# Haladó lineáris algebra

Hetedik házi feladat

*Horváth Ottó*
*II21WC*

**1.** Vegyünk egy legalább 10×10-es valós **J** Jordan-mátrixot, amelyben nincsenek 1×1-es Jordan-blokkok, de van legalább egy legalább 3×3-as és melynek pontosan két különböző sajátértéke van, egyik pozitív, másik negatív. Legyen **C** egy **J**-vel azonos méretű véletlen (tehát invertálható) valós mátrix, és legyen **A** = **CJC**$^{-1}$.

---

A feladatban szereplő **J** mátrixhoz a következő két sajátértéket rendeltem: $\lambda_1 = 2$ és $\lambda_2 = -2$. Továbbá mindegyik sajátértékhez egy 3×3-as és egy 2×2-es Jordan-blokkot választottam, így a mátrix alakja a következő lett

$$\mathbf{J} = \left[\begin{array}{ccc|cc|cc|ccc} \lambda_1 & 1 & & & & & & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & & & & & & \\ & & \lambda_1 & & & & & & & \\ \hline & & & \lambda_1 & 1 & & & & & \\ & & & & \lambda_1 & & & & & \\ \hline & & & & & \lambda_2 & 1 & & & \\ & & & & & & \lambda_2 & & & \\ \hline & & & & & & & \lambda_2 & 1 & \\ & & & & & & & & \lambda_2 & 1 \\ & & & & & & & & & \lambda_2 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|cc|cc|ccc} 2 & 1 & & & & & & & & \\ & 2 & 1 & & & & & & & \\ & & 2 & & & & & & & \\ \hline & & & 2 & 1 & & & & & \\ & & & & 2 & & & & & \\ \hline & & & & & -2 & 1 & & & \\ & & & & & & -2 & & & \\ \hline & & & & & & & -2 & 1 & \\ & & & & & & & & -2 & 1 \\ & & & & & & & & & -2 \end{array}\right].$$

A Jordán-bázishoz egy ugyanekkora méretű véletlen **C** mátrixot választottam,

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 3 & -6 & -4 & 2 & -9 & 10 & -10 & -8 & -10 & -7 \\ -3 & -4 & 9 & -5 & -5 & 1 & 8 & 3 & 5 & -5 \\ 7 & -1 & -1 & 2 & 6 & 0 & 9 & 0 & 0 & 8 \\ 1 & -6 & -7 & 4 & -10 & -6 & 6 & 6 & 0 & -10 \\ -3 & 7 & 9 & -6 & 9 & 0 & -8 & 5 & 8 & 0 \\ 9 & -6 & 10 & -8 & 5 & 3 & -5 & 8 & 2 & -7 \\ 8 & -6 & -1 & -4 & 0 & 4 & -3 & 8 & 2 & 10 \\ 1 & -7 & -8 & -4 & 2 & -2 & 4 & -3 & 8 & 4 \\ 3 & -6 & -5 & -2 & -6 & -3 & -8 & 4 & 6 & 0 \\ 2 & -1 & -2 & 0 & -1 & 10 & 5 & -6 & 2 & -1 \end{bmatrix}.$$

Így már fel tudtam írni az **A** mátrixot a Jordán-felbontás segítségével

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} -5{,}5510 & -1{,}2962 & -3{,}7473 & -1{,}3234 & -5{,}9724 & 2{,}0628 & -0{,}1218 & -1{,}5585 & 2{,}3223 & 2{,}7015 \\ -0{,}0771 & 1{,}7619 & -0{,}9578 & -2{,}9986 & -2{,}5001 & 0{,}0100 & 0{,}0775 & -0{,}3704 & 1{,}6092 & -1{,}7235 \\ 0{,}4993 & -1{,}6248 & 1{,}2959 & 0{,}7642 & 1{,}2519 & 1{,}0552 & -1{,}4181 & -0{,}3049 & 0{,}8550 & 0{,}5680 \\ 6{,}9475 & 2{,}8752 & 7{,}0230 & 2{,}5550 & 7{,}3867 & -4{,}9268 & 0{,}8812 & 1{,}5457 & 0{,}5856 & -2{,}8916 \\ -8{,}2359 & -2{,}2032 & -8{,}3604 & -6{,}2728 & -10{,}7215 & 4{,}9559 & -0{,}9560 & -2{,}2017 & 1{,}0223 & 3{,}4545 \\ -15{,}2940 & -4{,}7199 & -12{,}9234 & -11{,}5084 & -20{,}0014 & 9{,}3513 & -3{,}3205 & -4{,}9011 & 7{,}6076 & 8{,}0859 \\ -15{,}0129 & -6{,}5050 & -13{,}9620 & -8{,}8688 & -18{,}8048 & 9{,}8213 & -3{,}8265 & -4{,}0834 & 6{,}4990 & 9{,}2593 \\ -2{,}8685 & -3{,}2732 & -6{,}8997 & -0{,}4427 & -4{,}4157 & 2{,}4543 & 2{,}6247 & 1{,}5260 & -3{,}3421 & 0{,}8466 \\ -8{,}7660 & -3{,}7018 & -9{,}8746 & -4{,}9633 & -11{,}7549 & 4{,}8522 & 0{,}2414 & -1{,}8937 & 1{,}8478 & 5{,}3816 \\ -6{,}3070 & -2{,}9809 & -6{,}3771 & -3{,}0677 & -7{,}9006 & 3{,}6360 & -0{,}0697 & -1{,}7010 & 1{,}3322 & 1{,}7610 \end{bmatrix}.$$

**2.** Írjuk fel **A** minimálpolinomát! (számítógép használata nélkül, de géppel is ellenőrizhetjük)

---

Az **A** mátrix minimálpolinomát a **J** szerkezetéből határoztam meg. Kihasználtam, hogy a két mátrix hasonló, így tudtam, hogy $\mu_{\mathbf{A}}$ = $\mu_{\mathbf{J}}$. Mivel a **J**-nek csak két sajátértéke van, ezért ez a polinom a következőképp írható fel

$$\mu_{\mathbf{A}}(x) = (x - \lambda_1)^{m_1}(x - \lambda_2)^{m_2}$$

ahol $\mathbf{m_1}$ a $\lambda_1$-hez tartozó Jordan-blokkok közül a legnagyobb mérete és ugyanez elmondható $\mathbf{m_2}$-ről is. Esetemben mindkét sajátértékhez legfeljebb egy 3×3-as blokkot rendeltem, ezért ennek megfelelően a minimálpolinom a

$$\mu_{\mathbf{A}}(x) = (x - \lambda_1)^3(x - \lambda_2)^3 = (x-2)^3(x+2)^3 = x^6 - 12x^4 + 48x^2 - 64.$$

**3.** Írjuk fel az $e^{\mathbf{A}}$ kiszámításához használható Hermite-polinomot, majd számítsuk ki vele $e^{\mathbf{A}}$ értékét (utóbbit természetesen géppel)! A számítást ellenőrizzük az $e^{\mathbf{A}} = \mathbf{C}e^{\mathbf{J}}\mathbf{C}^{-1}$ mátrix kiszámításával!

---

Mivel a minimálpolinom foka 6, ezért a Hermite-polinom legfeljebb 5-öd fokú lehet, azaz az alakja

$$p(x) = \begin{bmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 & x^4 & x^5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_0 \\ p_1 \\ p_2 \\ p_3 \\ p_4 \\ p_5 \end{bmatrix}.$$

Az együtthatókat az exp() függvényre kell illeszteni az alábbi egyenletrendszer megoldásával

$$\begin{aligned}
p^{(0)}(\lambda_1) = f^{(0)}(\lambda_1) = e^{\lambda_1} &= p_0 + p_1(\lambda_1)^1 + p_2(\lambda_1)^2 + p_3(\lambda_1)^3 + p_4(\lambda_1)^4 + p_5(\lambda_1)^5 \\
p^{(0)}(\lambda_2) = f^{(0)}(\lambda_2) = e^{\lambda_2} &= p_0 + p_1(\lambda_2)^1 + p_2(\lambda_2)^2 + p_3(\lambda_2)^3 + p_4(\lambda_2)^4 + p_5(\lambda_2)^5 \\
p^{(1)}(\lambda_1) = f^{(1)}(\lambda_1) = e^{\lambda_1} &= p_1 + 2\,p_2(\lambda_1)^1 + 3\,p_3(\lambda_1)^2 + 4\,p_4(\lambda_1)^3 + 5\,p_5(\lambda_1)^4 \\
p^{(1)}(\lambda_2) = f^{(1)}(\lambda_2) = e^{\lambda_2} &= p_1 + 2\,p_2(\lambda_2)^1 + 3\,p_3(\lambda_2)^2 + 4\,p_4(\lambda_2)^3 + 5\,p_5(\lambda_2)^4 \\
p^{(2)}(\lambda_1) = f^{(2)}(\lambda_1) = e^{\lambda_1} &= 2\,p_2 + 6\,p_3(\lambda_1)^1 + 12\,p_4(\lambda_1)^2 + 20\,p_5(\lambda_1)^3 \\
p^{(2)}(\lambda_2) = f^{(2)}(\lambda_2) = e^{\lambda_2} &= 2\,p_2 + 6\,p_3(\lambda_2)^1 + 12\,p_4(\lambda_2)^2 + 20\,p_5(\lambda_2)^3
\end{aligned}$$

ennek egy **B** kibővített együtthatómátrixban felírt alakja

$$\mathbf{B} = \left[\begin{array}{cccccc|c}
1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & \lambda_1^3 & \lambda_1^4 & \lambda_1^5 & e^{\lambda_1} \\
1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & \lambda_2^3 & \lambda_2^4 & \lambda_2^5 & e^{\lambda_2} \\
0 & 1 & 2\lambda_1^1 & 3\lambda_1^2 & 4\lambda_1^3 & 5\lambda_1^4 & e^{\lambda_1} \\
0 & 1 & 2\lambda_2^1 & 3\lambda_2^2 & 4\lambda_2^3 & 5\lambda_2^4 & e^{\lambda_2} \\
0 & 0 & 2 & 6\lambda_1^1 & 12\lambda_1^2 & 20\lambda_1^3 & e^{\lambda_1} \\
0 & 0 & 2 & 6\lambda_1^2 & 12\lambda_2^2 & 20\lambda_2^3 & e^{\lambda_2}
\end{array}\right].$$

Ezt megoldva az alábbi Hermite-polinomot kaptam

$$p(x) = 0{,}011x^5 + 0{,}0609x^4 + 0{,}1556x^3 + 0{,}4195x^2 + 1{,}015x + 1{,}1097$$

és így a mátrixfüggvény a következőként írható fel

$$e^{\mathbf{A}} = p(\mathbf{A}) = 0{,}011\mathbf{A}^5 + 0{,}0609\mathbf{A}^4 + 0{,}1556\mathbf{A}^3 + 0{,}4195\mathbf{A}^2 + 1{,}015\mathbf{A} + 1{,}1097\mathbf{I}$$

tehát az eredmény

$$e^{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix}
-11{,}9909 & -6{,}4836 & -12{,}5155 & -4{,}5973 & -15{,}4390 & 5{,}7510 & 0{,}0803 & -4{,}0292 & 6{,}1567 & 9{,}1269 \\
-5{,}3518 & 4{,}0509 & -9{,}6436 & -7{,}3266 & -11{,}9283 & 2{,}7360 & 1{,}1771 & -1{,}0690 & 3{,}7538 & 0{,}1676 \\
-13{,}1461 & -9{,}0237 & -6{,}1842 & -6{,}5099 & -12{,}4907 & 9{,}3169 & -4{,}9713 & -7{,}0370 & 6{,}8683 & 9{,}9890 \\
8{,}8949 & 0{,}6690 & 6{,}6881 & 8{,}7805 & 9{,}9740 & -6{,}6282 & 3{,}3185 & 4{,}5432 & -2{,}7850 & -2{,}9367 \\
-12{,}8819 & -0{,}0067 & -12{,}3411 & -12{,}5790 & -15{,}9858 & 8{,}3151 & -2{,}9857 & -5{,}7182 & 4{,}4263 & 4{,}2191 \\
-69{,}2764 & -25{,}4329 & -64{,}9398 & -44{,}1866 & -84{,}9967 & 41{,}8899 & -9{,}6445 & -25{,}8067 & 29{,}5736 & 40{,}2980 \\
-59{,}9723 & -26{,}2801 & -58{,}5858 & -33{,}7755 & -71{,}9567 & 34{,}8687 & -5{,}8510 & -20{,}0077 & 22{,}8274 & 37{,}0463 \\
-20{,}6295 & -14{,}0487 & -30{,}0723 & -6{,}9105 & -25{,}3878 & 12{,}3848 & 4{,}6275 & 2{,}7093 & -2{,}3270 & 12{,}1729 \\
-34{,}1132 & -15{,}9060 & -37{,}8498 & -17{,}2047 & -42{,}1583 & 18{,}4710 & -0{,}0558 & -8{,}6691 & 10{,}9955 & 21{,}4381 \\
-14{,}2037 & -6{,}8951 & -13{,}7262 & -7{,}2279 & -16{,}6007 & 7{,}9168 & -1{,}2174 & -4{,}8738 & 5{,}1692 & 9{,}2067
\end{bmatrix}.$$

Ugyanez a mátrixfüggvény a Jordan-felbontást alkalmazva

$$e^{\mathbf{A}} = \mathbf{C}e^{\mathbf{J}}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}\left[\begin{array}{ccc|cc|cc|ccc}
e^{\lambda_1} & (e^{\lambda_1})' & \frac{(e^{\lambda_1})''}{2!} & & & & & & & \\
 & e^{\lambda_1} & (e^{\lambda_1})' & & & & & & & \\
 & & e^{\lambda_1} & & & & & & & \\
\hline
 & & & e^{\lambda_1} & (e^{\lambda_1})' & & & & & \\
 & & & & e^{\lambda_1} & & & & & \\
\hline
 & & & & & e^{\lambda_2} & (e^{\lambda_2})' & & & \\
 & & & & & & e^{\lambda_2} & & & \\
\hline
 & & & & & & & e^{\lambda_2} & (e^{\lambda_2})' & \frac{(e^{\lambda_2})''}{2!} \\
 & & & & & & & & e^{\lambda_2} & (e^{\lambda_2})' \\
 & & & & & & & & & e^{\lambda_2}
\end{array}\right]\mathbf{C}^{-1} =$$

$$= \mathbf{C}\left[\begin{array}{ccc|cc|cc|ccc}
e^{2} & e^{2} & \frac{e^{2}}{2!} & & & & & & & \\
 & e^{2} & e^{2} & & & & & & & \\
 & & e^{2} & & & & & & & \\
\hline
 & & & e^{2} & e^{2} & & & & & \\
 & & & & e^{2} & & & & & \\
\hline
 & & & & & e^{-2} & e^{-2} & & & \\
 & & & & & & e^{-2} & & & \\
\hline
 & & & & & & & e^{-2} & e^{-2} & \frac{e^{-2}}{2!} \\
 & & & & & & & & e^{-2} & e^{-2} \\
 & & & & & & & & & e^{-2}
\end{array}\right]\mathbf{C}^{-1} =$$

$$= \begin{bmatrix}
-11{,}5107 & -6{,}3715 & -12{,}1914 & -4{,}4828 & -14{,}9224 & 5{,}5726 & 0{,}0908 & -3{,}8944 & 5{,}9560 & 8{,}8933 \\
-5{,}3450 & 3{,}8987 & -9{,}5607 & -7{,}0673 & -11{,}7121 & 2{,}7352 & 1{,}1704 & -1{,}0370 & 3{,}6146 & 0{,}3166 \\
-13{,}1896 & -8{,}8834 & -6{,}2965 & -6{,}5760 & -12{,}5992 & 9{,}2258 & -4{,}8486 & -7{,}0107 & 6{,}7943 & 9{,}9401 \\
8{,}2940 & 0{,}4203 & 6{,}0807 & 8{,}5596 & 9{,}3351 & -6{,}2021 & 3{,}2423 & 4{,}4095 & -2{,}8357 & -2{,}6866 \\
-12{,}1697 & 0{,}1838 & -11{,}6181 & -12{,}0366 & -15{,}0586 & 7{,}8866 & -2{,}9031 & -5{,}5278 & 4{,}3379 & 3{,}9204 \\
-67{,}9544 & -25{,}0251 & -63{,}8230 & -43{,}1917 & -83{,}2678 & 41{,}0816 & -9{,}3573 & -25{,}3830 & 28{,}9158 & 39{,}5991 \\
-58{,}6745 & -25{,}7179 & -57{,}3791 & -33{,}0088 & -70{,}3311 & 34{,}0197 & -5{,}5199 & -19{,}6547 & 22{,}2654 & 36{,}2459 \\
-20{,}3816 & -13{,}7657 & -29{,}4758 & -6{,}8722 & -25{,}0061 & 12{,}1727 & 4{,}4005 & 2{,}5775 & -2{,}0380 & 12{,}0999 \\
-33{,}3554 & -15{,}5861 & -36{,}9963 & -16{,}7757 & -41{,}1422 & 18{,}0515 & -0{,}0767 & -8{,}5054 & 10{,}8358 & 20{,}9729 \\
-13{,}6582 & -6{,}6374 & -13{,}1748 & -6{,}9626 & -15{,}9174 & 7{,}6024 & -1{,}2115 & -4{,}7266 & 5{,}0541 & 9{,}0545
\end{bmatrix}.$$

Ha most az így kapott eredményt összevetjük a Hermite-polinommal számolttal, akkor pár százalékos eltérést tapasztalhatunk a végeredményképpen előállt mátrixok elemei között. Ezek csupán az eltérő kerekítésekből és csonkolásokból adódnak.

**4.** Számítsuk ki az $\mathbf{A}^{\frac{1}{3}}$ és a sgn($\mathbf{A}$) mátrixokat, ahol sgn az előjelfüggvény. Értelmezve volnának-e e függvények, ha az $\mathbf{A}$ egyik sajátértéke 0 lenne?

---

Ehhez a feladathoz ismét a mátrix Jordan-felbontását használtam az alábbi módon

$$\mathbf{A}^{\frac{1}{3}} = \mathbf{C}(\mathbf{J})^{\frac{1}{3}}\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}\left[\begin{array}{c|c|c|c} \begin{matrix} (\lambda_1)^{\frac{1}{3}} & ((\lambda_1)^{\frac{1}{3}})' & \frac{((\lambda_1)^{\frac{1}{3}})''}{2!} \\ & (\lambda_1)^{\frac{1}{3}} & ((\lambda_1)^{\frac{1}{3}})' \\ & & (\lambda_1)^{\frac{1}{3}} \end{matrix} & & & \\ \hline & \begin{matrix} (\lambda_1)^{\frac{1}{3}} & ((\lambda_1)^{\frac{1}{3}})' \\ & (\lambda_1)^{\frac{1}{3}} \end{matrix} & & \\ \hline & & \begin{matrix} (\lambda_2)^{\frac{1}{3}} & ((\lambda_2)^{\frac{1}{3}})' \\ & (\lambda_2)^{\frac{1}{3}} \end{matrix} & \\ \hline & & & \begin{matrix} (\lambda_2)^{\frac{1}{3}} & ((\lambda_2)^{\frac{1}{3}})' & \frac{((\lambda_2)^{\frac{1}{3}})''}{2!} \\ & (\lambda_2)^{\frac{1}{3}} & ((\lambda_2)^{\frac{1}{3}})' \\ & & (\lambda_2)^{\frac{1}{3}} \end{matrix} \end{array}\right]\mathbf{C}^{-1} =$$

$$= \mathbf{C}\left[\begin{array}{c|c|c|c} \begin{matrix} (2)^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}(2)^{-\frac{2}{3}} & \frac{-\frac{2}{9}(2)^{\frac{-5}{3}}}{2!} \\ & (2)^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}(2)^{-\frac{2}{3}} \\ & & (2)^{\frac{1}{3}} \end{matrix} & & & \\ \hline & \begin{matrix} (2)^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}(2)^{-\frac{2}{3}} \\ & (2)^{\frac{1}{3}} \end{matrix} & & \\ \hline & & \begin{matrix} (-2)^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}(-2)^{-\frac{2}{3}} \\ & (-2)^{\frac{1}{3}} \end{matrix} & \\ \hline & & & \begin{matrix} (-2)^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}(-2)^{-\frac{2}{3}} & \frac{-\frac{2}{9}(-2)^{\frac{-5}{3}}}{2!} \\ & (-2)^{\frac{1}{3}} & \frac{1}{3}(-2)^{-\frac{2}{3}} \\ & & (-2)^{\frac{1}{3}} \end{matrix} \end{array}\right]\mathbf{C}^{-1}$$

és

$$sgn(\mathbf{A}) = \mathbf{C}\left[\begin{array}{c|c|c|c} \begin{matrix} sgn(\lambda_1) & sgn(\lambda_1)' & \frac{sgn(\lambda_1)''}{2!} \\ & sgn(\lambda_1) & sgn(\lambda_1)' \\ & & sgn(\lambda_1) \end{matrix} & & & \\ \hline & \begin{matrix} sgn(\lambda_1) & sgn(\lambda_1)' \\ & sgn(\lambda_1) \end{matrix} & & \\ \hline & & \begin{matrix} sgn(\lambda_2) & sgn(\lambda_2)' \\ & sgn(\lambda_2) \end{matrix} & \\ \hline & & & \begin{matrix} sgn(\lambda_2) & sgn(\lambda_2)' & \frac{sgn(\lambda_2)''}{2!} \\ & sgn(\lambda_2) & sgn(\lambda_2)' \\ & & sgn(\lambda_2) \end{matrix} \end{array}\right]\mathbf{C}^{-1} =$$

$$= \mathbf{C}\left[\begin{array}{c|c|c|c} \begin{matrix} sgn(2) & 0 & 0 \\ & sgn(2) & 0 \\ & & sgn(2) \end{matrix} & & & \\ \hline & \begin{matrix} sgn(2) & 0 \\ & sgn(2) \end{matrix} & & \\ \hline & & \begin{matrix} sgn(-2) & 0 \\ & sgn(-2) \end{matrix} & \\ \hline & & & \begin{matrix} sgn(-2) & 0 & 0 \\ & sgn(-2) & 0 \\ & & sgn(-2) \end{matrix} \end{array}\right]\mathbf{C}^{-1}.$$

Az $\mathbf{x}^{\frac{1}{3}}$ függvény az értelmezési tartományának minden pontjában akárhányszor deriválható, így nulla sajátérték esetén sem okozna ez problémát a mátrixfüggvény kiértékelésében. Viszont az előjelfüggvénynek a nullában szakadása van, ezért ott nem létezik deriváltja és így a mátrixfüggvényt sem lehetne erre az esetre értelmezni.

$$
\mathbf{P} = \begin{bmatrix}
0 & 0{,}3462 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0{,}6538 & & & & & & & & \\
0{,}4942 & 0 & 0{,}5058 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & & & & & & & & \\
0 & 0{,}7791 & 0 & 0{,}2209 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0{,}7150 & 0 & 0{,}2850 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0{,}9037 & 0 & 0{,}0963 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}8909 & 0 & 0{,}1091 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}3342 & 0 & 0{,}6658 & 0 & 0 \\
0 & 0 & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}6987 & 0 & 0{,}3013 & 0 \\
0 & 0 & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}1978 & 0 & 0{,}8022 \\
0 & 0 & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}0305 & 0 \\
0{,}9695 & 0 & & & & & & & & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0{,}7441 \\
0 & 0{,}2559 & & & & & & & & \\
0{,}5000 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0{,}5000 & 0 & & & & & & & &
\end{bmatrix}
$$