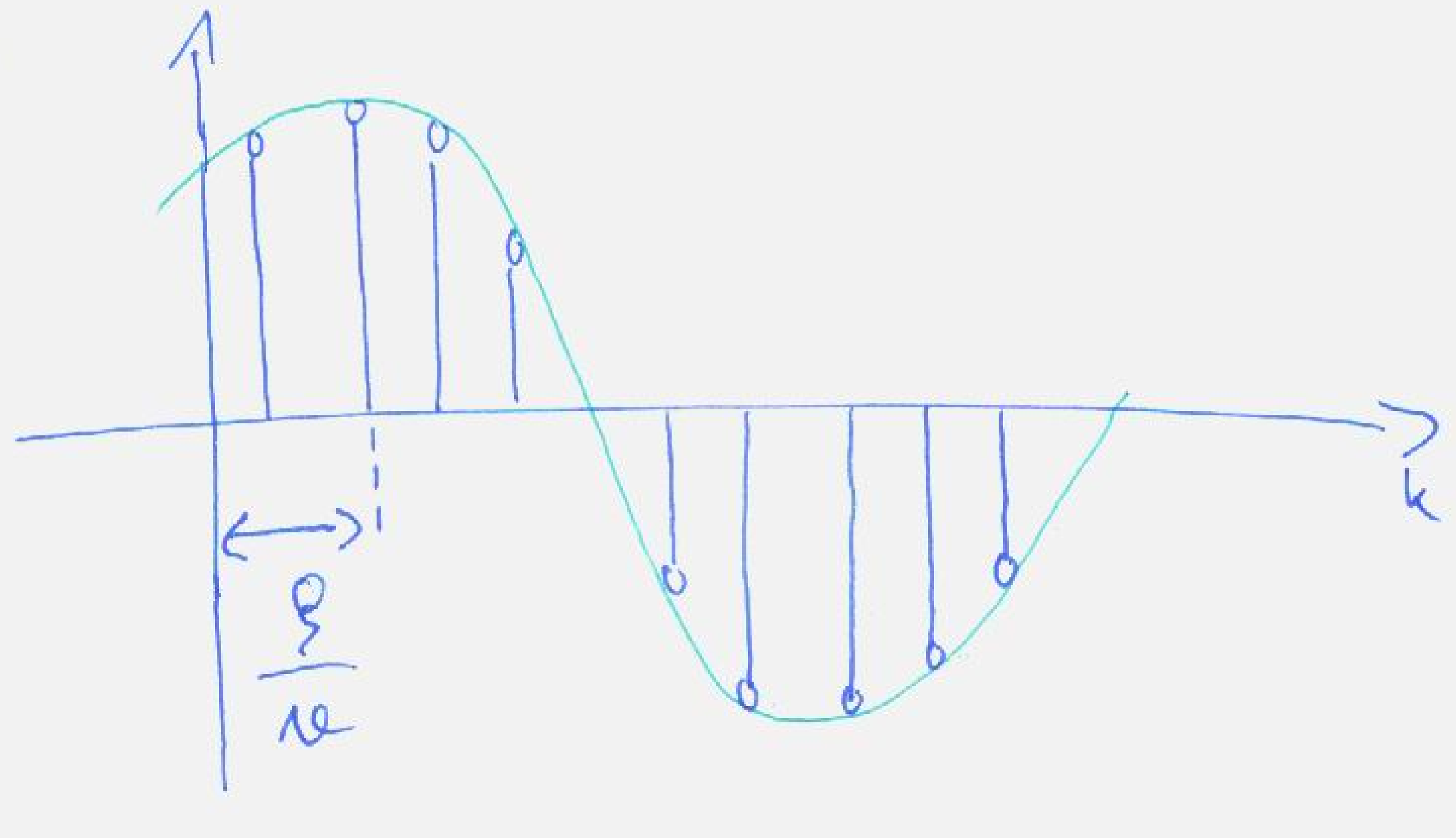
→ Rendeljünk ehhez T mintavételi periódusidő választásával egy $x[k] = \xi(kT)$ diszkrét idejű jelet.

- Ekkor: $x[k] = X \cdot \cos(\omega kT + \rho) = \boxed{X \cos(\vartheta k + \rho)}$ $k \in \mathbb{Z}$

- Jellemző adatok:
  - X: csúcsérték (amplitúdó)
  - ρ: kezdőfázis ($-\pi \leq \rho \leq \pi$ vagy $\emptyset \leq \rho < 2\pi$)
  - $\vartheta + \rho$: fázis
  - ϑ: diszkrét idejű körfrekvencia ($\vartheta = \frac{2\pi}{L}$), dimenziótlan

- A jel periodikus: $x[k] = x[k+K]$ ⟺ teljesül minden k-ra, ha $\vartheta = 2\pi \frac{M}{L}$ racionális és ekkor L jelöli a diszkrét periódus időt.

- Ábra



2.) A szinusztos jel komplex leírása:

a) Definíció: A komplex csúcsérték az a szám, amelynek abszolút értéke a csúcsérték, szöge a kezdőfázis.

$$X[k] = \mathrm{Re}\{\overline{X} \cdot e^{j\vartheta k}\} = \mathrm{Re}\{X \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{j\omega k}\} = \mathrm{Re}\{X \cdot e^{j(\omega k+\varphi)}\} =$$

$$= X \cdot \cos(\vartheta k + \varphi)$$

b) Áttérések

- időtartomány → komplex

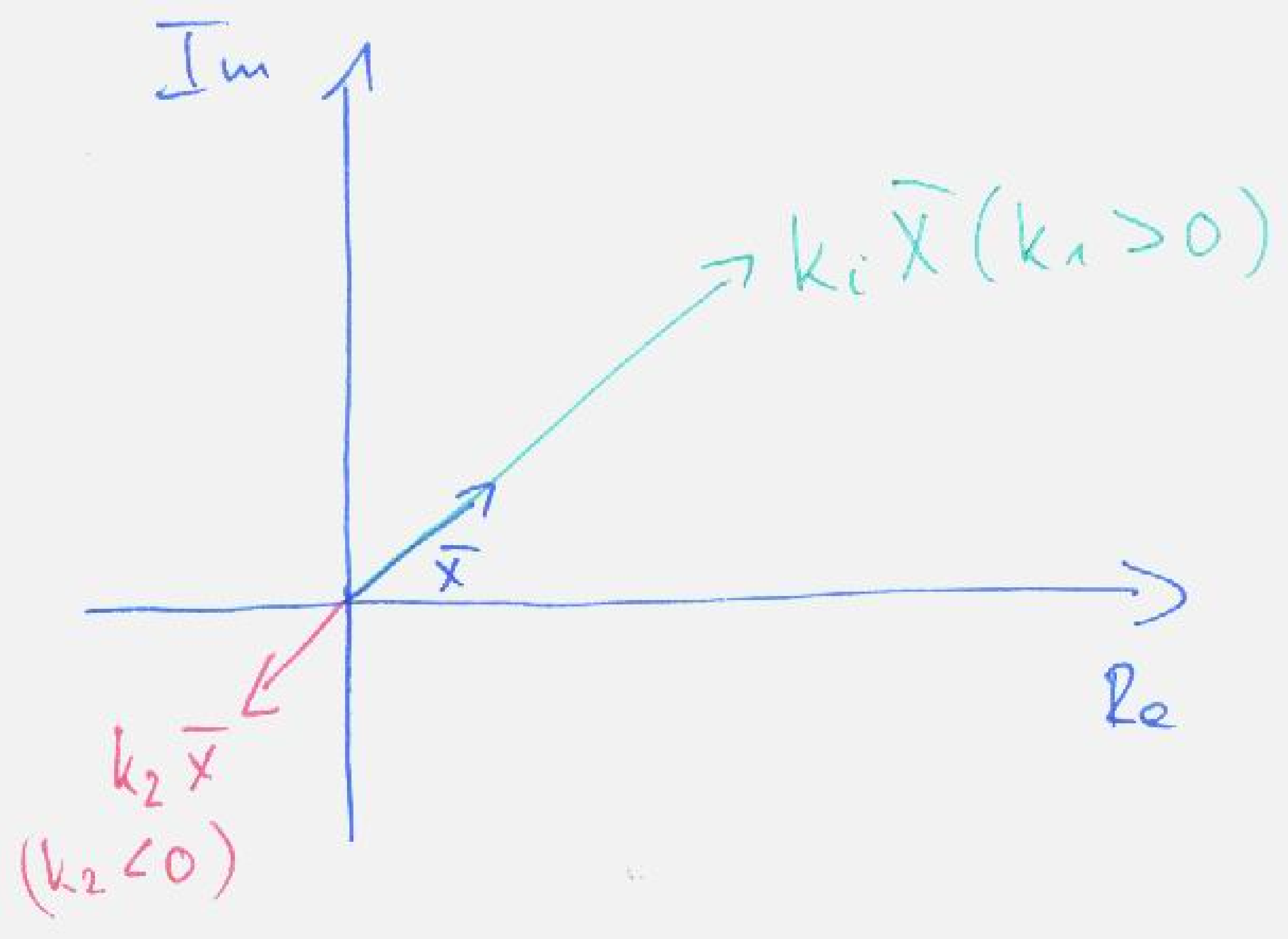
c) Ábrázolás: – lásd folytonos idő

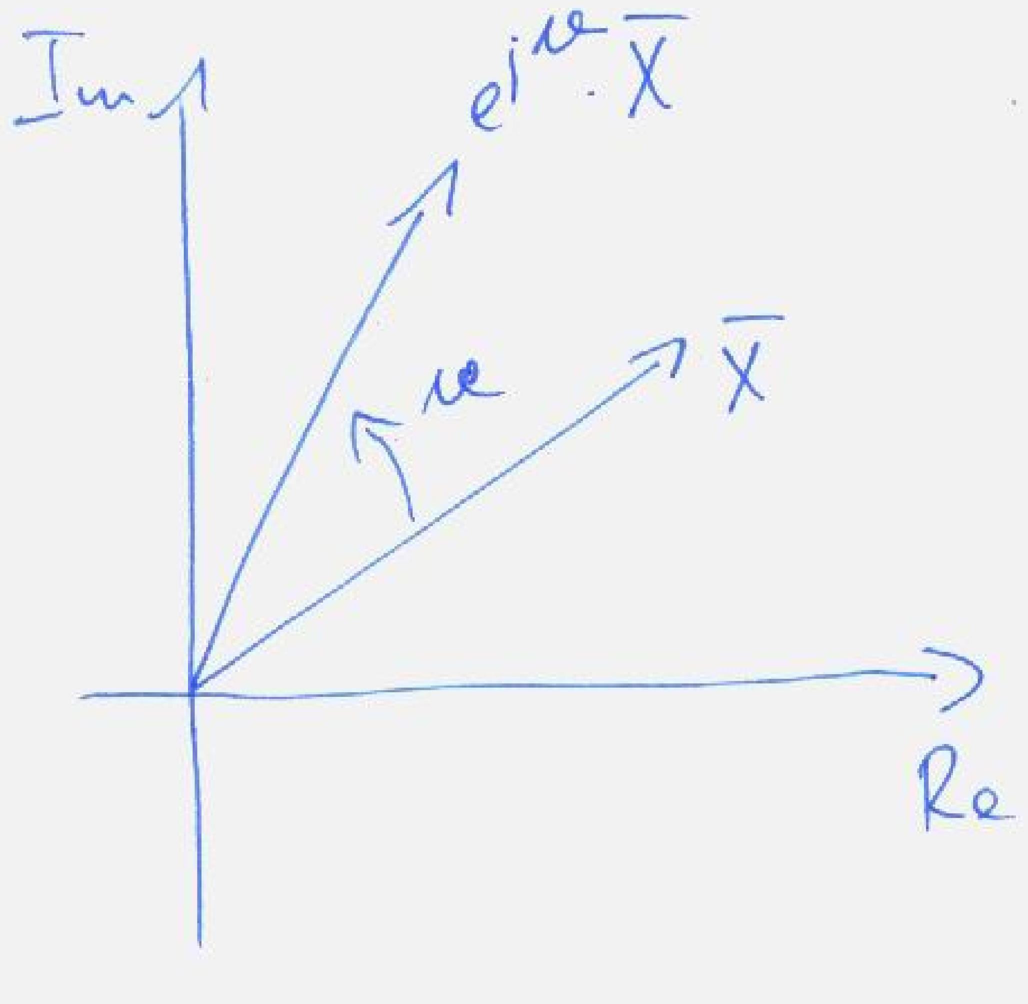
3.) Fontosabb műveletek:

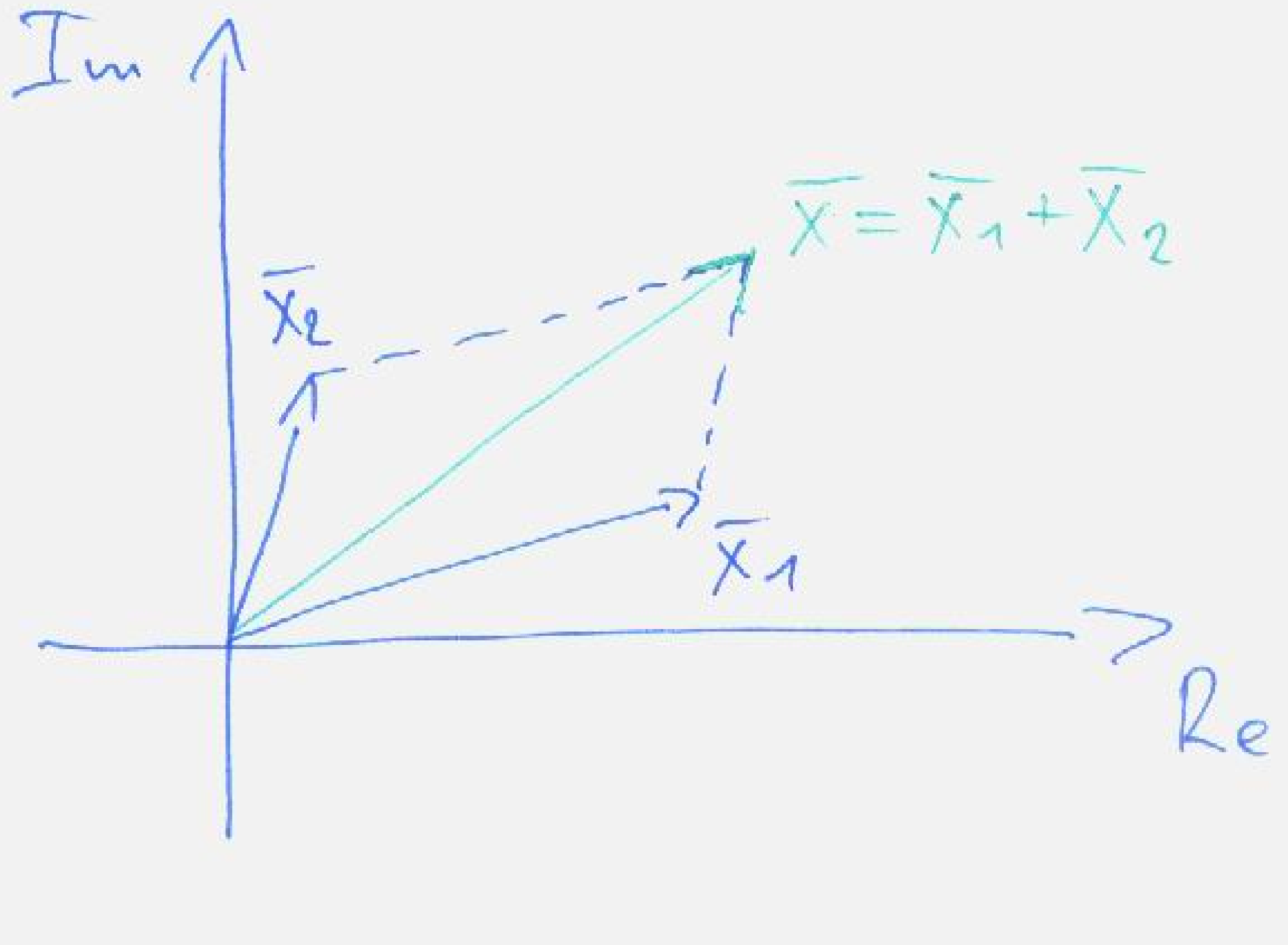
a)
$$\begin{cases} x_1[k] + x_2[k] & \longrightarrow & \overline{X}_1 + \overline{X}_2 \\ w[k] = x[k-1] & \longrightarrow & \overline{W} = e^{-j\vartheta} \cdot \overline{X} \\ y[k] = K \cdot x[k] & \longrightarrow & \overline{Y} = K \cdot \overline{X} \end{cases}$$

→ Bizonyítás: $x[k-1] = X \cdot \cos[(k-1) \cdot \vartheta k + \varphi] = \mathrm{Re}\{\overline{X} \cdot e^{j\vartheta(k-1)}\} =$
$= \mathrm{Re}\{\overline{X} e^{-j\vartheta} \cdot e^{j\vartheta k}\}$

b) Ehhez tartozó ábrák





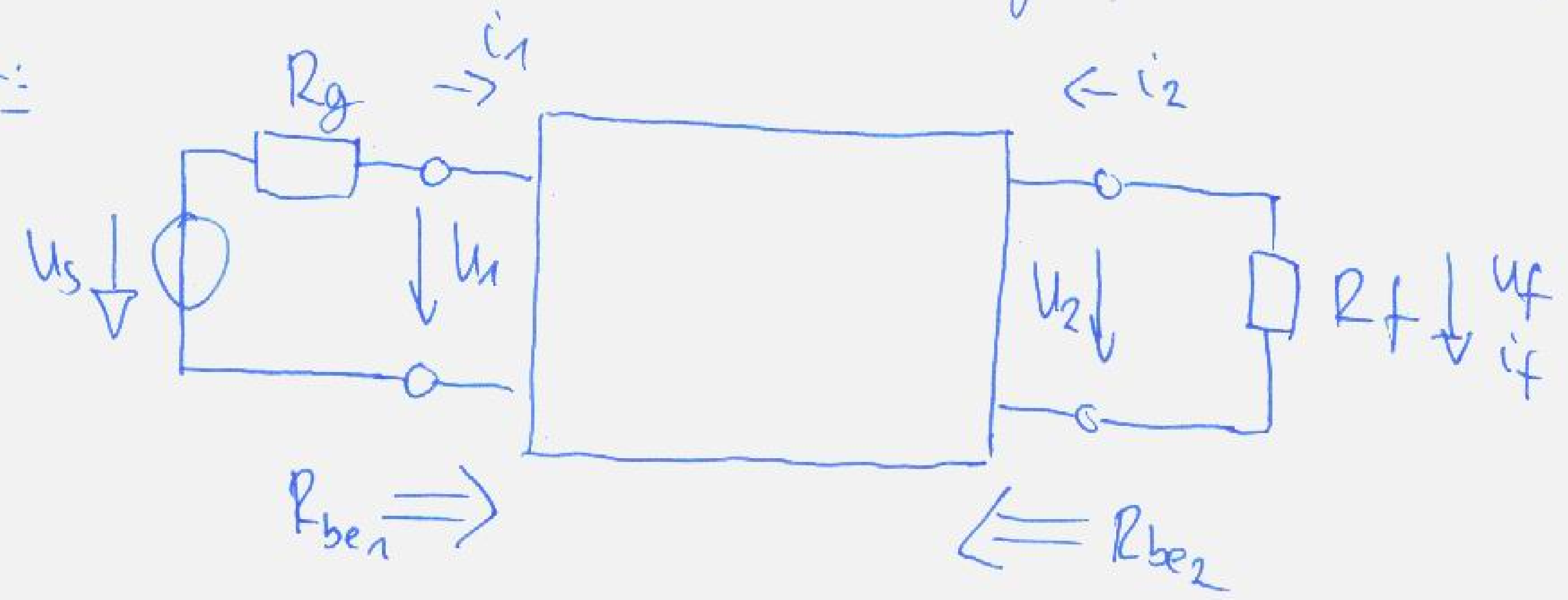


(K8) Ismertesse a lezárt lineáris kétkapu bemeneti és átviteli mennyiségeinek értelmezését, és számításuk módját a kétkapu karakterisztikájának ismeretében!

1. Általános értelmezés

- A kétkapu többnyire egy generátort köt össze az ellenállással reprezentálható fogyasztóval
- A lezáró kétpólus lehet egy bonyolult kétpólus ekvivalense.

  primer oldal ← (Thevenin v. Norton ekvivalense)
- A kétkapu lineáris, rezisztív, valamely karakterisztikáját ismertnek tekintjük.
- Ábra:

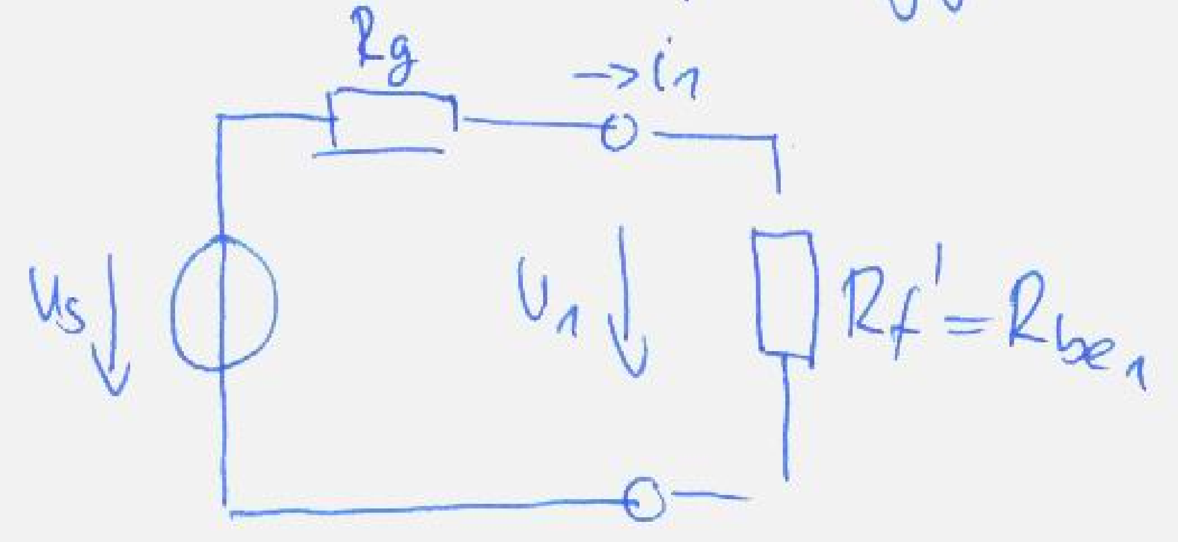


2. R_{be_1} és R_{be_2} meghatározása

a) R_{be_1}: generátor szemszögéből nézve (lezárás esetén létrejövő bemeneti impedancia)

- az R_f fogyasztó által lezárt kétkapu egy ellenállással helyettesíthető:

$R_f' = R_{Be_1}$

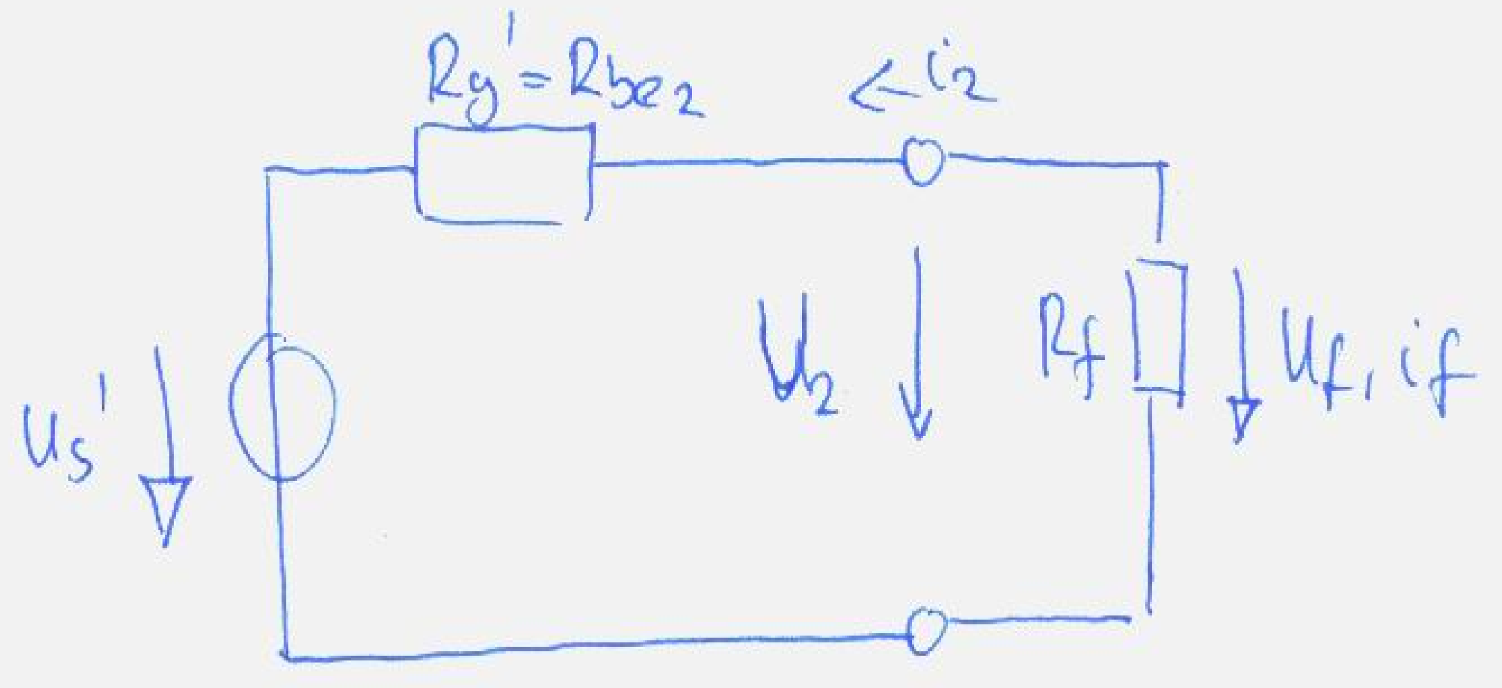


- R_{be_1}-ből kiszámítható:
  - generátor vagy primer áram: $i_1 = \dfrac{U_s}{R_g + R_{be_1}}$
  - fogyasztó és kétkapu által együttesen felvett teljesítmény: $P_1 = R_{be_1} \cdot i_1^2$

- képlettel: $\boxed{R_{be_1} = \left(\dfrac{u_1}{i_1}\right)^{(1)}_{R_f}}$ — (1): primer oldal, generátor helye; R_f: lezárás

b) R_{be_2}: fogyasztó szempontjából nézve:

– A generátorral lezárt kétkapu helyettesíthető egy U_s' forrásfeszültségű és $R_g' = R_{be_2}$ belső ellenállású Thevenin generátorral. (Vagy Nortonnal is.)



R_{be_2} nulla primer oldali feszültség esetén értelmezett!

– Ennek ismeretében: $i_f = \frac{U_s'}{R_f + R_{be_2}}$ vagy $P_f = R_f \cdot i_f^2$ (felvett teljesítmény)

$$\boxed{R_{be_2} = \left(\frac{U_2}{i_2}\right)^{(2)}_{R_g}}$$ ← generátor helye!

– ha a kétkapu bármely karakterisztikáját ismerjük, akkor ezek a mennyiségek kifejezhetők.

c) Adott impedancia karakterisztika esetén:

→ R_{be_1} meghatározása: (1) $U_1 = R_{11} \cdot i_1 + R_{12} \cdot i_2$ ($U_1 = 0 \cdot i_1$ kapcsolat)

(2) $U_2 = R_{21} \cdot i_1 + R_{22} \cdot i_2$

felhasználva $U_2 = -R_f \cdot i_2$

$\to R_f \cdot i_2 = R_{21} i_1 + R_{22} i_2$

$\to i_2 = -\frac{R_{21}}{R_f + R_{22}} i_1$ → (1) – be

$\to U_1 = \left(R_{11} - \frac{R_{12} R_{21}}{R_f + R_{22}}\right) \cdot i_1$

$$\to \boxed{R_{be_1} = R_{11} - \frac{R_{12} R_{21}}{R_f + R_{22}}}$$

$\rightarrow R_{b_2}, U_s$

(1) $u_1 = R_{11} \cdot i_1 + R_{12} \cdot i_2$

$u_2 = R_{21} \cdot i_1 + R_{22} \cdot i_2$

$$u_1 + R_g i_1 - U_s = \varnothing \rightarrow u_1 = U_s - R_g \cdot i_1 \rightarrow (1)\text{-be}$$

$$U_s - R_g i_1 = R_{11} i_1 + R_{12} i_2$$

$$i_1 = \frac{U_s}{R_{11} + R_g} - \frac{R_{12}}{R_{11} + R_g} \cdot i_2 \Rightarrow (2)$$

$$u_2 = \underbrace{\frac{R_{21}}{R_{11} + R_g} \cdot ?}_{U_s} + \underbrace{\left(R_{22} - \frac{R_{21} R_{12}}{R_{11} + R_g} \right)}_{R_{be_2}} i_2$$

d) Általános következmények:

– ha $R_f \rightarrow \varnothing$ akkor $R_{be_1} = R_{11}$ (üresjárási bemeneti rezisztencia adódik)

3. Átviteli mennyiségek:

a) Feszültségátviteli tényező:

$$H_u = \left(\frac{u_f}{u_1} \right)_{R_f} = \left(\frac{u_2}{u_1} \right)_{R_f} \leftarrow R_f\text{-el való lezárás esetén.}$$

b) Áramátviteli tényező:

$$H_i = \left(\frac{i_f}{i_1} \right)_{R_f} = -\left(\frac{i_2}{i_1} \right)_{R_f}$$

c) Átviteli (transzfer) vezetés:

$$G_T = \left(\frac{i_f}{u_1} \right)_{R_f} = -\left(\frac{i_2}{i_1} \right)_{R_f}$$

d) Átviteli (transzfer) ellenállás

$$R_T = \left(\frac{u_f}{i_1} \right)_{R_f} = \left(\frac{u_2}{i_1} \right)_{R_f}$$

(17.) Mit jelent a sávkorlátozott folytonos idejű jel? Adja meg a folytonos idejű jel és a mintából alkotott diszkrét idejű jel Fourier transzformáltja közötti kapcsolatot! Milyen feltételek mellett, és hogyan lehet kifejezni a folytonos idejű jel időfüggvényét mintái ismeretében?

---

1. Sávkorlátozott folytonos idejű jel

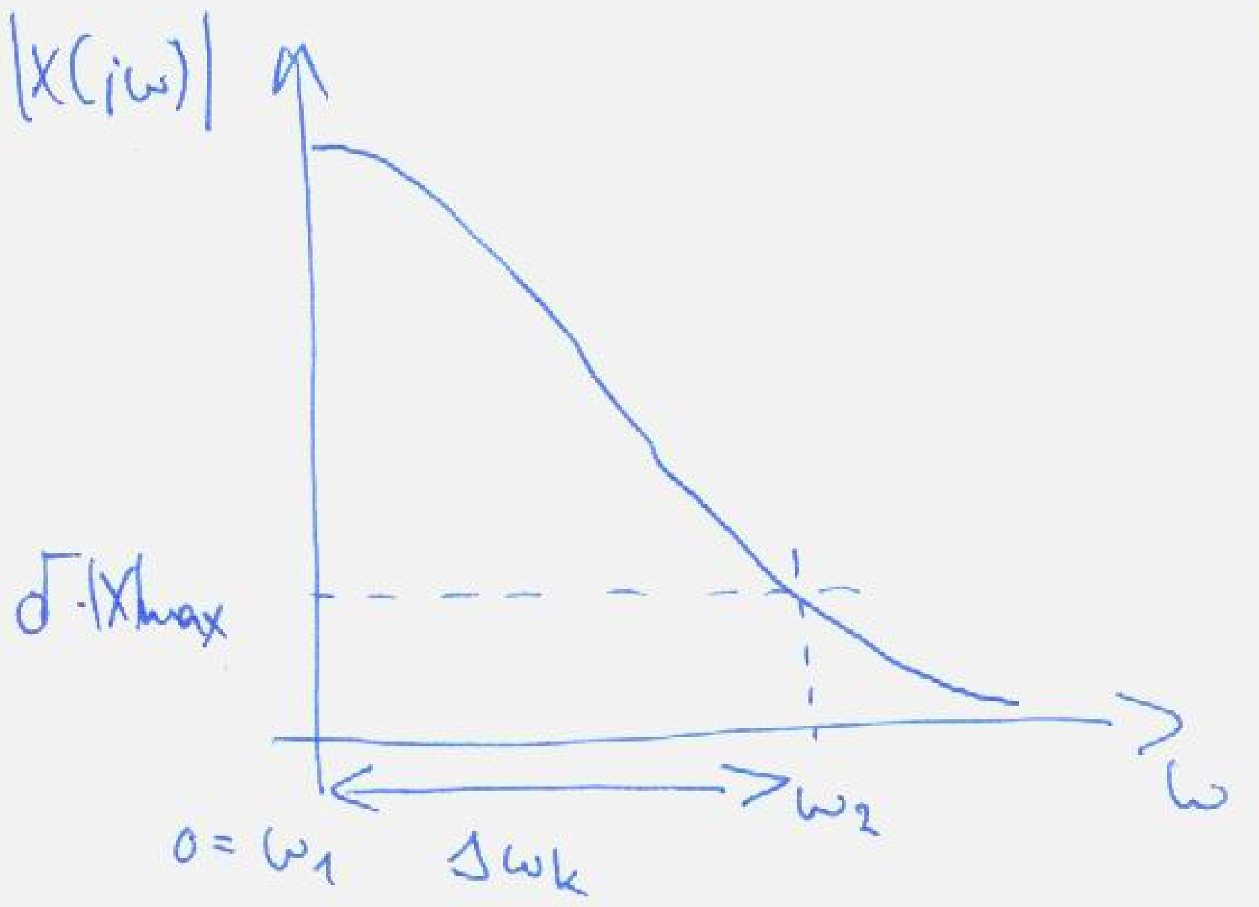
a) Jel sávszélessége:

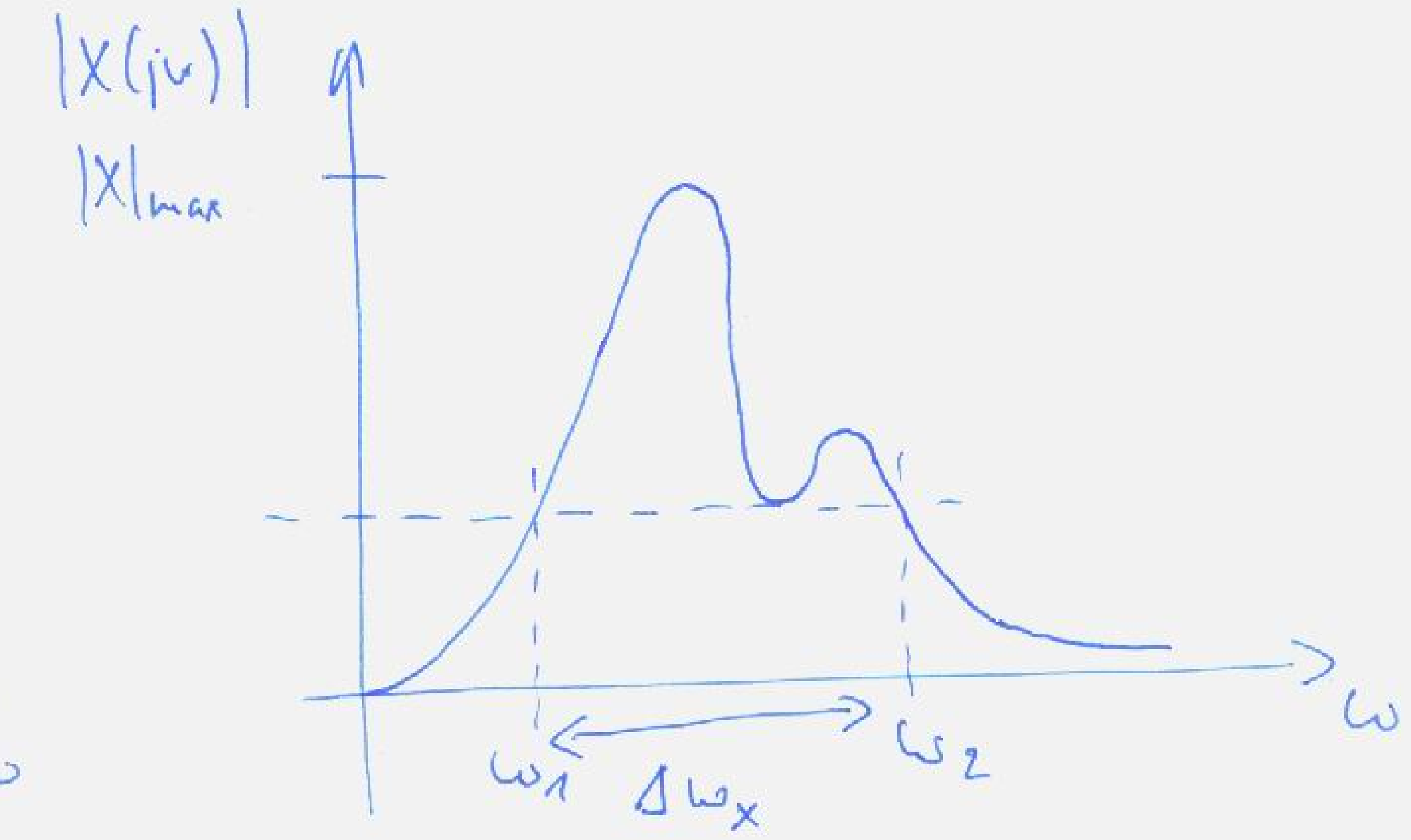
- Definíció: Időfüggvény sávszélessége annak a frekvenciatartománynak a szélessége, amelybe az amplitúdó spektrumának lényeges része esik. Ezen frekvenciasávon kívül a jel $|X(j\omega)|$ kisebb a maximumának egy megadott értékénél.

  Az egyenlet: $|X(j\omega)| < \delta \cdot |X(j\omega)|_{max}$ ahol $0 < \delta < 1$

  ↳ ebből megkapható $\Delta\omega_\varepsilon$ sávszélesség

- Bizonyos jeleket burkolójelekkel közelítünk. (ha $|X(j\omega)|$ nem monoton tart $\emptyset$-hoz)





- Def 2: Parseval tétele ⟶ az a frekvenciasáv, amelyen belülre esik a jel energiatartalmának 90%-a

b) Sávkorlátozott jelek:

- véges energiájú jel spektruma: nullához tart a frekvencia növekedésével.

  ↳ ezekhez a jelekhez található olyan frekvencia, amely fölött a spektrum már elhanyagolható.

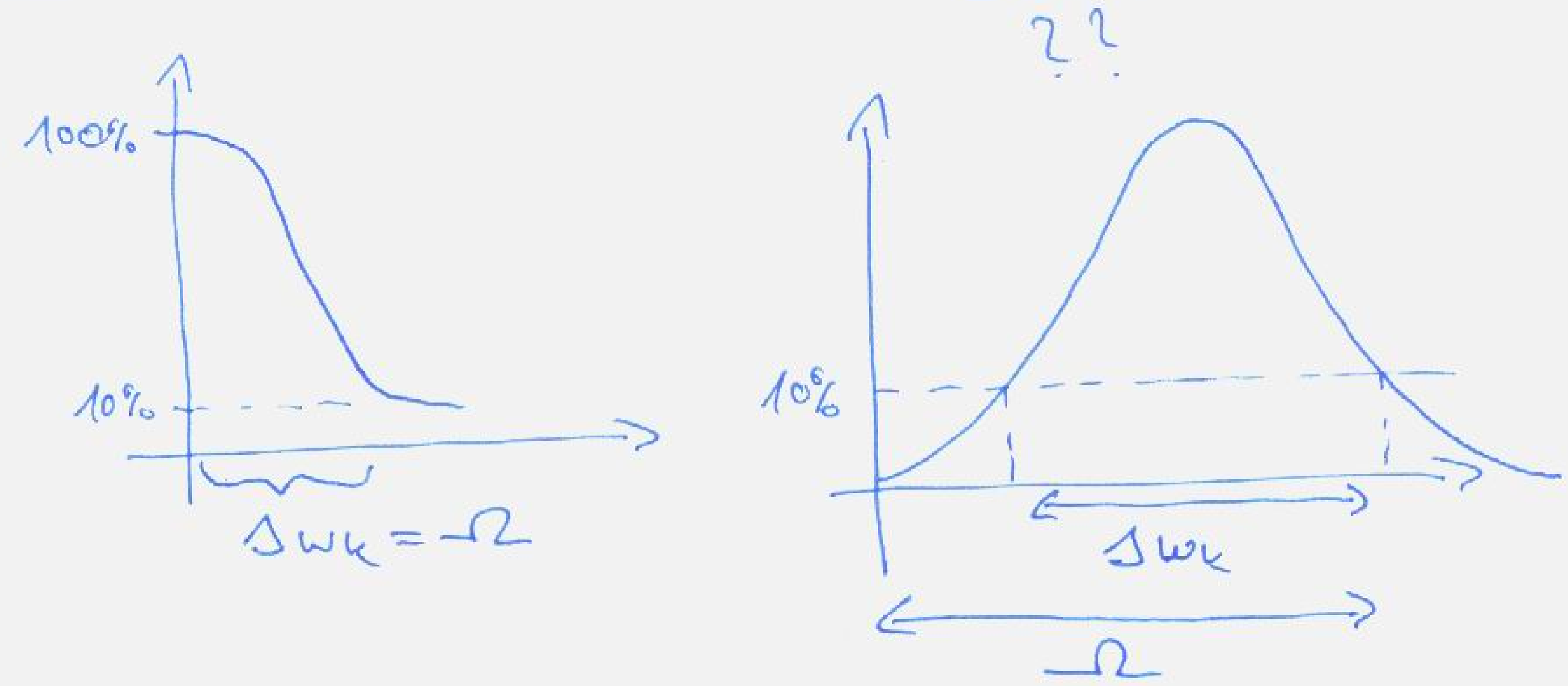
  ↳ ez az idealizált közelítés a sávkorlátozott jel.

- $s(t)$ sávkorlátozott jel $S(j\omega)$ spektruma Ω sávkorlát fölött $\emptyset$

  ↳ $\boxed{S(j\omega) = 0 \quad |\omega| > \Omega}$

ahol a sávkorlát jellemezhető $f_B = \frac{\Omega}{2\pi}$ vagy $f_N = \frac{\Omega}{\pi}$ vel (Nyquist frek)

– **Fontos**: a sávkorlát mindig $\underbrace{\omega - \Omega}_{??} = \emptyset$ val kezdődik



2. Fourier transzformáltak közötti kapcsolat:

$$\mathcal{F}\{x[k]\} = \frac{1}{T}\sum_{i=-\infty}^{\infty} X[j(\omega - i\cdot\omega_s)]$$

Egy folyamatos idejű jel mintavételezésével keletkezett diszkrét idejű jel $\mathcal{F}\{\}$ transzformáltját megkapjuk, ha a folyamatos idejű jel $\mathcal{F}\{\}$ transzformáltját ω_s-el periodikusan eltolgatjuk, összeadjuk és osztjuk a mintavételezési időközzel.

3. A visszaállítás és ennek feltételei (= Mintavételi tétel)

– Az Ω sávkorlátú jelet meghatározzák a jelnek $t_k = k\cdot\left(\frac{\pi}{\Omega}\right)$ ($= T$) időpontban vett mintái:

$\frac{S}{2} \geq \Omega,\ T \leq \frac{\pi}{\Omega}$

$$\hookrightarrow \underbrace{s(t)}_{x(t)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \underbrace{s(kT)}_{x[k]} \cdot \frac{\sin\left(\pi\left(\frac{t-kT}{T}\right)\right)}{\pi\cdot\frac{t-kT}{T}}, \quad T = \frac{\pi}{\Omega}, \quad S(j\omega) = 0 \quad |\omega| > \Omega$$

– Mivel véges számú mintát ~~tud~~ tudunk venni, ezért a sávkorlátozott jel csak közelítően állítható elő mintái alapján

– A hiba mértéke: $\longrightarrow$ Ω minél nagyobb (sávkorlát)

$\hookrightarrow$ de ekkor csökken a mintavételi idő $\Rightarrow$ több mintát kell ismerni az adott intervallumból!

– **A Mintavételi tétel másik értelmezése**:

- Egy tetszőleges $X(t)$ jelhez $t_k = k\cdot T$ időpontbeli mintái alapján egy Ω sávkorlátú $X_\Omega(t)$ közelítőjel rendelhető, amelyre:

$$X_\Omega(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(kT)\cdot\frac{\sin\left[\pi\cdot\left(\frac{t-kT}{T}\right)\right]}{\pi\cdot\left(\frac{t-kT}{T}\right)} \qquad \Omega = \frac{\pi}{T}$$

ahol a mintavételi időpontokban $X_\Omega(kT) = X(kT)$, az összes egyéb pillanatban nulla

- Az állítás véges tagszám esetén is igaz, ha a figyelembe nem vett mintákat nulla értékűnek tekintjük.

- Az összegzést $k = -N$ és $k = +N$ szimmetrikus határok között kell végezni

- A tétel jelentősége: lehetőséget ad arra, hogy a jelet mintáival tetszőleges pontossággal jellemezzük. Ez teszi lehetővé a digitális jelátvitelt és jelfeldolgozást (k9) Ismertesse a lineáris, invariáns kirchoff típusú hálózatok szinuszos állapotainak számítását komplex írásmódban! Ismertesse a különböző teljesítmények fogalmát és számításuk módszereit! Mikor nevezzük a kétpólust passzívnak szinuszos állandósult állapotában?

---

1. Jellemző mennyiségek:

- Egy időben ~~szinuszosan~~ szinuszosan változó mennyiséget három adat jellemez:
  - effektív értéke: $U_{eff} = \frac{1}{\sqrt{2}} U$
  - körfrekvenciája: $\omega = \frac{2\pi}{T}$
  - kezdőfázis: φ

2. Komplex számításmód

- Egy szinuszosan változó mennyiség felírható komplex csúcsértékkel (értékekkel)

  $U \cos(\omega t + \varphi) \to U \cdot e^{j\varphi}$

- A komplex csúcsértékekre is érvényes kirchoff feszültség és áramtörvénye
- Szinuszos állandósult állapotban a két~~kapuk~~pólusok impedanciája:

  $\overline{Z}_R = R$; $\overline{Z}_L = j\omega L$; $\overline{Z}_C = \frac{1}{j\omega C}$ és $\overline{U} = \overline{Z} \cdot \overline{I}$

3. Teljesítmények

a) Pillanatnyi teljesítmény: $p(t) = u(t) \cdot i(t)$ ahol $u(t) = U \cdot \cos(\omega t + \varphi)$

$i(t) = I \cdot \cos(\omega t)$

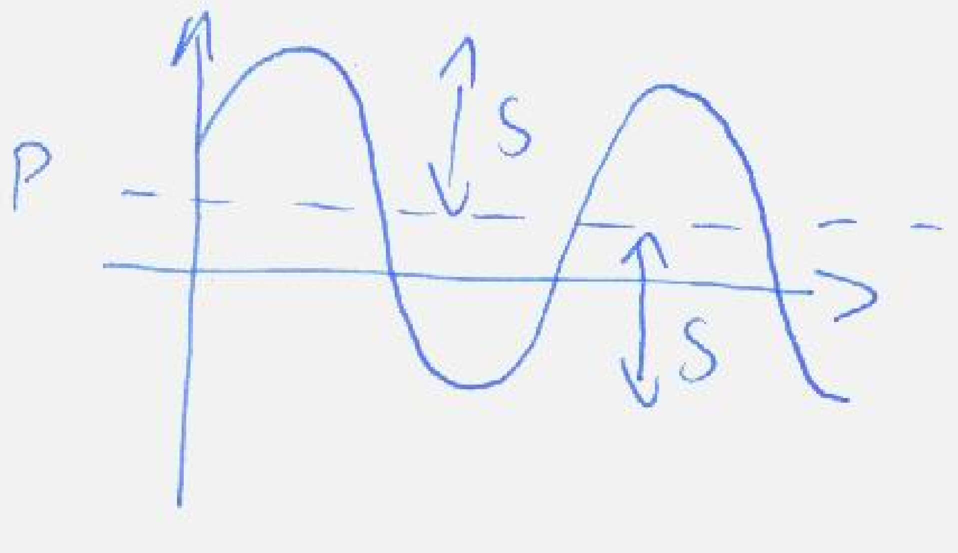
- $p(t) = \frac{U \cdot I}{2} \cdot \cos\varphi + \frac{U \cdot I}{2} \cdot \cos(2\omega t + \varphi)$
- $\cos\varphi = \frac{P}{S}$

b) Hatásos teljesítmény:

$P = \frac{1}{T}\int_0^T p(t)dt$; $P = \frac{U \cdot I}{2} \cdot \cos\varphi$; $P = \frac{I^2}{2} \cdot R$ [W] $\int_{t_1}^{t_2} p(t)dt = P(t_1 - t_2)$

c) Látszólagos teljesítmény: Megadja az átlagértéktől való eltérést

$S = \frac{U \cdot I}{2}$ [VA]



d) Meddő teljesítmény: reaktanciára jellemző

$-Q = \sqrt{S^2 - P^2}$; $Q = \frac{U \cdot I}{2} \cdot \sin\varphi$ [var]

- megmaradási törvény: teljes hálózatra: $\sum Q_i = \emptyset$.

- $L: Q > \emptyset$; $C: Q < \emptyset$

e) Passzivitás feltétele: hatásos teljesítmény nem negatív!

- $P = R\frac{I^2}{2} > 0$
- $R = Re\{\bar{Z}\} \geq 0 \longleftrightarrow$ passzív kétpólus
- komplex teljesítmény: $\bar{S} = \frac{\bar{U}\bar{I}^*}{2}$; $P = Re\{\bar{S}\}$; $Q = Im\{\bar{S}\}$
- algebrai alakban megadott értékekkel előnyös számolni.

f) Megmaradási törvény: - mind három típusra igaz
- teljes hálózatra!

→ Levezetés:

① $P = \frac{I^2}{2} \cdot R = \frac{UI}{2} \cdot \cos\varphi = \frac{I \cdot Z \cdot I}{2} \cdot \cos\varphi = \frac{I^2}{2} R$ $\qquad \bar{U} = \bar{Z} \cdot \bar{I}$, $U = Z \cdot I$

$R + jX = Z \cdot \cos\varphi + jZ\sin\varphi$

② $p(t) = u(t) \cdot i(t) = R i^2(t)$

$P \triangleq \frac{1}{T}\int_0^T R \cdot i^2(t)\,dt = R \cdot \underbrace{\frac{1}{T}\int i^2(t)\,dt}_{I_{eff}^2} = R \cdot I_{eff}^2$

③ Meddő: $Q = \frac{UI}{2} \cdot \sin\varphi \underset{U = Z \cdot I}{=} \frac{I^2}{2} \cdot Z \cdot \sin\varphi \underset{\bar{Z} = R + jX}{=} \boxed{\frac{I^2}{2} \cdot X}$

Meddő teljesítmény csak ott lép fel, ahol reaktancia is van!