VillamosMSc Mat „Sztochasztika2" pótpót ZH 2013 ősz, 2013.12.18 ~~2013.12.19~~ -1/2- Mogy
~~InfoMSc~~

① Ha Móricka dobása k, akkor Pistike dobásainak száma $\frac{7-k}{6}$ paraméterű geometriai eloszlású. Vagyis, ha X a Pistike dobásainak száma, Y pedig a Mórickáé, akkor $\mathbb{E}(X \mid Y=k) = \frac{1}{\frac{7-k}{6}} = \frac{6}{7-k}$; $k=1,2,3,4,5,6.$

Így a teljes várható érték tétel miatt

$$\mathbb{E}X = \sum_{k=1}^{6} P(Y=k)\,\mathbb{E}(X \mid Y=k) = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{6}\cdot\frac{6}{7-k} = \frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6} = \underline{2.45}$$

② A kis- és a nagyenergiájú α-k érkezési időpontjai független Poisson-folyamatok, ezek közül a detektált α-k ~~száma~~ is két független Poisson-folyamat, így az összes detektált α is Poisson-folyamat szerint érkezik. Ennek rátája

$$\lambda_{\text{összes detektált}} = \lambda_{\text{kis } E \text{ detektált}} + \lambda_{\text{nagy } E \text{ detektált}} =$$

$$= 0.2\cdot\lambda_{\text{kis } E} + 0.9\cdot\lambda_{\text{nagy } E} = 0.2\cdot 3 + 0.9\cdot 1 = 1.5$$

Így ha X a $[0;2]$-ben detektált részecskék száma, akkor

$$X \sim Poi(2\cdot\lambda_{\text{összes detektált}}) = Poi(3),$$

vagyis $\mathbb{P}(X=k) = e^{-3}\frac{3^k}{k!}$ $\quad k=0,1,2,\ldots$

Ezért $\mathbb{P}(X \geq 4) = 1-[\mathbb{P}(X=0)+\ldots+\mathbb{P}(X=3)] = 1-e^{-3}\left(1+3+\frac{3^2}{2}+\frac{3^3}{6}\right)$

$$= \underline{1-13e^{-3} \approx 0.353}$$

Villamos MSc Mat „Sztochasztika 2" pótpót ZH 2013 ősz, 2013.12.18 -2/2- Megy
Info MSc 2013.12.19

3) a.)

$$g_X(z) = E(z^X) = P(\text{azonnal lob.})\cdot E(z^X \mid \text{azonnal lob.}) + P(\text{nem az.})\, E(z^X \mid \text{nem az.}) =$$

$$= \frac{99}{100}\cdot z^0 + \frac{1}{100}\, g_{P\mathrm{Geom}(\frac{1}{100})}(z) = \frac{99}{100} + \frac{1}{100}\cdot\frac{1/100}{1-\frac{99}{100}z}$$

$$\boxed{g_X(z) = \frac{1}{100}\left[99 + \frac{1}{100-99z}\right]}$$

b.)

$$m := EX = P(\text{azonnal lob.})\, E(X \mid \text{azonnal lob.}) + P(\text{nem az.})\, E(X \mid \text{nem az.}) =$$

$$= \frac{99}{100}\cdot 0 + \frac{1}{100}\, E\left(P\mathrm{Geom}\left(\frac{1}{100}\right)\right) = 0 + \frac{1}{100}\left[\frac{1}{1/100} - 1\right] = \frac{99}{100}$$

$$\boxed{m = EX = \frac{99}{100}}$$

c.) Legyen Z_n az n-edik generáció elemszáma. Z_n elágazó folyamat, így

$$P(Z_2 = 0) = g(g(0)). \quad \text{Ehhez} \quad g(0) = \frac{1}{100}\left[99 + \frac{1}{100-0}\right] = 0{,}9901$$

$$g(g(0)) = \frac{1}{100}\left[99 + \frac{1}{100-99\cdot 0{,}9901}\right] \approx \underline{\underline{0{,}995}}$$

d.) $m<1$, vagyis a folyamat szubkritikus $\Rightarrow$ $\boxed{P(\text{kihalás}) = 1}$

e.) $N := Z_0 + Z_1 + Z_2 + \dots$ az összes fertőzött gép száma.

$m<1$, ezért $\boxed{EN = \frac{1}{1-m} = \frac{1}{1-\frac{99}{100}} = 100}$