ANALÍZIS(1)
Mérnök Informatikus szak

VIZSGADOLGOZAT

2011. jún. 20.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (14 pont)

a) Mikor mondjuk, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A\,,\ \ A \in \mathbb{R}$?

Bizonyítsa be az alábbi tételt!
Ha $a_n > 0$ és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A > 0$, akkor $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{A}$.

b) $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{\dfrac{4^n + (-2)^n}{3^n + 2^{2n+2}}} = ?$

a) D $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz $(\varepsilon \in \mathbb{R})$ $\exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$:

$\boxed{9}$ $|a_n - A| < \varepsilon$, ha $n > N(\varepsilon)$ 3

T $a_n > 0$ és $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A > 0 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{a_n} = \sqrt{A}$

B $a_n \to A$ miatt :

$|a_n - A| < \varepsilon \cdot \sqrt{A}$, ha $n > N_a(\varepsilon\sqrt{A})$ ($\exists$ ilyen)

$$|\sqrt{a_n} - \sqrt{A}| = \left|(\sqrt{a_n} - \sqrt{A})\frac{\sqrt{a_n}+\sqrt{A}}{\sqrt{a_n}+\sqrt{A}}\right| = \frac{|a_n - A|}{\sqrt{a_n}+\sqrt{A}} \le \frac{|a_n - A|}{\sqrt{A}} <$$

$$< \frac{\varepsilon\sqrt{A}}{\sqrt{A}} = \varepsilon\,, \quad \text{ha} \quad n > N(\varepsilon) = N_a(\varepsilon\sqrt{A})$$ 6

b) $\boxed{5}$

$$\sqrt{\frac{4^n + (-2)^n}{3^n + 4\cdot 4^n}} = \sqrt{\frac{1 + \left(-\frac{2}{4}\right)^n}{\left(\frac{3}{4}\right)^n + 4}} \longrightarrow \sqrt{\frac{1+0}{0+4}} = \frac{1}{2}$$

2. feladat (12 pont)

Írja le a Leibniz kritériumot!

Mutassa meg, hogy az alábbi sor konvergens:

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^{n+1}\, \frac{n}{2n^2 - 2}$$

Adjon becslést az $s \approx s_{100}$ közelítés hibájára!

$$c_1 - c_2 + c_3 + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} c_n \qquad c_n > 0$$

Leibniz kritérium:
Ha c_n monoton fogyóan tart 0-hoz, akkor a sor konvergens. 3

an1v110620/1.

$$c_n = \frac{n}{2n^2-2} = \underbrace{\frac{n}{n^2}}_{=\frac{1}{n}\to 0} \frac{1}{2-\boxed{\frac{2}{n^2}}\to 0} \longrightarrow 0$$ (2)

$$c_{n+1} \overset{?}{\leq} c_n$$

$$\frac{n+1}{2(n+1)^2-2} \overset{?}{\leq} \frac{n}{2n^2-2}$$

$$(n+1)(2n^2-2) \overset{?}{\leq} n(2n^2+4n)$$

$$2n^3-2n+2n^2-2 \overset{?}{\leq} 2n^3+4n^2$$

$$0 \overset{?}{\leq} 2n^2+2n+2$$ Ez $\forall$ n-re igaz $\Rightarrow c_n \searrow$

Tehát Leibniz sor, így konvergens. (4)

$S \approx s_{100}$: $|H| \leq c_{101} = \frac{101}{2\cdot 101^2-2}$ (3)

3. feladat (9 pont)

A tanult módon vezesse le a $\operatorname{tg} x$ és az $\operatorname{arctg} x$ deriváltját!

$$(\operatorname{tg} x)' = \left(\frac{\sin x}{\cos x}\right)' = \frac{(\sin x)' \cdot \cos x - \sin x\,(\cos x)'}{\cos^2 x} =$$

$$= \frac{\cos^2 x - \sin x(-\sin x)}{\cos^2 x} = \frac{1}{\cos^2 x}$$ (3)

$$(\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{(\operatorname{tg} u)'\big|_{u=\operatorname{arctg} x}} = \frac{1}{\frac{1}{\cos^2 u}\big|_{u=\operatorname{arctg} x}} =$$

$$= \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 u\big|_{u=\operatorname{arctg} x}} = \frac{1}{1+x^2}$$

Felhasználtuk az alábbi azonosságot:

$$\cos^2 u + \sin^2 u = 1 \quad |: \cos^2 u$$

$$\Rightarrow \quad 1+\operatorname{tg}^2 u = \frac{1}{\cos^2 u}$$ (6)

4. feladat (12 pont)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-3/x^2}, & \text{ha } x > 0 \\ \dfrac{\sin(\pi x)}{x} + \operatorname{arctg}\dfrac{1}{x^3}, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

a) Milyen típusú szakadása van f-nek az $x = 0$ pontban?
b) Írja fel a deriváltfüggvényt, ha $x \neq 0$!

a) $\boxed{6}$

$$f(0+0) = \lim_{x \to 0+0} e^{-\frac{3}{x^2}} = 0, \text{ mert } -\frac{3}{\underbrace{x^2}_{\to +0}} \to -\infty \quad (2)$$

$$f(0-0) = \lim_{x \to 0-0} \underbrace{\frac{\sin \pi x}{x \cdot \pi}}_{\to 1} \cdot \pi + \operatorname{arctg} \underbrace{\frac{1}{\underbrace{x^3}_{\to -0}}}_{-\infty} = \pi - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2} \quad (3)$$

$$\underbrace{f(0+0) \neq f(0-0)}_{\text{végesek}} : \text{ véges ugrás (elsőfajú szak.)} \quad (1)$$

b) $\boxed{6}$

$$f'(x) = \begin{cases} e^{-\frac{3}{x^2}} \cdot (-3) \dfrac{-2}{x^3}, & \text{ha } x > 0 \quad (2) \\ \dfrac{\pi (\cos \pi x) \cdot x - (\sin \pi x) \cdot 1}{x^2} + \dfrac{1}{1 + \left(\frac{1}{x^3}\right)^2} \dfrac{-3}{x^4}, & \text{ha } x < 0 \end{cases}$$

(2) (2)

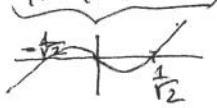
5. feladat (~~20~~ 17 pont)

$$f(x) = \ln\left(\operatorname{ch}(2x^4 - 2x^2)\right)$$

Keresse meg a függvény monotonitási intervallumait!
Hol és milyen jellegű lokális szélsőértéke van f-nek?

$$f'(x) = \frac{1}{\operatorname{ch}(2x^4 - 2x^2)} \left(\operatorname{sh}(2x^4 - 2x^2)\right) \cdot (8x^3 - 4x) = \quad (4)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{\operatorname{ch}(2x^4 - 2x^2)}}_{> 0 \ (1)} \underbrace{\left(\operatorname{sh}(2x^2(x^2 - 1))\right)}_{(2)} \cdot 4x(2x^2 - 1) \quad (2)$$



		-1		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1	
$\operatorname{sh}(2x^4 - 2x^2)$	+	0	−	−	−	0	−	−	−	0	+
$4x(2x^2 - 1)$	−	−	−	0	+	0	−	0	+	+	+
$f'(x)$	−	0	+	0	−	0	+	0	−	0	+
f	↘	lok. min.	↗	lok. max.	↘	lok. min.	↗	lok. max	↘	lok. min	↗

(8)

an1v110620/3.

5 4

6. feladat (5+8+$\cancel{4}$+$\cancel{5}$=22 pont)*

a) $\displaystyle\int_0^{1/2} \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}}\ dx = ?$ b) $\displaystyle\int \arcsin(3x)\ dx = ?$

c) $\displaystyle\int \cos^2 x\ dx = ?$ $\displaystyle\int \sin x \cdot \cos^2 x\ dx = ?$

a) $\boxed{5}$

$$\int_0^{1/2} \underbrace{\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}}_{f'} \underbrace{\arcsin x}_{f^1}\, dx = \frac{(\arcsin x)^2}{2}\Big|_0^{1/2} =$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\underbrace{(\arcsin \tfrac{1}{2})^2}_{=\frac{\pi}{6}} - \underbrace{(\arcsin 0)^2}_{=0} \Big) = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{6}\right)^2$$

b) $\boxed{8}$

$$\int 1 \cdot \arcsin 3x\, dx = x \arcsin 3x - \int \frac{3x}{\sqrt{1-9x^2}}\, dx = \quad (2)$$

$u' = 1$ $v = \arcsin 3x$ (3)

$u = x$ $v' = \frac{1}{\sqrt{1-9x^2}} \cdot 3$

$$= x \arcsin 3x + \frac{1}{6} \int \underbrace{-18x}_{f'} \underbrace{(1-9x^2)^{-\frac{1}{2}}}_{f^{-\frac{1}{2}}}\, dx = x \cdot \arcsin 3x + \frac{1}{6} \frac{\sqrt{1-9x^2}}{\frac{1}{2}} + C \quad (3)$$

c) $\boxed{5}$

$$\int \cos^2 x\, dx = \int \frac{1+\cos 2x}{2}\, dx = \frac{1}{2}\left(x + \frac{\sin 2x}{2}\right) + C$$

d) $\boxed{4}$

$$-\int \underbrace{(-\sin x)}_{f'} \underbrace{\cos^2 x}_{f^2}\, dx = -\frac{\cos^3 x}{3} + C$$

7. feladat (10 pont)*

$$\int \frac{5 - 9x}{x^2(x+5)}\ dx = ?$$

$$\frac{5-9x}{x^2(x+5)} = \frac{A}{x^2} + \frac{B}{x} + \frac{C}{x+5} \quad (2)$$

$$5 - 9x = A(x+5) + Bx(x+5) + Cx^2$$

$x = 0$: $5 = 5A \Rightarrow A = 1$

$x = -5$: $50 = 25 \cdot C \Rightarrow C = 2$

$x = 1$: $-4 = 6A + 6B + C \Rightarrow B = -2$

$$I = \int\left(\frac{1}{x^2} - 2\frac{1}{x} + 2\frac{1}{x+5}\right) dx = -\frac{1}{x} - 2\ln|x| + 2\ln|x+5| + C$$

(4) (4)

an1v-110620/4.

8. feladat (12 pont)*

a) Írja le a határozott integrál helyettesítésére tanult tételt!

b) $\displaystyle\int_8^{27} \frac{1}{\sqrt[3]{x}+2}\,dx = ?$ $\qquad \sqrt[3]{x} = t$ helyettesítéssel dolgozzon!

a) $\boxed{3}$ $f \in C^0_{[a,b]}$, $\varphi \in C^1_{[\alpha,\beta]}$ szigorúan monoton és $\varphi(\alpha) = a$, $\varphi(\beta) = b$

$(\varphi \in C^1_{[\beta,\alpha]})$

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt$$

b.) $\boxed{9}$ $\sqrt[3]{x} = t \Rightarrow x = t^3 \Rightarrow dx = 3t^2\,dt$

$x = 8$: $\quad \alpha = \sqrt[3]{8} = 2$

$x = 27$: $\quad \beta = \sqrt[3]{27} = 3$

$$\int_2^3 \frac{1}{t+2}\,3t^2\,dt \underset{5}{=} 3\int_2^3 \frac{t^2}{t+2}\,dt = 3\int_2^3 \frac{t^2-4+4}{t+2}\,dt =$$

$$= 3\int_2^3 \left(t-2+\frac{4}{t+2}\right)dt \underset{2}{=} 3\left(\frac{t^2}{2} - 2t + 4\ln(t+2)\right)\Big|_2^3 =$$

$$= 3\left(\frac{9}{2} - 6 + 4\ln 5 - (2-4+4\cdot\ln 4)\right) \quad 2$$

A *-gal jelölt feladatokból legalább 13 pontot el kell érni!

Pótfeladatok (csak az elégséges és közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki):

9. feladat (10 pont)

a) $\displaystyle\int_3^\infty \frac{1}{3x^2+27}\,dx = ?$ $\qquad$ b) $\displaystyle\int \frac{2x}{3x^2+27}\,dx = ?$

a.) $\boxed{7}$ $\displaystyle\lim_{\omega\to\infty}\int_3^\omega \frac{1}{3x^2+27}\,dx \underset{1}{=} \frac{1}{27}\lim_{\omega\to\infty}\int_3^\omega \frac{1}{1+\left(\frac{x}{3}\right)^2}\,dx =$

$$= \frac{1}{27}\lim_{\omega\to\infty} \frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{3}}{\frac{1}{3}}\Big|_3^\omega \underset{4}{=} \frac{1}{9}\lim_{\omega\to\infty}\left(\operatorname{arctg}\frac{\omega}{3} - \operatorname{arctg} 1\right) =$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{\pi}{36} \quad 2$$

an1v-11062015.

b.) $\boxed{3}$ $\int \frac{2x}{3x^2+27}\,dx = \frac{1}{3}\int \underbrace{\frac{6x}{3x^2+27}}_{f'/f}\,dx = \frac{1}{3}\ln(3x^2+27)+C$

10. feladat (10 pont)

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{2n^2+5}{2n^2-2}\right)^{6n^2} = ?$

b) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x^2)}{\sin(3x^2)} = ?$

a.) $\boxed{4}$ $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{\left(1+\frac{5}{2n^2}\right)^{2n^2}}{\left(1+\frac{-2}{2n^2}\right)^{2n^2}}\right)^3 = \left(\frac{e^5}{e^{-2}}\right)^3 = e^{21}$

b) $\boxed{6}$ $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+2x^2)}{\sin 3x^2} \overset{L'H}{\underset{\frac{0}{0}}{=}} \lim\limits_{x\to 0}\frac{\frac{1}{1+2x^2}\cdot 4x}{\cos 3x^2\cdot 6x} = \frac{2}{3}$

$\frac{1}{1+2x^2}\to 1$, $\cos 3x^2 \to 1$

$= \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

=

an1011062016