# Villamosmérnök A3 (2017 ősz) 1. ZH

Minden feladat 12 pontos, tehát összesen 60 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

**1.** Oldja meg a $\sin y - y\sin x + y'(y + \cos x + x\cos y) = 0$ differenciálegyenletet!

**Megoldás.** Az egyenlet egzakt, mert $\frac{d}{dy}(\sin y - y\sin x) = \cos y - \sin x = \frac{d}{dx}(y + \cos x + x\cos y)$. Kell $u = u(x, y)$, amire $u_x = \sin y - y\sin x$ és $u_y = y + \cos x + x\cos y$. Az elsőből $u = \int \sin y - y\sin x\, dx = x\sin y + y\cos x + c(y)$, amiből a második miatt $y + \cos x + x\cos y = u_y = x\cos y + \cos x + c'(y)$, vagyis $c'(y) = y$ és így $c(y) = y^2/2 + c$, tehát $u = y^2/2 + x\sin y + y\cos x + c$, és így az általános megoldás $c = y^2/2 + x\sin y + y\cos x$.

**2.** Oldja meg az $y' = y/(x - y)$ differenciálegyenletet!

**Megoldás.** $y \equiv 0$ szinguláris megoldás.

Homogén fokszámú, szétválaszthatóra visszavezethető: $y' = f(y/x)$, ahol $f(u) = u/(1 - u)$. Legyen $u = y/x$; akkor $u' = \frac{1}{x}\frac{u^2}{1-u}$ szétválasztható. Ennek megoldása:

$$c + \ln|x| = \int \frac{1}{x}\, dx = \int \frac{1-u}{u^2}\, du = -\frac{1}{u} + \ln\frac{1}{|u|}$$

$$\rightsquigarrow c_1|x| = \frac{e^{-1/u}}{|u|} \quad (c_1 > 0) \rightsquigarrow \text{(Bolzano miatt)} \quad cx = \frac{e^{-1/u}}{u} \quad (c \neq 0)$$

Ebből $x = y/u$ miatt $cy = e^{-1/u} = e^{-x/y}$

**3.** Oldja meg az $\begin{cases} y_1' &= \frac{7}{3}y_1 + \frac{2}{3}y_2 - 5e^t \\ y_2' &= \frac{4}{3}y_1 + \frac{5}{3}y_2 - 8e^t \end{cases}$ differenciálegyenletrendszert!

**Megoldás.** (1) Homogén általános megoldása. $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \frac{7}{3} & \frac{2}{3} \\ \frac{4}{3} & \frac{5}{3} \end{pmatrix}$ sajátértékei és a hozzájuk tartozó sajátvektorok: $\lambda = 1$, $\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ és $\lambda = 3$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Tehát $\mathbf{\Psi} = \begin{pmatrix} e^t & e^{3t} \\ -2e^t & e^{3t} \end{pmatrix}$ oszlopai alaprendszer, azaz a homogén általános megoldása $\mathbf{\Psi c}$.
(2) Inhomogén partikuláris megoldása. $\mathbf{\Psi c}' = \begin{pmatrix} -5e^t \\ -8e^t \end{pmatrix}$ egyenletrendszer kibővített mátrixa: $\begin{pmatrix} e^t & e^{3t} & -5e^t \\ -2e^t & e^{3t} & -8e^t \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -6e^{-2t} \end{pmatrix}$; megoldása: $c_1'(t) = 1$, $c_2' = -6e^{-2t}$, amiből $c_1(t) = t$, $c_2(t) = 3e^{-2t}$, tehát $y_{ip1} = (t + 3)e^t$, $y_{ip2} = (-2t + 3)e^t$, következésképp $y_{ia1} = (c_1 + t + 3)e^t + c_2e^{3t}$, $y_{ia2} = (3 - 2t - 2c_1)e^t + c_2e^{3t}$.

**4.** Oldja meg az $y'' - 2y' + y = e^t\cos t$ differenciálegyenletet!

**Megoldás.** $y_{ha}$: a karakterisztikus egyenletnek 1 kétszeres gyöke, ezért $y_{ha} = c_1e^t + c_2te^t$. $y_{ip}$: $e^t\cos t = e^{1t}(1\cdot\cos 1t + 0\cdot\sin 1t)$, $1 + j$ nem gyöke a karakterisztikus egyenletnek és 1 nulladfokú polinom, ezért $y_{ip}$-t $e^t(P\cos t + Q\sin t)$, $P$, $Q \in \mathbb{R}$ alakban keressük. De akkor $y_{ip}' = e^t((P + Q)\cos t + (P + Q)\sin t)$, $y_{ip}'' = e^t(2Q\cos t - 2P\sin t)$, visszahelyettesítve így $e^t\cos t = -e^t(P\cos t + Q\sin t)$-t, azaz $P = -1$, $Q = 0$-t kapjuk, vagyis $y_{ip} = -e^t\cos t$.

Az általános megoldás tehát $y_{ia} = y_{ha} + y_{ip} = c_1e^t + c_2te^t - e^t\cos t$.

**5.** Oldja meg az $y'' + 4y' + 4y = te^{-2t}$, $y(0) = -1$, $y'(0) = 0$ kezdetiérték-problémát Laplace-transzformáció segítségével!

**Megoldás.** $\frac{1}{(s+2)^2} = \mathfrak{L}\{y''\} + 4\mathfrak{L}\{y'\} + 4\mathfrak{L}\{y\} = (s^2 + 4s + 4)Y + s + 4$, amiből $Y = \frac{1}{(s+2)^4} - \frac{s+4}{(s+2)^2} = \frac{1}{(s+2)^4} - \frac{1}{s+2} - \frac{-2}{(s+2)^2}$, visszatranszformálva: $y = e^{-2t}(t^3/6 - 1 - 2t)$. Használtuk, hogy $\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^4}\right\} = e^{-2t}\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^4}\right\} = e^{-2t}t^3/6$ és $\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(s+2)^2}\right\} = e^{-2t}\mathfrak{L}^{-1}\left\{\frac{1}{s^2}\right\} = e^{-2t}t$.