1. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

1997/98 tél I. évf. 13.-18.tk.

1. Döntse el, hogy fennáll–e minden A és B halmaz esetén a $(A \cup B) \setminus B = A$ összefüggés! Ha nem, adjon szükséges és elégséges feltételt arra, hogy mikor áll fenn!
MO. $(A \cup B) \setminus B = A$ iff A és B diszjunktak, hiszen egyrészt $(A \cup B) \setminus B = A \rightsquigarrow$ ha $x \in A$, akkor $x \notin B$, másrészt $A \cap B = \emptyset \rightsquigarrow x \in A$ iff $x \in A \cup B$ és $x \notin B$.

2. Határozza meg az $e:\ x = 2 + 3t,\ y = 1 - t,\ z = -1 - t$ egyenes vetületének egyenletét az $S:\ x - 3y + 2z = 1$ síkra!
MO. 1) $P_1 = e \cap S$ meghatározása: $2 + 3t - 3(1 - t) + 2(-1 - t) = 1 \rightsquigarrow -4 + 4t = 0 \rightsquigarrow t = 1 \rightsquigarrow P_1 = (5, 0, -2)$. 2) Valamely $e_1 \perp S$-re $P_2 = e_1 \cap S$ meghatározása: Legyen $P_2' = e(0) = (2, 1, -1) \rightsquigarrow e_1 :\ x = 2 + t,\ y = 1 - 3t,\ z = -1 + 2t \rightsquigarrow 2 + t - 3(1 - 3t) + 2(-1 + 2t) = 1 \rightsquigarrow -4 + 14t = 0 \rightsquigarrow t = 2/7 \rightsquigarrow P_2 = 1/7(16, 1, -3)$. Ebből már a $P_2 - P_1$ irányú vetületegyenes meghatározható: $x = 5 + 16/7\, t,\ \ y = 1/7\, t,\ \ z = -2 - 3/7\, t$.

3. $\lim\limits_{n \longrightarrow \infty} (1 + \frac{1}{n})^{\frac{1}{n}} = ?$
MO. Csendőrelvvel a határérték 1, mert: $1 \le (1 + \frac{1}{n})^{\frac{1}{n}} \le (1 + 1)^{\frac{1}{n}} = 2^{\frac{1}{n}} \longrightarrow 1$.

4. Milyen összefüggés van az alábbi két állítás között?
a. (a_n) konvergens
b. (a_n^2) konvergens
MO. (a_n) konvergens $\rightsquigarrow (a_n^2)$ konvergens, mert konvergens hatványai is azok, de fordítva nem igaz, csak annyi, hogy (a_n^2) konvergens $\rightsquigarrow (|a_n|)$ konvergens, például ha $a_n = (-1)^n$, akkor (a_n^2) konvergens, de persze (a_n) nem konvergens.

5. Legyen $f(x) = x \sin \frac{1}{x}$. $\quad \lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x) = ?\quad \lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x) = ?$
MO. $\lim\limits_{x \longrightarrow 0} f(x) = 0$, mert csendőrelvvel $0 \le |f(x)| \le |x| \longrightarrow 0$ és $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x) = 0$, mert az $x = 1/y$ helyettesítéssel $f(1/y) = \dfrac{\sin y}{y} \longrightarrow 1$, ha $y \longrightarrow 0$, így $\lim\limits_{x \longrightarrow \infty} f(x) = \lim\limits_{y \longrightarrow 0+} f(1/y) = 1$.

6. Felveszi–e maximumát az $f(x) = \dfrac{1 + x}{1 + x^2}$ függvény a $(-\infty, \infty)$ intervallumon? Ha igen, hol?
MO. Igen, az $x_2 = -1 + \sqrt{2}$ pontban, ugyanis $f'(x) = \dfrac{1 + x^2 - 2x(1 + x)}{(1 + x^2)^2} = \dfrac{1 - 2x - x^2}{(1 + x^2)^2} = 0$ iff $x = -1 \pm \sqrt{2}$ és nyilván ($1 - 2x - x^2$ lefelé fordított parabóla) az $x_1 = -1 - \sqrt{2},\ \ x_2 = -1 + \sqrt{2}$ jelöléssel f $(-\infty, x_1]$–en csökken, $[x_1, x_2]$–nő, majd $[x_2, \infty)$–n újra csökken, tehát, mivel $f(x)$ negatív a $(-\infty, -1)$ intervallumon, $f(x) \le 0 = f(-1) \le f(x_2)$ ha $x \le -1$, $\ f(x) \le f(x_2)$ ha $x_1 \le -1 \le x \le x_2$ és $f(x) \le f(x_2)$ ha $x_2 \le x$.

7. Van–e szakadása, és ha igen, milyen tipusú, az $f(x) = x^2 \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x}$ $x \neq 0,\ f(0) = 0$ függvény deriváltjának az origóban?
MO. Nincs, f' folytonos az origóban, hiszen $f'(0) = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} \dfrac{x^2 \operatorname{arctg} \frac{1}{x} - 0}{x} = \lim\limits_{x \longrightarrow 0} x \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} = 0$ hisz arctg korlátos és ugyanezen okból ha $x \neq 0$, akkor $f'(x) = 2x \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} + x^2 \dfrac{1}{1 + \frac{1}{x^2}} (-\dfrac{1}{x^2}) = 2x \operatorname{arctg} \dfrac{1}{x} + -x^2 \dfrac{1}{1 + x^2}$ így $f'(x) \longrightarrow 0$, ha $x \longrightarrow 0$, hisz a második tag nyilván mindenütt folytonos és az origóban 0.

8. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x + 1} dx = ?$
MO. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x}{x + 1} dx = \int_0^1 \frac{x + 1 - 1}{x + 1} dx = \int_0^1 1 - \frac{1}{x + 1} dx = x - \ln|x + 1| \Big|_0^1 = 1 - \ln 2 - (0 - \ln 1) = 1 - \ln 2$