

**1. feladat (15 pont)**

a)

$$a_n = \left(\frac{3n+1}{4n+2}\right)^n, \quad b_n = \left(\frac{4n+1}{4n+2}\right)^n, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n =? \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n =?$$

b) Konvergens-e a  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$  sor? (Állítását igazolja!)**2. feladat (15 pont)**a) Mit értünk azon, hogy  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = A$ ? ( $x_0, A \in \mathbb{R}$ )

b) Mondja ki a függvény határértékére vonatkozó átviteli elvet! Igazolja az állítást az egyik irányban!

**3. feladat (17 pont)**

$$f(x) = \begin{cases} (x-2) \ln(x-2), & \text{ha } x > 2, \\ 0, & \text{ha } x = 2, \\ \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2-x}\right), & \text{ha } x < 2. \end{cases}$$

a) Hol nem folytonos a függvény? (Indokoljon!) A szakadási pont(ok)ban határozza meg a függvény bal és jobboldali határértékét, és döntse el, hogy milyen típusú szakadásról van szó!

b) Hol nem differenciálható a függvény? (Indokoljon!) Adja meg a függvény deriváltját, ahol létezik!

**4. feladat (13 pont)**

a) Írja le az inverzfüggvény deriválási szabályát!

b) Ennek segítségével bizonyítsa be, hogy  $x > 1$  esetén  $(\operatorname{arch} x)' = \frac{1}{\sqrt{x^2-1}}$ !

c)

$$\left(\operatorname{arch}(e^{3x^2+1})\right)' = ?$$

5. feladat\* (8 pont)

$$\int \frac{3x+1}{x^2-x-6} dx = ?$$

6. feladat\* (12 pont)

$$a) \int (2x-1)e^{-3x} dx = ? \quad b) \int (2x+1) \arctg(x) dx = ?$$

7. feladat\* (12 pont)

Az adott helyettesítéssel határozza meg a következő integrálokat!

$$a) \int \frac{3x}{\sqrt{4+(3x+1)^2}} dx = ? \quad \text{sh}(t) = \frac{3x+1}{2}$$
$$b) \int_0^2 \frac{e^{2x}}{e^x+3} dx = ? \quad t = e^x$$

8. feladat\* (8 pont)

a) Mondja ki az integrálszámítás II. alaptételét! (A tétel az integrálfüggvényről szól.)

b)

$$G(x) = \int_0^{x^2} \sqrt{\sin^4(t) + 2} dt, \quad G'(x) = ?$$

---

*Pótfeladatok (csak a közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki):*

9. feladat (10 pont)

$$f(x) = e^{-3x^2}$$

a) Melyek azok a legbővebb intervallumok, ahol a függvény monoton növekvő illetve csökkenő?

b) Melyek azok a legbővebb intervallumok, ahol a függvény konvex illetve konkáv?

c) Vázlatosan ábrázolja a függvényt!

10. feladat (10 pont)

Konvergensek-e az alábbi sorok? (A választ indokolja!)

$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{n^2+2}, \quad b) \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{n^2+2}$$

---

A \*-gal jelölt feladatokból legalább 16 pontot kell elérni!