Villamosmérnök A2 (2017 tavasz) **2. szigorlat ZH**

Minden feladat 12 pontos, tehát összesen 60 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

1. $\iint_H \sqrt{2}x = ?$ ha H az $y = x/2$, $y = 2x$ és $y = 1/x$ görbék által határolt tartomány.

Megoldás.

$$\iint_H \sqrt{2}x = \int_0^{1/\sqrt{2}} \int_{x/2}^{2x} \sqrt{2}x \, dydx + \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{x/2}^{1/x} \sqrt{2}x \, dydx$$ 6

$$= \int_0^{1/\sqrt{2}} \sqrt{2}\Big[xy\Big]_{x/2}^{2x} dx + \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{2}\Big[xy\Big]_{x/2}^{1/x} dx = \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{3}{\sqrt{2}}x^2 \, dx + \int_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \sqrt{2} - \frac{x^2}{\sqrt{2}} \, dx$$ 6

$$= \left[\frac{x^3}{\sqrt{2}}\right]_0^{1/\sqrt{2}} + \left[\sqrt{2}x - \frac{x^3}{3\sqrt{2}}\right]_{1/\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} dx = \frac{2}{3}.$$

2. Legyen $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^3}$ és $g(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$. Számítsa ki f és g 100. deriváltját az origóban, ha léteznek! 9, 3

Megoldás. $\frac{1}{\lim_n \sqrt[n]{1/n^3}} = 1$ miatt az f-et definiáló hatványsor konvergens $(-1,1)$-en, tehát f akárhányszor deriválható 0-ban, és az őt definiáló függvénysor a saját Taylor-sora, azaz x^{100} együtthatója egyrészt $\frac{f^{(100)}(0)}{100!}$, másrészt $\frac{1}{100^3}$. Következésképp $f^{(100)}(0) = \frac{100!}{100^3}$.
$\frac{1}{\lim_n \sqrt[n]{n^n}} = 0$ miatt g csak a 0-ban értelmes, tehát nem deriválható ott.

3. Hány dimenziós $\mathbb{R}^4$-nek a $v_1 = (2\ 4\ 5\ 2)^T$, $v_2 = (3\ {-1}\ 4\ 1)^T$, $v_3 = (0\ 14\ 7\ 4)^T$ és $v_4 = (1\ 9\ 6\ 3)^T$ vektorok által kifeszített altere? Adja meg ennek egy bázisát, és írja fel ebben a bázisban mind a négy vektort!

4 4 4

Megoldás.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & -1 & 14 & 9 \\ 5 & 4 & 7 & 6 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3/2 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & -7/2 & 7 & 7/2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

miatt v_1, v_2 bázisa az altérnek, ami így kétdimenziós, és $v_3 = 3v_1 - 2v_2$, $v_4 = 2v_1 - v_2$.

4. Számítsa ki az $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ mátrix sajátértékeit és a hozzájuk tartozó sajátaltereket!

Megoldás. A karakterisztikus polinom $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(\lambda-1)(\lambda+1)$ gyökei -1 és 1. 5 7

A -1 sajátértékhez tartozó sajátaltér $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ magtere, azaz $c\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Az 1 sajátértékhez tartozó sajátaltér $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{O_1 \leftrightarrow O_3}{\sim} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ magtere, azaz (az oszlopcsere miatt) $c_1\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

VAGY: a mátrix az $y = z$ síkra való tükrözés mátrixa $\mathbb{R}^3$ szokásos bázisában, ezért az $y = z$ sík sajátaltér 1 sajátértékkel, az origón átmenő, az $y = z$ síkra merőleges egyenes pedig sajátaltér -1 sajátértékkel.

6*2 **5.** (a) Adjon meg egy elégséges feltételt arra, hogy ha a kétváltozós, valós értékű f függvénynek léteznek a másodrendű parciális deriváltjai az a pontban, akkor $f_{xy}(a) = f_{yx}(a)$!
(b) Mi a legfeljebb másodfokú polinomok terén a deriváltoperátor ($Dp(x) = p'(x)$) mátrixa az $1, x, x^2$ bázisban felírva?
(c) Igazak-e a következő állítások?
(c1) $\mathbb{R}^2$ minden részhalmaza vagy nyílt, vagy zárt?
(c2) $\int_{-1}^{1}\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} 1 \, dydx = \pi$
(c3) Ha a $\sum a_n$ sor konvergens, akkor az a_n sorozat is konvergens.
(c4) Ha egy háromszögmátrix főátlójában csupa nem-0 szám áll, akkor a mátrix invertálható?

Megoldás. (a) A másodrendű parciális deriváltfüggvényei léteznek a egy környezetében és folytonosak a-ban.
(b) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
(c1) Nem, pl.: $\{(x,0) : x \in (0,1)\}$ nem nyílt, mert (nem üres, de) nincs is belső pontja, és nem zárt, mert $(0,0)$ olyan torlódási pontja, amelyet nem tartalmaz.
(c2) Igen, mert ez az egységsugarú kör területe.
(c3) Igen: $a_n \to 0$ szükséges feltétele a sor konvergenciájának.
(c4) Igen, mert háromszögmátrix determinánsa a főátlóban álló elemek szorzata, és a determináns pontosan akkor nem 0, ha a mátrix invertálható.

IMSc-feladat. Abból, hogy $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n|a_n|$ divergens, következik-e, hogy $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ is divergens?

Megoldás. Nem. Legyen $a_n = \begin{cases} \frac{1}{k+1} & \text{ha } n = 4k \\ \frac{-1}{3(k+1)} & \text{ha } n = 4k+\ell,\ \ell \in \{1,2,3\} \end{cases}$; akkor $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergens, sőt, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = 0$, mert a részletösszegek sorozata négy 0-hoz tartó sorozat összefésültje: $\sum_{n=0}^{4k} a_n = \frac{1}{k+1}$, $\sum_{n=0}^{4k+1} a_n = \frac{2}{3(k+1)}$, $\sum_{n=0}^{4k+2} a_n = \frac{1}{3(k+1)}$, és $\sum_{n=0}^{4k+3} a_n = 0$. De $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n|a_n| = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \frac{1}{6} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{3n} + \frac{1}{3n} - \frac{1}{3n} + \ldots$ divergens, mert tegyük fel, hogy nem. Akkor minden „bezárójelezettje” is konvergens (ez volt előadáson, de könnyű látni, hiszen a bezárójelezett sor részletösszegeinek sorozata részsorozata az eredeti sor részletösszegei sorozatának), tehát

$$1 - \frac{1}{3} + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\right) + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{6}\right) + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{3n} + \left(\frac{1}{3n} - \frac{1}{3n}\right) + \ldots$$
$$= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{3n} + \ldots = \frac{2}{3} + \frac{2}{6} + \ldots + \frac{2}{3n} \ldots = \frac{2}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$$

is konvergens kellene legyen, ami ellentmondás.