1. feladat ()
Adja meg az alábbi hatványsor x_0 bázispontját, konvergenciasugarát és konvergencia-tartományát! Hol abszolút konvergens a hatványsor?

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+3)^n}{n^3 3^n}$$

Mo. A bázispont $x_0 = -3$. Gyökkritériummal adódik, hogy a konvergenciasugár $R = 3$. Az $x = -6$ és $x = 0$ esetet külön kell megvizsgálni, és mindkét végpontban abszolút konvergens sort kapunk. Emiatt a konvergenciatartomány a [-6,0] zárt intervallum. Ezen az intervallumon abszolút konvergens is a hatványsor.

---

2. feladat ()
Írja fel az

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{16 - x^2}}$$

függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor-sorát! Adja meg a sor konvergenciasugarát, az $f^{(4)}(0)$ értéket (elemi műveletekkel felírva), valamint írja fel az $f'(x)$ függvény Taylor-sorát is (ezt is az $x_0 = 0$ pontban)!

Mo. A binomiális sort kell alkalmazni.

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{16 - x^2}} = \ldots = \frac{1}{2}(1 + (-x^2/16))^{-1/4} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \binom{-1/4}{n} (-x^2/16)^n.$$

Ha $|-x^2/16| < 1$, akkor konvergens lesz a hatványsor, így a konvergenciasugár $R = 4$.

$f^{(4)}(0)$ az x^4-es tag együtthatójának 4!-szerese, azaz

$$f^{(4)}(0) = \frac{1}{2}\binom{-1/4}{2}\frac{4!}{16^2} = \frac{1}{2}\frac{(-1/4)\cdot(-5/4)}{2!}\frac{24}{16^2} = \frac{30}{16^3}.$$

Tagonkénti deriválással kapjuk, hogy

$$f'(x) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\binom{-1/4}{n} n(-x^2/16)^{n-1}\frac{-x}{8}.$$

3. feladat ()
Adja meg az alábbi határértékeket, amennyiben léteznek (szükség esetén vizsgálja a szereplő kétváltozós függvények értékeit az $y = x$, $y = 0$ és $y^3 = x$ görbék mentén)!

$$A) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy^3}{x^2 + y^6}, \qquad B) \quad \lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3xy^3}{x^2 + y^2}$$

Mo. Az első határérték nem létezik, mert a harmadik görbe mentén 3/2-hez, a másik két görbén pedig 0-hoz tartanak a függvényértékek (az origóhoz tartva).

A másik esetben mindkét görbén 0-hoz tartanak a függvényértékek, így át kell térni síkbeli polárkoordinátákra. Áttérés után látható, hogy a határérték 0.

4. feladat ()
Tekintsük az

$$f(x,y) = \begin{cases} \sin(x^2)/\sqrt{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y) \neq (0,0), \\ 0, & \text{ha } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

függvényt! Adja meg az $f'_x(x,y)$ és $f'_y(x,y)$ parciális deriváltakat az összes olyan pontban, ahol léteznek (az origóban a definícióval dolgozzunk)! Hol lesz totálisan deriválható az $f(x,y)$ függvény?

Mo. Az origón kívül:

$$f'_x(x,y) = \frac{\cos(x^2)2x\sqrt{x^2+y^2} - \sin(x^2)(1/2)(x^2+y^2)^{-1/2}2x}{x^2+y^2}$$

$$f'_y(x,y) = \frac{-\sin(x^2)(1/2)(x^2+y^2)^{-1/2}2y}{x^2+y^2}$$

A parciális derivált határértékes alakját használva kapjuk, hogy az x-szerinti derivált nem létezik az origóban, az y-szerinti derivált pedig nulla. Mivel a pariciális deriváltak folytonosak, így a függvény az origó kivételével mindenütt totálisan deriválható.

5. feladat ()
Határozza meg az $f(x,y) = x - \cos(xy)$ függvény $(x_0, y_0) = (0, \pi)$ ponthoz tartozó érintősíkjának egyenletét! Adjon becslést a teljes differenciál segítségével az $|f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)|$ eltérésre, ha tudjuk, hogy $|\Delta x| \leq 0.02$ és $|\Delta y| \leq 0.01$!

Mo. Parciális deriválások után kapjuk, hogy a gradiensvektor az adott pontban az (1,0) vektor lesz. Az érintősík átmegy a $(0, \pi, -1)$ ponton és normálvektora $(1, 0, -1)$, azaz az érintősík egyenlete: $1(x - 0) + 0(y - \pi) - 1(z - (-1)) = 0$.

$$|df((0,\pi),(dx,dy))| = |1 \cdot dx + 0 \cdot dy| = |dx| \leq 0.02.$$

---

6. feladat ()
Három nemnegatív valós szám összege 18. Hogyan válasszuk a számokat, hogy szorzatuk a lehető legnagyobb legyen? Mekkora a maximális szorzat?

Mo. Az $f(x,y) = xy(18 - x - y)$ függvény abszolút maximumát kell megkeresni a (0,0), (18,0), (0,18) pontok által meghatározott háromszögön. A háromszög peremén a függvényérték minden pontban nulla. A függvénynek egy olyan stacionárius pontja van, ami a tartomány belsejébe esik: ez a (6,6) pont. Itt $f(6,6) = 6^3$. Emiatt tehát a maximális szorzat értéke 6^3 és ehhez egyforma nagyságúnak kell választani a három számot: 6+6+6=18.

---

7. feladat ()
Határozza meg, hogy hol és milyen lokális szélsőértékei vannak az $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$ függvénynek!

Mo. Stacionárius pontok a (0,0) és az (1,1). Az elsőben nincs lokális szélsőérték, az utóbbiban pedig lokális maximum van.

---

8. feladat ()
Adja meg az $f(x,y) = \mathrm{arctg}(y/x)$ függvény integrálját az alábbi egyenlőtlenségekkel meghatározott halmazon!

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &\geq 4, \\ x^2 + y^2 &\leq 16, \\ y &\geq 0, \\ y &\leq x/\sqrt{3} \end{aligned}$$

Mo. Az alakzat (jelölje most H) két körvonal és két egyenes közé esik, így polárkoordinátás helyettesítéssel integrálunk.

$$\iint_H \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\pi/6} \int_2^4 \operatorname{arctg} \frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi} \cdot r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = \int_0^{\pi/6} \int_2^4 \varphi\, r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\varphi = 3(\pi/6)^2.$$