Algoritmuselmélet vizsgazárthelyi
2015. január 7.

1. Írja le a (bináris) kupac fával történő megvalósítását, a kupactulajdonsággal együtt! Melyek az alapvető műveletei, ezek mit csinálnak és mennyi a lépésszámuk? (A lépésszámokat nem kell indokolni, a műveletek megvalósításának részleteit nem kell leírni, csak szavakban megfogalmazni, hogy mi a feladatuk.)
2. Írja le egy már topologikusan rendezett gráfban az első csúcsból a többibe vezető legrövidebb út hosszának meghatározására szolgáló lineáris idejű algoritmust és magyarázza meg, hogy ez miért helyes!
3. Írja le a minimális feszítőfák keresésére szolgáló piros-kék algoritmus piros és kék szabályát! Indokolja meg, hogy a Jarnik–Prim-algoritmus miért a piros-kék algoritmus egy megvalósítása!

---

4. Egy 7 fekete magasságú piros-fekete fában n adatot tárolunk. Milyen értékeket vehet fel n, ha ugyanezeket az adatokat egy 5 magasságú 2-3 fában is tudjuk tárolni?
5. Az $\mathcal{A}$ eldöntési problémában adott egy G egyszerű gráf, és az a kérdés, hogy G csúcsainak színezéséhez szükséges-e legalább 4 szín. Igazolja, hogy a PRÍM $\prec \mathcal{A}$ Karp-redukció létezik!
6. P-beli vagy NP-teljes az alábbi probléma?
   Legyenek adottak az $s_1, s_2, \ldots, s_n$ pozitív egész számok. Azt szeretnénk eldönteni, hogy be lehet-e ezeket osztani három diszjunkt halmazba úgy, hogy az első halmazbeli számok összege megegyezzen a második halmazbeli számok összegével, és a harmadik halmazbeli számok összege legfeljebb 100 legyen.
7. Adott egy $G = (V, E)$ irányítatlan, egyszerű gráf, melyben minden $v \in V$ csúcshoz tartozik egy c_v súly, ami tetszőleges egész szám lehet. A G gráf legfeljebb 2015 elemű független csúcshalmazai közül keressünk olyat, melyben a csúcsok súlyainak összege maximális. Fogalmazza meg a kérdést egészértékű programozási feladatként! (A feladatot nem kell megoldani, csak átfogalmazni!)
8. A $G = (V, E)$ éllistájával adott, összefüggő gráf egy úthálózatot ír le, az élek súlya a megfelelő útszakasz megtételéhez szükséges időt jelzi (egy rögzített átlagsebesség mellett). A kiadott terv szerint az $A \in V$ pontból a $B \in V$ pontba az $A = X_0, X_1, X_2, \ldots, X_k = B$ legrövidebb úton kell eljutnunk, amely szintén adott. Szeretnénk azonban útba ejteni az útvonalon nem szereplő $C \in V$ pontot úgy, hogy a C-be eljutást valamely X_i és X_{i+1} közé iktatjuk be. Célunk, hogy a B pontba érkezésünk időpontja a lehető legkevesebbel térjen el a kiadott útvonal időtartamától (ha ugyanazzal az átlagsebességgel haladunk). Ha a kitérő alkalmával átmegyünk egy X_j ponton, attól azt még a kiadott útitervnek megfelelő helyen is érintenünk kell.
   Adjon algoritmust, amely $O(e \log n)$ lépésben meghatározza, hogy a kiadott útvonalon hova iktassuk be ezt a kitérőt (e jelöli a gráf éleinek, n a pontjainak számát)!