

1. feladat (10 pont)

Oldja meg az alábbi differenciálegyenlet-rendszert!

$$\dot{x} = \begin{pmatrix} 4 & -6 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} x$$

2. feladat (13 pont)

$$f_n(x) = \frac{x^2 n^4}{x^2 n^4 + 5}$$

a) $f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) = ? \quad D_f = ?$

b) Egyenletesen konvergens-e a függvénysorozat a $[0, 1]$ illetve az $[1, 2]$ intervallumon?

3. feladat (16 pont)

a)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n (2x)^n}{n^2 5^n}$$

Adja meg a sor konvergencia tartományát és abszolút konvergencia tartományát!
Egyenletesen konvergens-e a sor a teljes konvergencia-tartományon? Indokoljon!

b)

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-2x)^n}{n^2 5^n}$$

Adja meg a sor konvergencia tartományát!

4. feladat (16 pont)

$$f(x) = x \operatorname{sh}(2x^2)$$

a) Írja fel az f függvény $x_0 = 0$ pontra támaszkodó Taylor sorát és adja meg annak konvergencia tartományát!

b) $f^{(100)}(0) = ?$, $f^{(99)}(0) = ?$ (A sorfejtésből adjon választ!) (A sorfejtésből adjon választ!)

c) Írja fel f deriváltfüggvényének $x_0 = 0$ pontra támaszkodó Taylor-sorát! Indokoljon!

5. feladat (8 pont)

Írja fel az

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{1-2x^3}}$$

függvény $x_0 = 0$ pontra támaszkodó Taylor-sorát és adja meg annak konvergencia sugarát!
Írja fel a sor első négy nem nulla tagját elemi műveletekkel!

6. feladat (18 pont)

$$f(x, y) = \begin{cases} x \sin \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & \text{ha } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & \text{ha } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) Folytonos-e f az origóban?

b) Írja fel az f'_x és f'_y függvényeket, ahol azok léteznek!

c) $\max_{\underline{d}} \frac{df}{d\underline{e}} \Big|_{(1/\pi, 0)} = ?$ Milyen irányban kaphuk? ($\underline{e} = ?$)

7. feladat (9 pont)

$$g(x, y) = f(4x^2y + y^2), \quad f \in C_{\mathbb{R}}^2$$

a) $g''_{xy} = ?$

b) Az f függvény $x_0 = 0$ pontra támaszkodó másodrendű Taylor-polinomja:

$$T_2(x) = 8 + 3x + \frac{x^2}{8}$$

$$f'(0) = ?, \quad f''(0) = ?, \quad g''_{xy}\left(\frac{1}{2}, -1\right) = ?$$

8. feladat (8 pont)

$$u(x, y, z) = 2x^2 + 3y^2 + z^4 + 1$$

Írja fel a függvény $P_0(1, -1, -1)$ ponton áthaladó szintfelület egyenletét!

Írja fel ezen szintfelület P_0 pontbeli érintősíkjának egyenletét!

Pótfeladat (csak az elégségeshez):

9. feladat (10 pont)

Írja fel az alábbi függvény megadott ponthoz tartozó Taylor sorát és adja meg annak konvergencia tartományát!

a) $f(x) = \frac{1}{x^2 + 6} \quad x_0 = 0$

b) $g(x) = \frac{1}{x + 5} \quad x_0 = 2$