VEKTORANALÍZIS

(segédlet agrár-folyamatmérnök hallgatóknak)

Szerkesztette: Walter József

Kaposvári Egyetem
2006.

Szerkesztette:	WALTER JÓZSEF
Írták:	Walter József Stettner Eleonóra (magyarázatok, ábrák) Walter Norbert (feladatok, megoldások)
Kiadványszerkesztés:	Stettner Eleonóra Vörös Péter
A kéziratot átnézték:	Klencsár Zoltán Klingné Takács Anna

Tartalomjegyzék

1 BEVEZETÉS 5
2 VEKTORALGEBRA 5
2.1 Vektorműveletek 6
2.1.1 Vektorok szorzása számmal 6
2.1.2 Vektorok összege, különbsége 6
2.1.3 Vektorok szorzása 6
2.1.3.1 Vektorok skaláris szorzata 6
2.1.3.2 Vektorok vektoriális szorzata 7
2.1.3.3 Vektorok vegyes szorzata 7
2.2 Koordinátákkal adott vektorok 8
2.2.1 Műveletek koordinátákkal adott vektorokkal 9
2.2.1.1 Abszolút érték 9
2.2.1.2 Két vektor egyenlősége 9
2.2.1.3 Összeg, különbség 9
2.2.1.4 Skalárral való szorzás 9
2.2.1.5 Adott vektor egységvektora 9
2.2.1.6 Skaláris szorzat 10
2.2.1.7 Vektoriális szorzat 10
2.2.1.8 Összetett vektorszorzatok 10
2.3 Vektoralgebra alkalmazásai 11
2.3.1 Egyenes egyenlete 11
2.3.2 A sík egyenlete 13
2.3.3 Hajlásszögek meghatározása 17
2.3.3.1 Két egyenes hajlásszöge 17
2.3.3.2 Két sík hajlásszöge 17
2.3.3.3 Egyenes és sík szöge 17
2.3.4 Vektor merőleges vetülete vektoron 18
3 VEKTORANALÍZIS 19
3.1 Vektor-skalár függvények 19
3.1.1 Egyváltozós (egyparaméteres) vektor-skalár függvények 19
3.1.1.1 Deriválás 21
3.1.2 Kétparaméteres (kétváltozós) vektor-skalár függvények 27
3.1.2.1 Kétváltozós vektor-skalár függvények deriválása 30
3.2 A skalár-vektor függvény 32
3.2.1 A skalár-vektor függvény deriválása 32
3.2.1.1 A nabla operátor 33
3.3 Vektor-vektor függvények (vektormezők) 33
3.3.1 Vektor-vektor függvények differenciálása 35
3.3.1.1 Vektortér divergenciája 35
3.3.1.2 Vektortér rotációja 36
3.4 Vektorfüggvények integrálása 38
3.4.1 Egyparaméteres vektor-skalár függvény ívhossza 38
3.4.2 Kétparaméteres vektor-skalár függvény felszíne 39

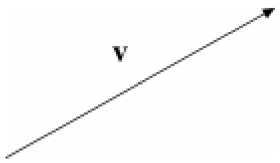
3.4.3 Skalár-vektor függvény integrálása 41
3.4.3.1 Térfogati integrál 41
3.4.3.2 Felszín szerinti integrál 43
3.4.4 Vektor-vektor függvények integrálása 44
3.4.4.1 Vonalmenti (görbe menti) skalár értékű integrál 44
3.4.4.2 A vektortér skalár potenciálfüggvénye 47
3.4.4.3 Skalár értékű felületi integrál 49
3.4.4.4 Integrál redukciós tételek vektorterekben 50
4 KOORDINÁTA RENDSZEREK 54
4.1 Descartes-féle koordináta rendszer 55
4.2 Henger koordinátarendszer 56
4.3 Gömbi koordináta rendszer (gömbkoordináták, térbeli polár) 62
4.4 A helyettesítéses integrál általánosítása 64

1 BEVEZETÉS

A segédletben a 3 dimenziós (ún. Euklideszi, vagy Eukleideszi) térben értelmezhető irányított szakaszokkal (vektorokkal) foglalkozunk.
A vektoralgebra a vektorokkal végezhető műveletekkel, a vektoranalízis a vektorváltozós függvényekkel foglalkozik. Ez utóbbi feltételezi az előzők ismeretét. A vektorokkal való számolás a természettudományokban és a műszaki-technikai tudományokban a mérnöki munka része.
A tananyag elméleti vonatkozásait az előadásokon tárgyaljuk, de ott is elsősorban szemléletre alapozott kvalitatív megközelítéssel. A feladatmegoldás segít az elméleti anyag megértésében, a valós jelenségek, folyamatok kvantitatív értelmezésében és ráirányítja a figyelmet az alkalmazásokra. A füzetben rövid összefoglalót követően a feladatmegoldásra helyezzük a hangsúlyt, esetenként gyakorlatból vett (pl. fizikai) példákkal.
Feltételezzük az egy- és kétváltozós valós függvények analízisének alapismereteit.
A füzetben előforduló képleteket nem kell megjegyezni, fontosabb azok értelmezése és az, hogy tudjuk azokat alkalmazni, valamint ismerjük az alkalmazások korlátait.

2 VEKTORALGEBRA

A természettudományokban és a matematika bizonyos területein találkozhatunk olyan mennyiségekkel, amelyek egyetlen számadattal nem jellemezhetők egyértelműen. Ilyenek például: erő, sebesség, gyorsulás, impulzus (lendület) stb., ezeket vektormennyiségeknek nevezzük. Egyetlen számadattal jellemezhetők például: hosszúság, idő, hőmérséklet, ezeket skalár mennyiségnek nevezzük.
A vektor irányított szakasz, amelyet a 3 dimenziós térben tudunk elhelyezni. Ha a vektorok mindegyike ugyanabban a síkban van, akkor 2 dimenzióban (síkban) ábrázolhatók (speciális eset). Megjegyezzük, hogy mi az ún. többdimenziós $(n > 3)$ vektorokkal itt nem foglalkozunk.
A vektor ismert, ha tudjuk annak irányát és hosszát (abszolút értékét).

Jele: 

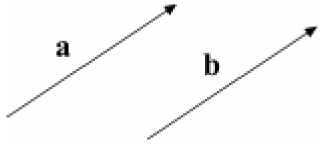
A $\mathbf{v}$ jelölés a vektort egyértelműen jellemzi. A $|\mathbf{v}|$ jelölés a $\mathbf{v}$ abszolút értéke, vagy nagysága (hossza).

Speciális esetek:

Egységvektor az a vektor, amelynek hossza 1. Pl. $\mathbf{a}$ egységvektor, ha $|\mathbf{a}|=1$. Egy vektor egységvektorán a vele egyirányú, de 1 hosszúságú vektort értjük. Szokásos az $\mathbf{a}$ egységvektorát vagylagosan $\mathbf{a}_e$, $\mathbf{a}_0$, $\mathbf{e}_a$ jellel ellátni.

Nullvektor az a vektor, amelynek hossza 0, iránya tetszőleges, jele **0.**

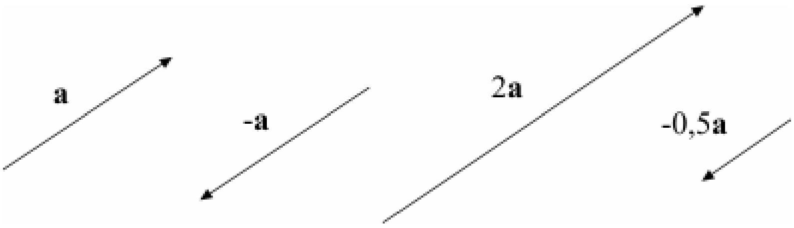
Két vektor egyenlő, ha párhuzamos eltolással egymással fedésbe hozhatók. $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, ha $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$, $|\mathbf{a}| = |\mathbf{b}|$ és egyirányúak.



2.1 Vektorműveletek

2.1.1 Vektorok szorzása számmal

Vektor (**a**) **szorzása számmal** (*k* skalárral) olyan **vektort eredményez**, amely az **a** vektorral

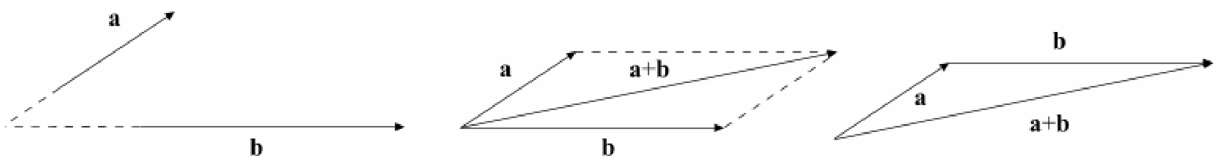


párhuzamos és hossza $|\mathbf{a}|\cdot|\mathrm{k}|$. Az ábra különböző k értékek esetén szemlélteti az eredményvektort.

Ha $\mathrm{k}=\dfrac{1}{|\mathbf{a}|}$, akkor az $|\mathbf{a}\cdot\mathrm{k}|=1$, vagyis $\mathrm{k}\cdot\mathbf{a}$ vektor egységvektor.

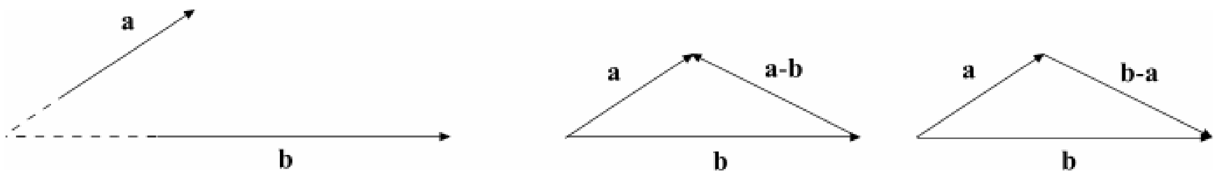
2.1.2 Vektorok összege, különbsége

Ha az összeadandók **a** és **b**, akkor



paralelogramma módszer háromszög módszer

Ha a kivonandók **a** és **b**, akkor

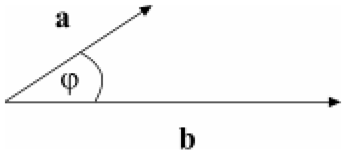


Figyelje meg az **a** – **b** ill. **b** – **a** vektorok irányítottságát!

2.1.3 Vektorok szorzása

2.1.3.1 Vektorok skaláris szorzata

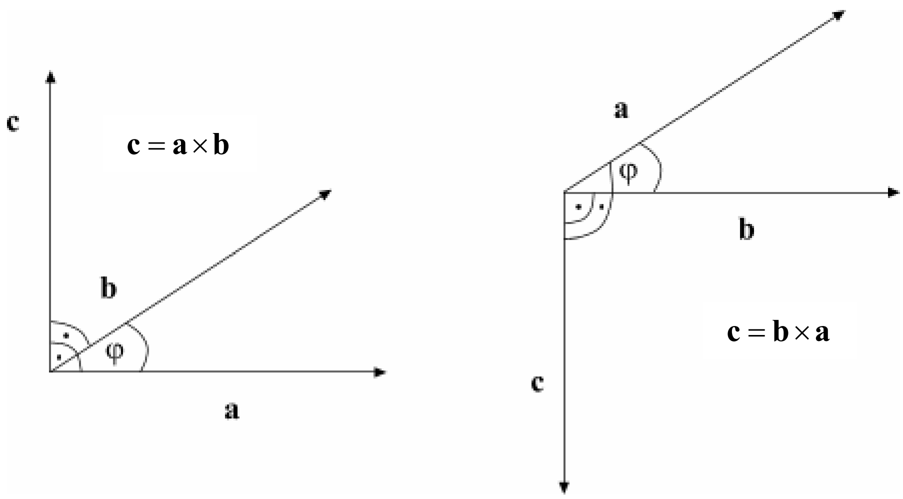
Vektorok skaláris szorzatának eredménye skalár. Jele **ab**.
Értelmezése: $\mathbf{ab}=|\mathbf{a}|\cdot|\mathbf{b}|\cdot\cos\varphi$, ahol φ a szorzandó vektorok által bezárt szög $0^\circ\le\varphi\le180^\circ$. A skaláris szorzat 0, ha valamelyik vektor nullvektor, vagy $\varphi=90^\circ$.



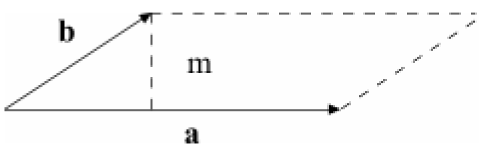
A fenti állítás megfordítása is igaz, ha két vektor skaláris szorzata 0, akkor a vektorok merőlegesek, vagy van közöttük nullvektor.

2.1.3.2 Vektorok vektoriális szorzata

Vektorok vektoriális szorzatának eredménye vektor. Ebből következik, hogy az eredményvektornak úgy az irányát, mint a nagyságát is definiálni kell.
Jele: $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.
Értelmezése: $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{c}$, ahol $|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin\varphi$ az eredményvektor nagysága. Iránya az **a**, **b** vektorok síkjára merőleges, irányítottságát pedig az ábrák szemléltetik.



Vagyis $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a})$, ugyanakkor $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{b} \times \mathbf{a}|$
A **c** eredményvektor abszolút értéke számértékben megegyezik az ábra szerinti paralelogramma területével.



Mivel $|\mathbf{b}| \cdot \sin\varphi = \mathrm{m}$, így
$|\mathbf{c}| = |\mathbf{a}| \cdot |\mathbf{b}| \cdot \sin\varphi = |\mathbf{a}| \cdot \mathrm{m} = \mathrm{T}$

Ha $\varphi = 0$, akkor $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ (párhuzamos vektorok). Ha $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$, akkor legalább valamelyik vektor nullvektor, vagy $\varphi = 0$.

2.1.3.3 Vektorok vegyes szorzata

Vektorok vegyes szorzatának eredménye skalár.

Jele: $\left(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right)\cdot\mathbf{c}$

Ez azt jelenti, hogy egy $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ vektoriális szorzat eredményvektorát szorozzuk $\mathbf{c}$ -vel skalárisan.

Megjegyzések:

- ha **a**, **b**, **c** egy síkban van, akkor vegyes szorzatuk értéke 0.
- $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{c}=\mathbf{c}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b})$
- bizonyítható, hogy $\left(\mathbf{a}\times\mathbf{b}\right)\cdot\mathbf{c}$ skalár szám a három vektor által alkotott paralelepipedon (paralelogrammák határolta hasáb) térfogatának mértékszámával egyenlő.

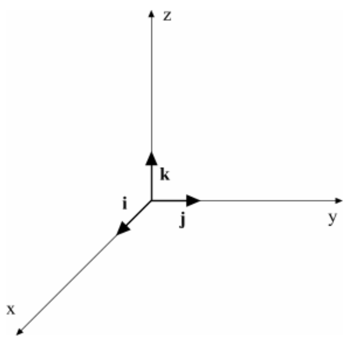
2.2 Koordinátákkal adott vektorok

Az előző fejezetben definiált vektorműveletek 3 dimenziós térben szemléltethetők. Ha a vektorokat egy 3 dimenziós (térbeli) Descartes-féle koordináta rendszerbe helyezzük el úgy, hogy kezdőpontjuk az origó legyen (helyvektorok), akkor a vektorok végpontjai 3 db koordinátájukkal (*x*, *y*, *z*) egyértelműen megadhatók. Mondhatjuk, hogy minden rendezett számhármas (pl. a_1, a_2, a_3) egy térbeli vektort definiál. A koordinátatengelyek irányába mutató egységvektorokat megállapodás szerint **i**, **j**, **k**-val jelöljük, és szokás ezeket bázisvektoroknak is nevezni. (Megjegyzés: más vektorok is alkothatnak bázist. A háromdimenziós térben 3 db vektor bázist alkot, ha nincsenek egy síkban és nincs köztük nullvektor.) A vektorok szorzásánál tanultak alapján ezen vektorok szorzatai:

Skaláris szorzatok:

$\mathbf{ii}=\mathbf{jj}=\mathbf{kk}=1$,

$\mathbf{ij}=\mathbf{ik}=\mathbf{jk}=0$.



Vektoriális szorzatok:

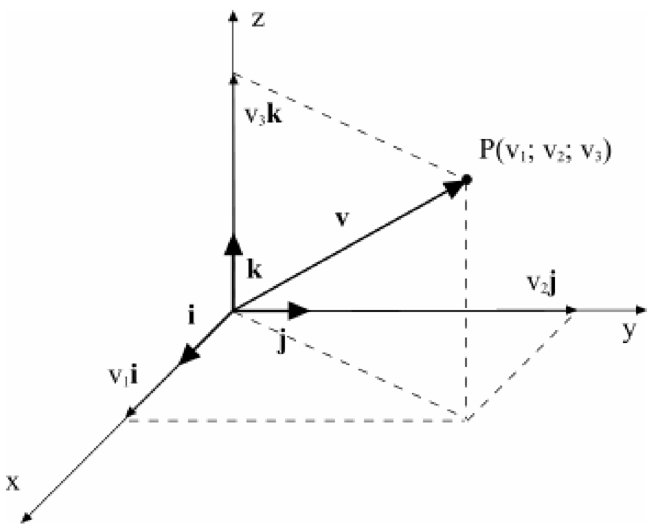
$\mathbf{i}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}\times\mathbf{k}=\mathbf{0}$,

$\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}$, $\mathbf{k}\times\mathbf{i}=\mathbf{j}$, $\mathbf{j}\times\mathbf{k}=\mathbf{i}$,

$\mathbf{j}\times\mathbf{i}=-\mathbf{k}$, $\mathbf{i}\times\mathbf{k}=-\mathbf{j}$, $\mathbf{k}\times\mathbf{j}=-\mathbf{i}$.

Vektorok koordinátás megadása:

$\mathbf{v}=v_1\mathbf{i}+v_2\mathbf{j}+v_3\mathbf{k}$



A **v** vektort tulajdonképpen 3 db egymásra merőleges vektor összegeként adjuk meg, amiből számos előny származik.

A v_1, v_2, v_3 számhármast a **v** vektor **i**, **j**, **k** bázisra vonatkozó koordinátáinak is nevezzük. Megjegyzés: az **i**, **j**, **k** bázisra vonatkozó koordináták megegyeznek az origó kezdőpontú vektor végpontjainak koordinátáival. Más bázisvektorok esetében ez nem áll fenn.

2.2.1 Műveletek koordinátákkal adott vektorokkal

2.2.1.1 Abszolút érték

$$|\mathbf{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + v_3^2}$$

2.2.1.2 Két vektor egyenlősége

Ha $\mathbf{a} = \mathbf{b}$, akkor és csak akkor, ha $a_1 = b_1$; $a_2 = b_2$; $a_3 = b_3$

2.2.1.3 Összeg, különbség

$$\mathbf{a} \pm \mathbf{b} = (a_1 \pm b_1)\mathbf{i} + (a_2 \pm b_2)\mathbf{j} + (a_3 \pm b_3)\mathbf{k}$$

2.2.1.4 Skalárral való szorzás

$$k\mathbf{v} = kv_1\mathbf{i} + kv_2\mathbf{j} + kv_3\mathbf{k}$$

Példa:

$\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

$\mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$

Számítsuk ki $3\mathbf{a} - \mathbf{b}$ értékét!

$3\mathbf{a} - \mathbf{b} = 6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 9\mathbf{k} - (\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}) = 5\mathbf{i} + 5\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

A $k_1\mathbf{a} + k_2\mathbf{b}$ vektort az **a** és **b** lineáris kombinációjának is nevezzük. Vegyük észre, hogy az így előállított vektor biztosan benne van az **a** és **b** által „kifeszített” síkban.

2.2.1.5 Adott vektor egységvektora

$$\mathbf{a}_e = \frac{\mathbf{a}}{|\mathbf{a}|} = \frac{a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} = \frac{a_1}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}\mathbf{i} + \frac{a_2}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}\mathbf{j} + \frac{a_3}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}}\mathbf{k}$$

Ellenőrizzük, hogy $|\mathbf{a}_e| = 1$ teljesül-e?

Megjegyzés: az origó kezdőpontú egységvektorok (speciálisan ilyenek az **i**, **j**, **k** vektorok is!) végpontjai egy egységsugarú gömbfelületen vannak. Az egységvektorok koordinátáit iránykoszinuszoknak is nevezzük, értékük ≤ 1.

Példa:

$\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

$$\mathbf{a}_e = \frac{2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}}{\sqrt{4+1+4}} = \frac{2}{3}\mathbf{i} - \frac{1}{3}\mathbf{j} + \frac{2}{3}\mathbf{k}$$

A $\frac{2}{3}$ például az **a** x tengellyel és a z tengellyel bezárt szögének koszinusza.

2.2.1.6 Skaláris szorzat

$$\mathbf{ab} = \left(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}\right)\cdot\left(b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}\right) =$$
$$= a_1b_1\mathbf{ii} + a_2b_2\mathbf{jj} + a_3b_3\mathbf{kk} + a_1b_2\mathbf{ij} + a_1b_3\mathbf{ik} + a_2b_1\mathbf{ji} + a_2b_3\mathbf{jk} + a_3b_1\mathbf{ki} + a_3b_2\mathbf{kj} =$$
$$= a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

Pl.:
$\mathbf{a} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$, $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, akkor
$\mathbf{ab} = -1\cdot 2 + 1\cdot 2 + 0\cdot 1 = 0$

Visszatekintve az $\mathbf{ab} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}|\cos\varphi$ definícióra, ebből a két vektor által bezárt 90°-os szögre következtethetünk.

Pl.:
$\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

$$\cos\varphi = \frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{3-1-1}{\sqrt{11}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{33}} \approx 0{,}17\,,\ \varphi \approx 80^\circ$$

2.2.1.7 Vektoriális szorzat

$$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \left(a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}\right)\times\left(b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}\right) =$$
$$a_1b_1(\mathbf{i}\times\mathbf{i}) + a_1b_2(\mathbf{i}\times\mathbf{j}) + \ldots = (a_2b_3 - a_3b_2)\mathbf{i} - (a_1b_3 - a_3b_1)\mathbf{j} + (a_1b_2 - a_2b_1)\mathbf{k}$$

A vektoriális szorzat kiszámítása sok számolással jár, a végeredmény képlet bemagolása felesleges. Az eredményből következtethető, hogy

$\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$ harmadrendű determináns kifejtése (ld. Matematika 1.), így a számolás menete könnyen memorizálható.

Ha $\mathbf{a}\times\mathbf{b} = \mathbf{0}$, akkor **a** és **b** párhuzamos ($\varphi = 0$), vagy legalább egyik vektor nullvektor.

2.2.1.8 Összetett vektorszorzatok

Az $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\times\mathbf{c}$ eredménye vektor.

Az $(\mathbf{a}\times\mathbf{b})\mathbf{c}$ eredménye skalár (vegyesszorzat), ez utóbbi szintén kiszámítható a $\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$ determináns kifejtésével.

A vegyesszorzat 0 értékű, ha a szorzandó vektorok egy síkban vannak (ui.: $\mathbf{a}\times\mathbf{b}$ merőleges **c**-ra, így skalár szorzatuk zérus).

2.3 Vektoralgebra alkalmazásai

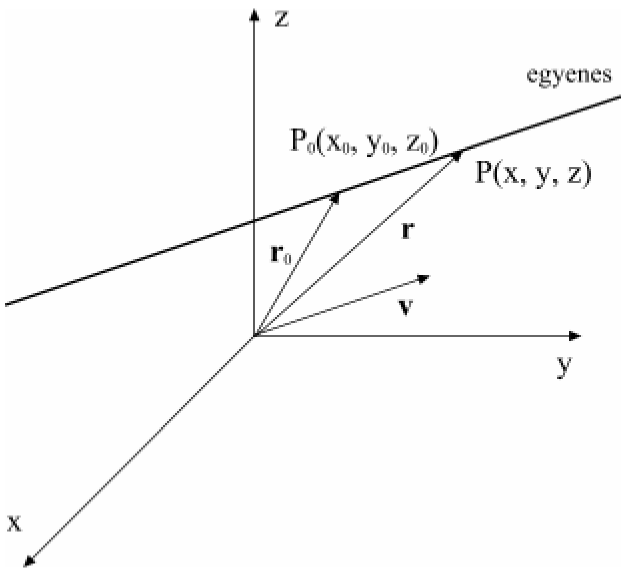
A vektoralgebrát a természettudományok számos területén (kiemelten a fizikában és a műszaki tudományokban) alkalmazzák. Mi itt néhány matematikai alkalmazásra térünk ki.

2.3.1 Egyenes egyenlete

Középiskolában részletesen foglalkoztunk az egyenessel, mint az egyik legegyszerűbb „síkgörbével". Az egyenes a kétdimenziós térben (síkban) ábrázolható és a sík azon pontjai vannak rajta egy egyenesen, amelyek kielégítik az $y = mx + b$ egyenletet (m és b konstansok).
Általánosabban, az $ax + by + c = 0$ az egyenes egyenlete, amelyet célszerűségi okokból más-más alakura lehet hozni. Térben a helyzet valamivel összetettebb, de jól áttekinthető.
Hogyan határozható meg egy egyenes? Leggyakrabban;

- két (nem egybeeső) pontja megadásával;
- egy pontja megadásával és irányvektorával (amellyel párhuzamos).

Az utóbbival foglalkozunk, mert az előző erre visszavezethető.
Adott $P_0(x_0; y_0; z_0)$ pont (vagy ami azzal egyenértékű, az oda húzható $\mathbf{r}_0$ helyvektor), és



egy $\mathbf{v}$ irányvektor (koordinátáival: $v_1; v_2; v_3$), hossza közömbös ($\neq 0$)

Az ábra alapján $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \overline{PP_0}$
de $\overline{PP_0} \parallel \mathbf{v}$, ezért $\overline{PP_0} = t\mathbf{v}$, így
$\boxed{\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}}$ az egyenes vektoregyenlete, ahol a t paraméter minden valós értéket felvehet.
Pl.:

$P_0(1;-2;3)$ $\qquad \mathbf{r}_0 = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$
$\mathbf{v} = (2;1;-1)$ $\qquad \mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$
$\qquad \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, így

$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ egyenlet koordinátás alakban az adott adatokkal;

$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} + t(2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})$ rendezve

$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \mathbf{i}(1 + 2t) + \mathbf{j}(-2 + t) + \mathbf{k}(3 - t)$, amiből

$x = 1 + 2t$

$y = -2 + t$

$z = 3 - t$

az egyenes paraméteres (skalár) egyenletrendszere.

Pl.: $t = 2$ esetén $x = 5$; $y = 0$; $z = 1$, azaz a $P(5;0;1)$ pontba juthatunk.

A t paraméter kiküszöbölésével

$\frac{x-1}{2} = y + 2 = -z + 3$ egyenletrendszerhez jutunk.

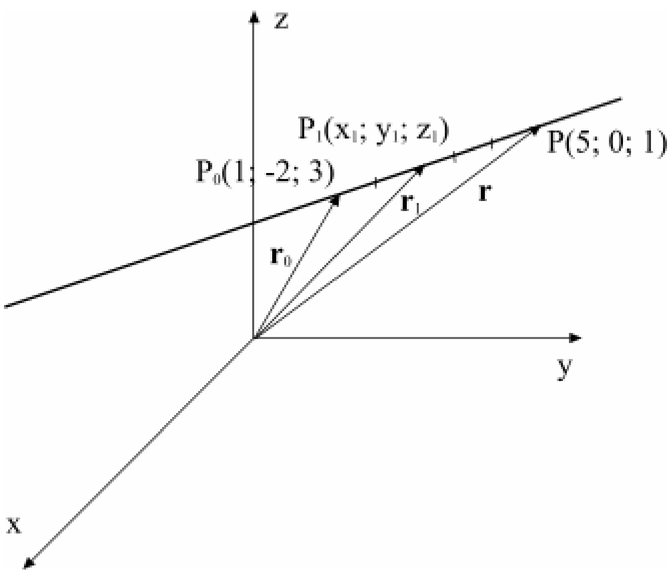
Hol döfi ez az egyenes a koordinátasíkokat?

Az x, y síkot $z = 0$-nál döfi, azaz $\frac{x-1}{2} = 3$, amiből $x = 7$, illetve $y + 2 = 3$, $y = 1$ a döféspont koordinátái.

Az x, z síkot $y = 0$-nál döfi, azaz $\frac{x-1}{2} = 2$ $\; -z + 3 = 2$, amiből x és z számítható.

Ugyanez elvégezhető az y, z síkkal való döféspont esetében is.

Határozzuk meg a P_0P szakaszt 2:3 arányban osztó pont koordinátáit: $P_1(x_1; y_1; z_1)$.



$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + \frac{2}{5}\overrightarrow{PP_0}$$

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_0 + \frac{2}{5}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$$

$$x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k} + \frac{2}{5}(4\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k})$$

$$x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k} = \frac{13}{5}\mathbf{i} - \frac{6}{5}\mathbf{j} + \frac{11}{5}\mathbf{k}$$

Tehát $x_1 = \frac{13}{5}$, $y_1 = -\frac{6}{5}$, $z_1 = \frac{11}{5}$ a P_1 pont koordinátái.

Pl.: Határozzuk meg a $P_1(1;-2;2)$; $P_2(2;3;-1)$ pontokon átmenő egyenes egyenletét.

Válasszuk irányvektornak a $\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}$ vektort, akkor

$\mathbf{v} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = \mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$.

Ezzel a feladatot az előzőekre vezettük vissza.

Legyen az adott pont P_1, $\mathbf{v}$ az irányvektor, akkor $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 + t\mathbf{v}$ a keresett egyenes vektoregyenlete.

2.3.2 A sík egyenlete

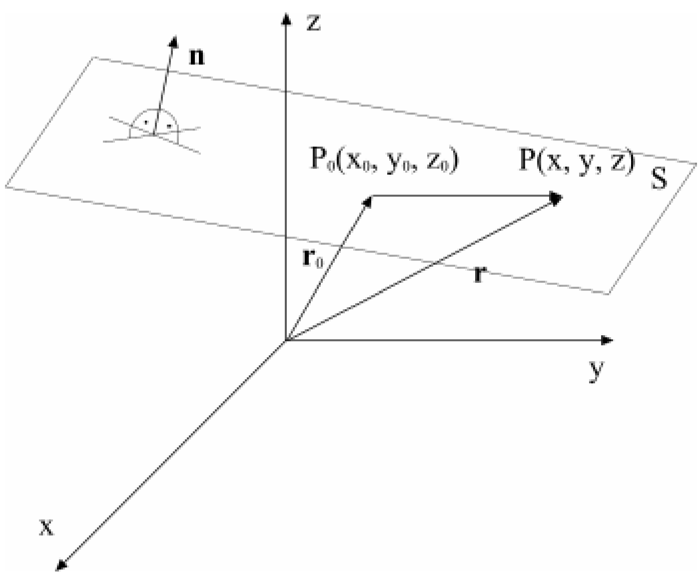
A síkot a térben (vagylagosan)

- 3 db nem egy egyenesre illeszkedő pont,
- 2 db párhuzamos, nem egybeeső egyenes;
- egymást metsző egyenespár;
- 1 db pont és a síkra merőleges vektor (ún. normálvektor: **n**)

meghatározza.

A különböző esetek az adott ponton átmenő adott normálvektorú sík problémájára visszavezethetők, ezért ezzel foglalkozunk először.

Adott $P_0(x_0;y_0;z_0)$, $\mathbf{n}(n_1;n_2;n_3)$. Írjuk fel a sík egyenletét!



A $\overrightarrow{\mathrm{PP_0}} = \mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ vektor benne fekszik az *S* síkban (*P* a sík tetszőleges pontja), ezért merőleges **n**-ra ($(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \perp \mathbf{n}$)

Mint korábban láttuk (ld. 2.1.3.1), két egymásra merőleges vektor skaláris szorzata zérus, azaz

$\boxed{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\mathbf{n}=0}$ a sík vektoregyenlete.

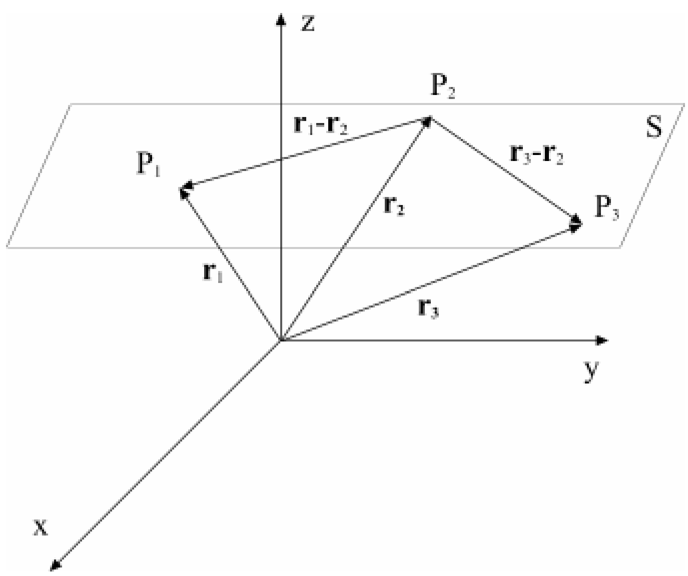
Pl.: adott $P_0(-2;1;-1)$ és $\mathbf{n}=\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k}$, akkor
$[x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}-(-2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k})](\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k})=0$ a sík koordinátás vektoregyenlete, amely átalakítás után
$[(x+2)\mathbf{i}+(y-1)\mathbf{j}+(z+1)\mathbf{k}](\mathbf{i}-2\mathbf{j}+\mathbf{k})=0$, ahol a skaláris szorzás elvégzése után
$x+2+(y-1)(-2)+z+1=0$, azaz
$x-2y+z+5=0$ a sík skalár egyenlete.
(Vegyük észre, hogy x, y, z együtthatói $(1;-2;1)$ éppen az $\mathbf{n}$ koordinátái!)

Keressük meg ezen sík koordinátasíkokkal való metszésvonalainak egyenletét.
Az x, y síkot ott metszi, ahol $z=0$, tehát
$x-2y+5=0$ a metszésvonal egyenlete.
Hasonlóan számítható ki a másik két koordináta síkkal való metszésvonal egyenlete is.

Feladatok:

- Számítsa ki a metszésvonalak által alkotott háromszög területét!
- Számítsa ki ezen háromszög súlypontjának koordinátáit!
- Számítsa ki a háromszög köré irható kör sugarát!

Pl.: Adottak a $P_1(0;1;-2)$; $P_2(1;1;0)$; $P_3(1;-1;2)$ pontok.
Ellenőrizze, hogy nincsenek egy egyenesen, majd írjuk fel a három pontra illeszkedő sík egyenletét!



Mivel az $\mathbf{n}$ könnyen meghatározható, így az $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\mathbf{n}=0$ vektoregyenlet alkalmazható:
$\mathbf{n}=(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)\times(\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2)$.

$\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2=-\mathbf{i}-2\mathbf{k}$; $\mathbf{r}_3-\mathbf{r}_2=-2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$

$$\mathbf{n}=(-\mathbf{i}-2\mathbf{k})\times(-2\mathbf{j}+2\mathbf{k})=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ -1 & 0 & -2\\ 0 & -2 & 2\end{vmatrix}=$$

$$\mathbf{i}\begin{vmatrix}0 & -2\\ -2 & 2\end{vmatrix}-\mathbf{j}\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 0 & -2\end{vmatrix}+\mathbf{k}\begin{vmatrix}-1 & 0\\ 0 & -2\end{vmatrix}=-4\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}.$$

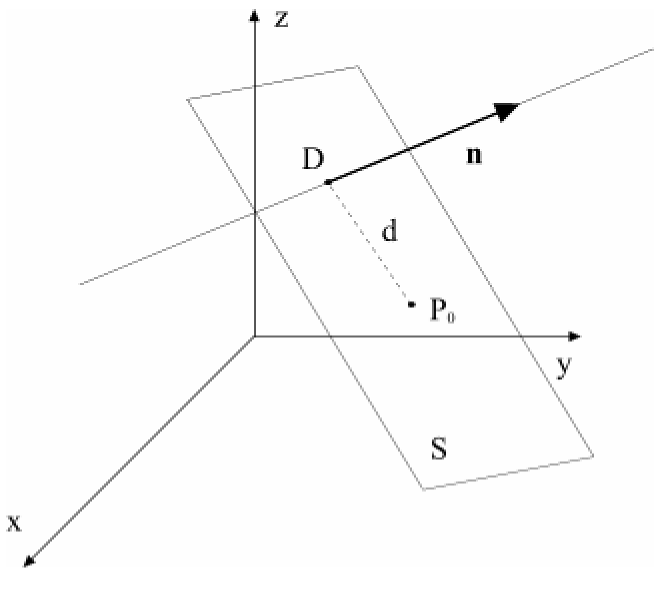
Válasszuk adottnak a P_1 pontot (természetesen P_2, vagy P_3 is választható), akkor
$[x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}-(\mathbf{j}-2\mathbf{k})](-4\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k})=0$ a sík koordinátás vektoregyenlete, amiből
$[x\mathbf{i}+(y-1)\mathbf{j}+(z+2)\mathbf{k}](-4\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k})=0$ és $-4x+2y+2z+2=0$ a sík skalár egyenlete.

Célszerű lehet ezt explicit (z=f(x,y))alakra hozni, ami esetünkben
$2z=-4x-2y-2$ és
$z=-2x-y-1$
Általánosan $\mathrm{z}=\mathrm{Ax}+\mathrm{By}+\mathrm{C}$ (ld. [1] 3.3.1) a sík explicit egyenlete.

Ha a sík metsző vagy párhuzamos egyenesekkel adott, akkor 3 db nem egy egyenesre illeszkedő tetszőleges pontot felvéve a feladat az előzőre visszavezethető.

Feladat:
Adott egy egyenes és egy rá nem illeszkedő pont. Írjuk fel az adott pontra illeszkedő, az egyenesre merőleges sík egyenletét. (Az egyenes irányvektora a sík normálisa lesz!)

Pl.: Milyen messze van a $P_0(1;2;-1)$ pont az $\frac{x-1}{2}=y+2=\frac{z}{3}$ egyenestől.



Írjuk fel a P_0 ponton átmenő és az adott egyenesre merőleges *S* sík egyenletét!
A sík normálisa (**n**) az egyenes irányvektora

$\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k} = \mathbf{n}$, amelyet az
$(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)\mathbf{n} = 0$ egyenletbe helyettesítve
$[x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} - (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k})][2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}] = 0$, ebből a sík skalár egyenlete
$(x-1)2 + (y-2) + (z+1)3 = 0$, vagyis
$2x + y + 3z = 1$

A D pont a síkon és az egyenesen is rajta van, tehát koordinátái úgy a sík, mint az egyenes egyenletét kielégítik, azaz

$$\left.\begin{aligned} &2x + y + 3z = 1 \\ &\frac{x-1}{2} = y + 2 \\ &\frac{z}{3} = y + 2 \end{aligned}\right\} \text{ a megoldandó egyenletrendszer}$$

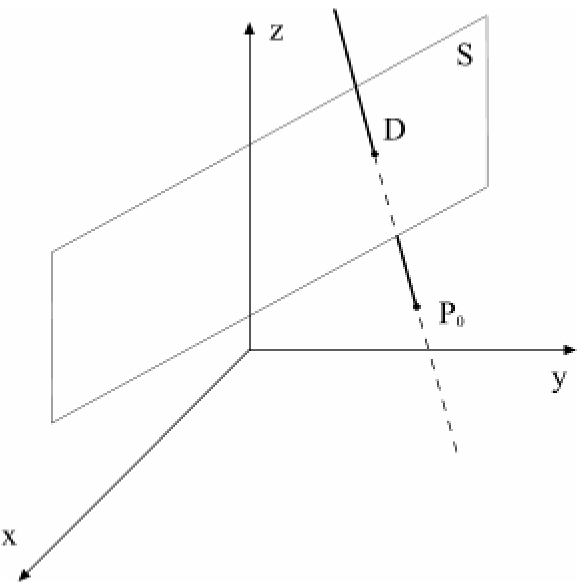
$z = 3y + 6$ behelyettesítésével

$$\begin{matrix} 2x + y + 3(3y+6) = 1 \\ x - 1 = 2y + 4 \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} 2x + 10y = -17 \\ x - 2y = 5 \end{matrix}, \text{ amiből } 14y = -27$$

$$y = -\frac{27}{14} \quad x = \frac{8}{7} \quad z = \frac{3}{14}, \quad D\left(-\frac{27}{14}; \frac{8}{7}; \frac{3}{14}\right)$$

$$d = P_0D = \sqrt{\left(1 + \frac{27}{14}\right)^2 + \left(2 - \frac{8}{7}\right)^2 + \left(-1 + \frac{53}{14}\right)^2} = \dots$$

Feladat: milyen messze van a $P_0(1;2;-1)$ pont a $x - 2y + z = 5$ síktól?



Útmutatás: a P_0 és D pontokon átmenő és az S síkra merőleges egyenes irányvektora a sík normálisa! A megoldás további lépései az előző példához hasonlók.

2.3.3 Hajlásszögek meghatározása

2.3.3.1 Két egyenes hajlásszöge

Két egyenes hajlásszöge: az irányvektoraik által bezárt szög (függetlenül attól, hogy metsző vagy kitérő egyenesekről van-e szó).

Pl.: egyik egyenes paraméteres egyenletrendszere:

$x = 2 - t$

$y = -4 + 2t$

$z = -t$

a másik egyenes $\frac{x-1}{2} = y = \frac{z-1}{3}$ egyenletű.

Az egyik egyenes irányvektora $\mathbf{v}_1 = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

A másik egyenesé $\mathbf{v}_2 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

$\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2 = |\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2|\cos\varphi$ skalár szorzatból

$\cos\varphi = \frac{\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2}{|\mathbf{v}_1||\mathbf{v}_2|} = \frac{-2+2-3}{\sqrt{6}\sqrt{14}} = -\frac{3}{\sqrt{84}}$ ez tompaszög $\varphi \approx 109^\circ$, tehát a hajlásszög $\varphi_0 \approx 180^\circ - 109^\circ = 71^\circ$.

2.3.3.2 Két sík hajlásszöge

Két sík hajlásszöge: a normálvektoraik által bezárt szög.
Ha a sík egyenletét $Ax + By + Cz + D = 0$ alakra hozzuk, akkor A, B, C éppen a normálvektor koordinátái.

Pl.: legyen

$$\begin{aligned} 2x + y - z - 2 &= 0 \\ x + 2y + z &= 0 \end{aligned}$$ a két sík egyenlete.

$\mathbf{n}_1 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

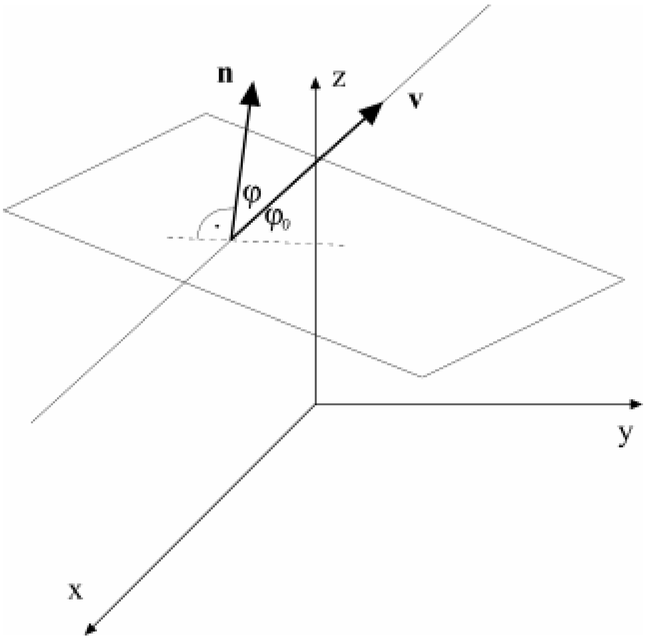
$\mathbf{n}_2 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

Így $\mathbf{n}_1\mathbf{n}_2 = |\mathbf{n}_1||\mathbf{n}_2|\cos\varphi \Rightarrow \cos\varphi \Rightarrow \varphi$.

2.3.3.3 Egyenes és sík szöge

Egyenes és sík szöge: a sík normálvektora és az egyenes irányvektora által bezárt szög pótszöge.

Pl.: $2x - y + 3z + 5 = 0$ a sík egyenlete,



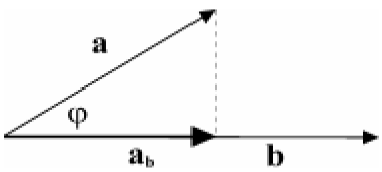
$\frac{x}{2} = \frac{y-1}{2} = z$ az egyenes egyenletrendszere,

akkor $\left.\begin{array}{l} \mathbf{n} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 3\mathbf{k} \\ \mathbf{v} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k} \end{array}\right\}$ $\cos\varphi = \frac{\mathbf{nv}}{|\mathbf{n}||\mathbf{v}|}$

$\varphi_0 = 90^\circ - \varphi$

2.3.4 Vektor merőleges vetülete vektoron

Keressük egy **a** merőleges vetületvektorát egy **b** vektorra.



Adott **a**,**b**, keressük $\mathbf{a}_\mathrm{b}$-t. Ennek abszolút értéke $|\mathbf{a}_\mathrm{b}| = |\mathbf{a}||\cos\varphi| = a\frac{\mathbf{ab}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \mathbf{ab}_\mathrm{e}$

$\mathbf{a}_\mathrm{b} = |\mathbf{a}_\mathrm{b}|\mathbf{b}_\mathrm{e} = (\mathbf{ab}_\mathrm{e})\mathbf{b}_\mathrm{e}$

(Ha $\varphi = 0$, akkor $\mathbf{a}_\mathrm{b} = \mathbf{a}$, $\varphi = 90^\circ$, akkor $\mathbf{a}_\mathrm{b} = \mathbf{0}$.)

3 Vektoranalízis

Eddigi tanulmányaink során egy és kétváltozós **valós függvények** analízisével foglalkoztunk, a szóba jöhető értékek a valós számok halmazából valók voltak.

Egyváltozós valós függvényeket
$y = f(x)$, vagy $f(x, y) = 0$ -val jelöltük.
Pl.: $y = xe^{-x}$, vagy $x + e^{x+y} = 0$.

A kétváltozós valós függvényeket
$z = f(x, y)$, vagy $f(x, y, z) = 0$ -val jelöltük.
Pl.: $z = x^2 + \ln(x + y)$, vagy $x^2 + \sin(y + z) = 0$.

Azokat a függvényeket, amelyekben vektor változó is előfordul, **vektorfüggvényeknek** nevezzük.
Lehetséges esetek:

- skalárhoz vektort rendelünk, amelyet vektor-skalár függvénynek nevezzük (ezen belül két esettel foglalkozunk);
- vektorhoz skalárt rendelünk, amelyet skalár-vektor függvénynek nevezünk;
- vektorhoz vektort rendelünk, amelyet vektor-vektor függvénynek nevezünk.

3.1 Vektor-skalár függvények

3.1.1 Egyváltozós (egyparaméteres) vektor-skalár függvények

Általában t-vel jelölt skalár változóhoz (fizikában ez leggyakrabban az idő), annak szóba jöhető értékeihez vektorokat rendelünk.
Jele: $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$.
Koordinátás alakban: $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$.

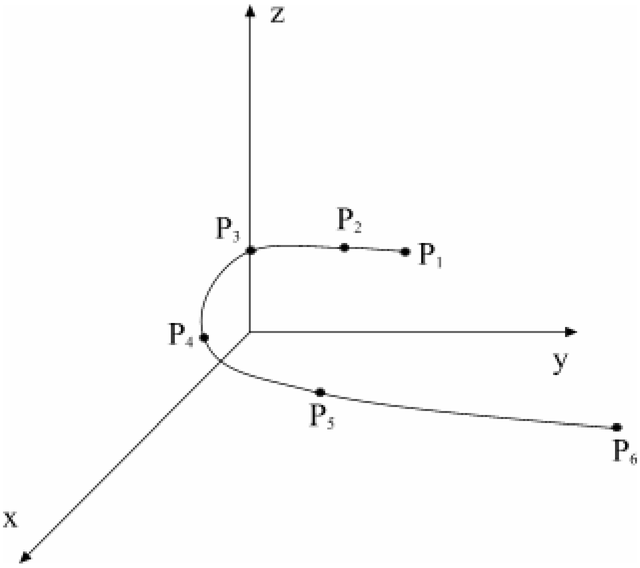
Pl.: $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \sqrt{t+1}\,\mathbf{k}$ függvény a $t_1 = 2$ skalárhoz az $\mathbf{r}_1(2) = 4\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \sqrt{3}\mathbf{k}$ vektort, míg a $t_2 = -1$ értékhez az $\mathbf{r}_2(-1) = -2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ vektort rendeli.

Megjegyzés: az $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ megadás egyenértékű az
$x = x(t)$,
$y = y(t)$,
$z = z(t)$ egyváltozós valós függvények megadásával és viszont.

Ábrázolás: térbeli derékszögű koordináta rendszerben az $\mathbf{r}(t)$ helyvektorok végpontjai egy térgörbét határoznak meg (speciálisan lehet síkgörbe is).

Pl.: $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + \sqrt{t+1}\,\mathbf{k}$ függvény néhány pontját ábrázolhatjuk értéktáblázat segítségével ($t \geq -1$), aminek felhasználásával a térgörbe egy darabja közelítően felrajzolható.

t	-1	$-\frac{1}{2}$	0	1	2	3
x	-2	-1	0	2	4	6
y	1	$\frac{1}{4}$	0	1	4	9
z	0	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{3}$	2
	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6

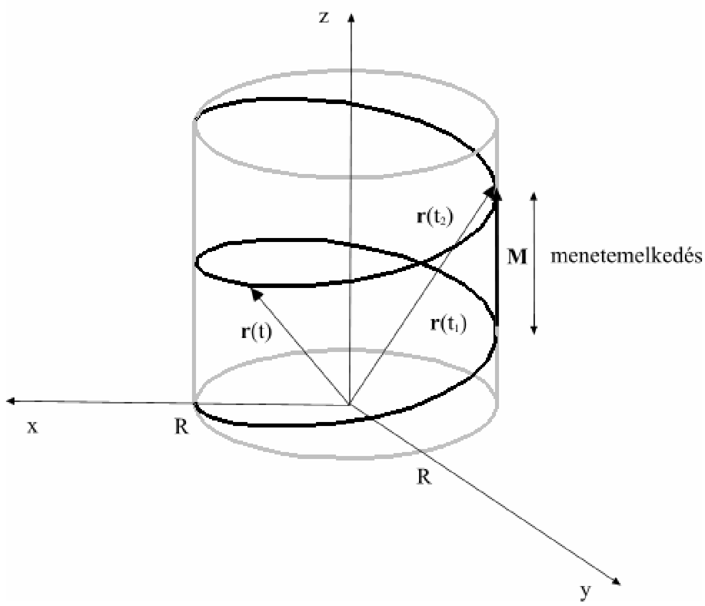


Megjegyzés: ha t időt jelent, akkor $\mathbf{r}(t)$ végpontjai egy pontszerű test által bejárt pálya görbéjének pontjait adják.

Gyakori térgörbe a hengerre (esetleg kúpra) csavart spirális.

Az $\mathbf{r}(t) = R\cos t\mathbf{i} + R\sin t\mathbf{j} + ct\mathbf{k}$ ($R > 0$, c adottak)
egy egyenletes menetemelkedésű spirális vektorfüggvénye.

Ez $t = 0$ esetén $\mathbf{r}(t) = R\mathbf{i}$ értéket vesz fel, tehát az x tengelyt az $P(R;0;0)$ pontban metszi.



A menetemelkedés (egy körülfordulásra eső z irányú elmozdulás)

$\mathrm{M} = \left|\mathbf{r}\left(\mathrm{t}_1\right) - \mathbf{r}\left(\mathrm{t}_2\right)\right|$ legyen $t_1 = \dfrac{\pi}{2}$, akkor $t_2 = \dfrac{\pi}{2} + 2\pi$

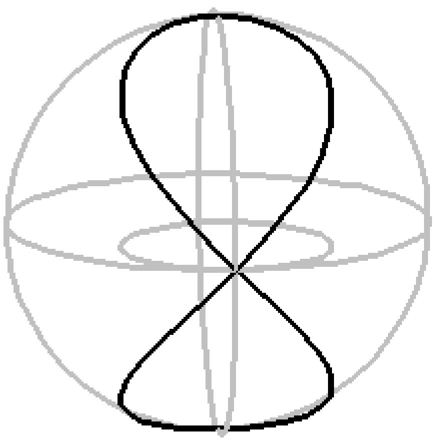
$$\mathbf{M} = R\cos\frac{5\pi}{2}\mathbf{i} + R\sin\frac{5\pi}{2}\mathbf{j} + c\frac{5\pi}{2}\mathbf{k} - \left(R\cos\frac{\pi}{2}\mathbf{i} + R\sin\frac{\pi}{2}\mathbf{j} + \frac{\pi}{2}\mathbf{k}\right) = R\mathbf{j} + c\frac{5\pi}{2}\mathbf{k} - \left(R\mathbf{j} + c\frac{\pi}{2}\mathbf{k}\right) = c2\pi\mathbf{k}$$

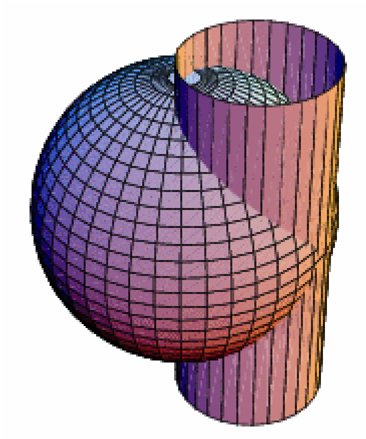
$$M = 2\pi c$$

Megjegyzés: itt a t paraméter az $\mathbf{r}(t)$ vektor x, y síkra vett vetületének x tengellyel bezárt szöge radiánban.

Érdekes térgörbék alakulnak ki testek áthatásakor. Az ún. Viviani-féle görbe gömb és körhenger áthatásából (közös felületi pontok összessége) származtatható. (*Viviani-féle görbének* nevezzük az R sugarú gömbfelületnek és egy olyan körhengerfelületnek a metszésvonalát, amelyek egy alkotója áthalad a gömb középpontján, és átmérője a gömb sugarával egyenlő.)

Az ábra szerint: $\mathbf{r}(t) = R\cos^2 t\mathbf{i} + R\sin t\cos t\mathbf{j} + R\sin t\mathbf{k}$.





Ld. [5] 710. oldal

Itt R a gömb sugara, és a henger átmérője. Természetesen a két test sugarának mértékétől és az egymáshoz viszonyított helyzetüktől függően különböző alakú térgörbék nyerhetők.

3.1.1.1 *Deriválás*

Ha az $\mathbf{r}$(t) függvényből képzett $\dfrac{\mathbf{r}(t_0 + \Delta t) - \mathbf{r}(t_0)}{\Delta t}$ differenciahányadosnak van véges határértéke $\Delta t \to 0$ esetén, akkor az $\mathbf{r}(t)$ függvény a $t = t_0$ helyen differenciálható, a differenciálhányados

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\mathbf{r}(t_0+\Delta t)-\mathbf{r}(t_0)}{\Delta t}\text{, jelölése } \left.\frac{d\mathbf{r}(t)}{dt}\right|_{t=t_0} \text{ vagy } \dot{\mathbf{r}}(t_0).$$

Ha az $\mathbf{r}(t)$ függvény egy T halmazon differenciálható, akkor a $\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{\mathbf{r}(t+\Delta t)-\mathbf{r}(t)}{\Delta t}$ függvényt az $\mathbf{r}(t)$ derivált függvényének vagy deriváltjának nevezzük, jele $\dot{\mathbf{r}}(t)$.

Bizonyítható, hogy $\mathbf{r}(t)$ akkor differenciálható, ha a koordinátái differenciálhatók és akkor $\dot{\mathbf{r}}(t)=\dot{x}(t)\mathbf{i}+\dot{y}(t)\mathbf{j}+\dot{z}(t)\mathbf{k}$

Pl.: $\mathbf{r}(t)=2t^2\mathbf{i}+\frac{1}{t}\mathbf{j}+\sin t\mathbf{k}$

$\dot{\mathbf{r}}(t)=4t\mathbf{i}-\frac{1}{t^2}\mathbf{j}+\cos t\mathbf{k}$, és pl: $\dot{\mathbf{r}}(1)=4\mathbf{i}-\mathbf{j}+\cos 1\mathbf{k}\approx 4\mathbf{i}-\mathbf{j}+0{,}54\mathbf{k}$

A deriválási szabályok hasonlók a valós függvényeknél megtanultakkal, de az eltérésekre felhívjuk a figyelmet!

$(c\mathbf{r})^\bullet=c\dot{\mathbf{r}}$ pl.: $\left[3\left(t\mathbf{i}+\mathbf{j}+t^2\mathbf{k}\right)\right]^\bullet=3(\mathbf{i}+2t\mathbf{k})=3\mathbf{i}+6t\mathbf{k}$

$(\mathbf{r}_1\pm\mathbf{r}_2)^\bullet=\dot{\mathbf{r}}_1\pm\dot{\mathbf{r}}_2$

$(\mathbf{r}_1\mathbf{r}_2)^\bullet=\dot{\mathbf{r}}_1\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_1\dot{\mathbf{r}}_2$ ($(\mathbf{r}\mathbf{r})^\bullet=\dot{\mathbf{r}}\mathbf{r}+\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}=2\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}$, vagy másként $(\dot{\mathbf{r}^2})=2\mathbf{r}\dot{\mathbf{r}}$)

$(\mathbf{r}_1\times\mathbf{r}_2)^\bullet=\dot{\mathbf{r}}_1\times\mathbf{r}_2+\mathbf{r}_1\times\dot{\mathbf{r}}_2$

A derivált függvény deriváltjait magasabbrendű deriváltnak nevezzük.

Pl.: $(\dot{\mathbf{r}})^\bullet=\ddot{\mathbf{r}}$ Legyen $\mathbf{r}(t)=e^t\mathbf{i}-t\mathbf{j}+\frac{1}{t^2}\mathbf{k}$, akkor

$\dot{\mathbf{r}}=e^t\mathbf{i}-\mathbf{j}-\frac{2}{t^3}\mathbf{k}$ $\ddot{\mathbf{r}}=e^t\mathbf{i}+\frac{6}{t^4}\mathbf{k}$.

Bebizonyítható, hogy $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ az $\mathbf{r}(t)$ vektorfüggvényhez rendelhető térgörbe érintővektora a $t=t_0$-hoz tartozó P_0 pontban.

Pl.: $\mathbf{r}(t)=\sqrt{t}\mathbf{i}+\frac{2}{t}\mathbf{j}+t^3\mathbf{k}$ érintővektora a $t_0=1$ helyen, azaz a $P_0(1;2;1)$ helyen;

$\dot{\mathbf{r}}(t)=\frac{1}{2\sqrt{t}}\mathbf{i}-\frac{2}{t^2}\mathbf{j}+3t^2\mathbf{k}$, amiről

$\dot{\mathbf{r}}(1)=\frac{1}{2}\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k}$ vektor a P_0-hoz tartozó érintővektor.

Ennek egységvektora $\dot{\mathbf{r}}_e(1)=\dfrac{\frac{1}{2}\mathbf{i}-2\mathbf{j}+3\mathbf{k}}{\sqrt{\frac{53}{4}}}=\frac{1}{\sqrt{53}}\mathbf{i}-\frac{4}{\sqrt{53}}\mathbf{j}+\frac{6}{\sqrt{53}}\mathbf{k}$.

Megjegyzés: szokás (elég gyakori) az érintő egységvektort $\mathbf{t}$-vel jelölni (tangenciális, érintőleges), de esetleg összetéveszthető a t skalár paraméterrel. Mi az $\mathbf{e}_\mathrm{t}$ jelölést javasoljuk.

Az érintővektor ismeretében az érintő egyenes egyenlete felírható (ld. 1.2.1):
$\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + t\mathbf{v}$ felhasználásával, hiszen az érintővektor egyben irányvektor is.

Megjegyzések:
- itt $\mathbf{v}$ lehet $\dot{\mathbf{r}}$ vagy $\mathbf{e}_t$;
- itt $\mathbf{r}$ az érintő egyenes (mint „térgörbe”) vektorfüggvénye nem azonos annak a térgörbének a vektoregyenletével, amihez az érintőt leírtuk (ezért célszerű más jelölést alkalmazni, pl.: $\mathbf{R}$);
- az $\mathbf{r}(t)$ térgörbe t paramétere nem azonos az érintő, mint „térgörbe” paraméterével (ezért itt is célszerű más jelölést alkalmazni, pl.: τ).

Pl.: Írjuk fel az $\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\mathbf{i} + \frac{2}{t}\mathbf{j} + t^3\mathbf{k}$ térgörbe érintője egyenletét a $t_0 = 1$ paraméterértéknél.

A korábbi számolások felhasználásával az érintő irányvektora $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}(t_0) = \frac{1}{2}\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(\mathrm{t}_0) = \mathbf{r}(1) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

Az érintő vektoregyenlete

$\mathbf{R}(\tau) = \mathbf{r}_0 + \tau\mathbf{v}$: $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k} + \tau\left(\frac{1}{2}\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}\right)$

rendezés után

$x = 1 + \frac{1}{2}\tau$

$y = 2 - 2\tau$

$z = 1 + 3\tau$ az érintő egyenes paraméteres egyenletrendszere, ami

$\frac{x-1}{\frac{1}{2}} = -\frac{y-2}{2} = \frac{z-1}{3}$ alakúra hozható.

Az $\mathbf{r}(t)$ második deriváltját ($\ddot{\mathbf{r}}(t)$) az első derivált ($\dot{\mathbf{r}}(t)$) deriválása útján számítjuk ki.

Pl.:

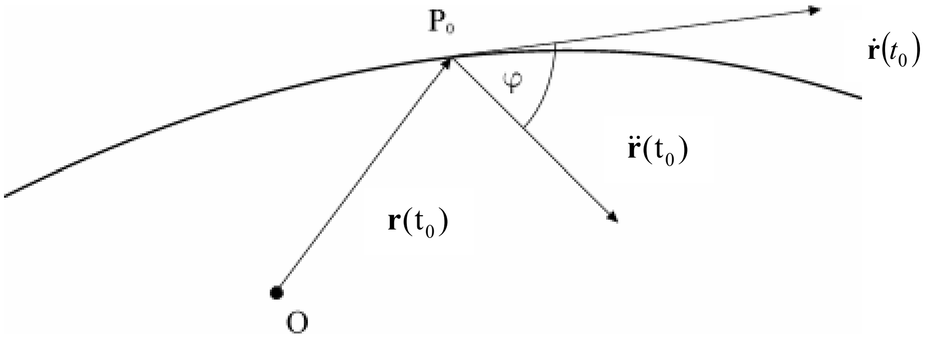
$$\mathbf{r}(t) = 2e^{-t}\mathbf{i} + \frac{t}{t+1}\mathbf{j} + \sqrt{t}\mathbf{k}$$

$$\dot{\mathbf{r}}(\mathrm{t}) = -2\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}\mathbf{i} + \frac{\mathrm{t}+1-\mathrm{t}}{(\mathrm{t}+1)^2}\mathbf{j} + \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{t}}}\mathbf{k} = -2\mathrm{e}^{-\mathrm{t}}\mathbf{i} + \frac{1}{(\mathrm{t}+1)^2}\mathbf{j} + \frac{1}{2\sqrt{\mathrm{t}}}\mathbf{k}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}(t) = 2e^{-t}\mathbf{i} - 2(t+1)^{-3}\mathbf{j} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)t^{-\frac{3}{2}}\mathbf{k} = 2e^{-t}\mathbf{i} - \frac{2}{(t+1)^3}\mathbf{j} - \frac{1}{4\sqrt{t^3}}\mathbf{k}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}(1) = \frac{2}{e}\mathbf{i} - \frac{1}{4}\mathbf{j} - \frac{1}{4}\mathbf{k}$$

A térgörbe egy adott helyén (adott t_0 értékhez tartozó P_0 helyen) a két derivált ($\dot{\mathbf{r}}(\mathrm{t}_0)$ és $\ddot{\mathbf{r}}(t_0)$) hajlásszöge (φ) például a skaláris szorzatuk segítségével kiszámítható (ld. ábra).



Megjegyzés: a fizikában pontszerű test térbeli mozgása esetén, ha a t az időt jelenti, akkor $\mathbf{r}(t)$ a test pályaegyenlete, $\dot{\mathbf{r}}(t)$ a sebessége, $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ pedig a gyorsulása. Nagyon fontos, hogy ez a gyorsulásvektor felbontható egy érintőirányú ($\dot{\mathbf{r}}(t)$ irányú és egy arra merőleges komponensre ún. pályamenti ill. centripetális gyorsulásra).

Speciális esetben, ha $\varphi = 0$, akkor csak pályamenti gyorsulás lehet (egyenesvonalú mozgás), míg $\varphi = 90^\circ$ esetén csak centripetális gyorsulás van (pl. egyenletes körmozgás).

Az $\dot{\mathbf{r}}(t)$ és az $\ddot{\mathbf{r}}(t)$ vektorok által kifeszített síkot (ha $\varphi \neq 0$) a térgörbe **simuló síkjának** nevezzük az adott helyen. Ez a sík a normálisával jellemezhető, amelyet binormális vektornak (**m**) nevezünk. Nyilván $\mathbf{m} = \dot{\mathbf{r}}(t_0) \times \ddot{\mathbf{r}}(t_0)$, ennek egységvektora az ún. **binormális egységvektor** (**b**), amelyet

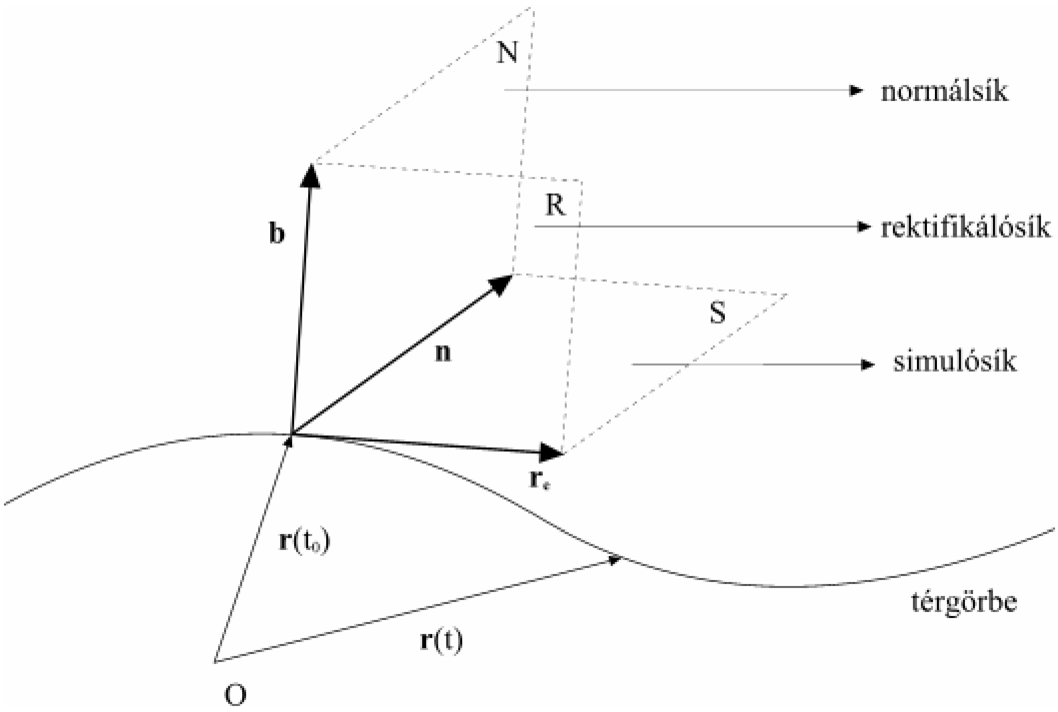
$\mathbf{b} = \dfrac{\mathbf{m}}{|\mathbf{m}|}$ alapján tudunk kiszámítani.

A simuló sík (**s**) egyenlete az adott hely P_0 ($\mathbf{r}(t_0)$) és **b** (vagy **m**) ismeretében felírható

$(\mathbf{s} - \mathbf{r}_0)\mathbf{b} = 0$.

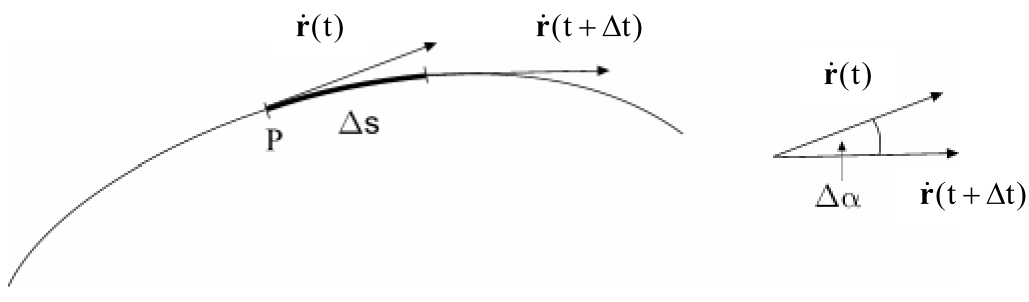
Megjegyzés: az érintővektor $\dot{\mathbf{r}}(t_0)$ által meghatározott érintőegyenesre végtelen sok sík illeszthető. Ezen síkok körül a térgörbe a simuló síkhoz simul a legjobban az adott P_0 helyen. Az érintő egységvektor $\dot{\mathbf{r}}_e$ (gyakran **t**-vel jelölik) és a binormális egységvektor (**b**) az $\mathbf{r}(t)$ térgörbe egy adott pontjában mindig merőleges egymásra.

Az érintő és a binormális egységvektor mellett fontos szerepe van az ún. **főnormális** egységvektornak. Jele: **n**, értéke definíció szerint $\mathbf{n} = \mathbf{b} \times \dot{\mathbf{r}}_e$, vagyis a három egységvektor egymásra merőleges (hasonlóan, mint **i**, **j**, **k**), és tulajdonképpen egy „koordináta rendszert”



alkotnak; neve **kísérő triéder**.

Az ábrán a kísérő triédert és az egységvektorok által páronként kifeszített síkok (S, N, R) elnevezését is feltüntettük.
A síkgörbék görbületéhez hasonlóan értelmezhető a térgörbe görbülete (g) egy adott pontban (P). Ez tulajdonképpen az érintővektor irányváltozásának ($\Delta\alpha$) mértékét jellemzi az ívhosszhoz (Δs) viszonyítva.



A definíció tehát: $g = \lim\limits_{\Delta s \to 0} \dfrac{\Delta\alpha}{\Delta s}$, ahol $\Delta\alpha$ az $\dot{\mathbf{r}}(t)$ és az $\dot{\mathbf{r}}(t+\Delta t)$ vektorok hajlásszöge.

A g kiszámítható a térgörbe $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ egyenlete ismeretében is $g = \dfrac{|\dot{\mathbf{r}} \times \ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}$ képlet alapján.

Pl.: Adott $\mathbf{r}(t)=(t^2+1)\mathbf{i}-\sin t\mathbf{j}+\sqrt{t+1}\mathbf{k}$.
Számítsuk ki a $t=0$ helyhez tartozó P_0 pontban a kísérő triéder egységvektorait, az azokra illeszkedő síkok egyenletét és a térgörbe görbületét!

$$\mathbf{r}(0)=\mathbf{i}+\mathbf{k} \qquad P(1;0;1)$$

$$\dot{\mathbf{r}}(t)=2t\mathbf{i}-\cos t\mathbf{j}+\frac{1}{2\sqrt{t+1}}\mathbf{k} \qquad \dot{\mathbf{r}}(P_0)=-\mathbf{j}+\frac{1}{2}\mathbf{k}$$

$$\ddot{\mathbf{r}}(t)=2\mathbf{i}+\sin t\mathbf{j}-\frac{1}{4}(t+1)^{-\frac{3}{2}}\mathbf{k} \qquad \ddot{\mathbf{r}}(P_0)=2\mathbf{i}-\frac{1}{4}\mathbf{k}$$

$$\dot{\mathbf{r}}_e=\frac{\dot{\mathbf{r}}}{|\dot{\mathbf{r}}|}=\frac{-\mathbf{j}+\frac{1}{2}\mathbf{k}}{\sqrt{\frac{5}{4}}}=-\frac{2}{\sqrt{5}}\mathbf{j}+\frac{1}{\sqrt{5}}\mathbf{k}$$ az **érintő egységvektor**.

$$\mathbf{m}=\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 0 & -1 & \frac{1}{2}\\ 2 & 0 & -\frac{1}{4}\end{vmatrix}=\frac{1}{4}\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}$$ a **binormális** vektor, amelynek **egységvektora**

$$\mathbf{b}=\frac{\mathbf{m}}{|\mathbf{m}|}=\frac{\frac{1}{4}\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{1}{4}\right)^2+(-1)^2+2^2}}=\frac{\frac{1}{4}\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}}{\frac{9}{4}}=\frac{1}{9}\mathbf{i}-\frac{4}{9}\mathbf{j}+\frac{8}{9}\mathbf{k}.$$

A főnormális egységvektor

$$\mathbf{n}=\mathbf{b}\times\mathbf{r}_e=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{8}{9}\\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}}\end{vmatrix}=\frac{2}{9\sqrt{5}}\mathbf{i}-\frac{1}{9\sqrt{5}}\mathbf{j}-\frac{2}{9\sqrt{5}}\mathbf{k}$$

A térgörbe görbülete a P_0 helyen

$$g=\frac{|\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}|}{|\dot{\mathbf{r}}|^3}=\frac{\left|\frac{1}{4}\mathbf{i}-\mathbf{j}+2\mathbf{k}\right|}{\frac{5\sqrt{5}}{8}}=\frac{\frac{9}{4}}{\frac{5\sqrt{5}}{8}}=\frac{18}{5\sqrt{5}}$$ (figyelembe vettük a binormális vektor és annak egységvektora kiszámításánál kapott eredményeket).

A kísérő triéder három síkja mindegyikének ismerjük egy pontját (P_0) és normálisát. Tehát bármelyik sík egyenletének felírása ugyanazon probléma megoldása (más számokkal).
Mi a simuló sík egyenletét fogjuk kiszámítani. Adott $P_0(1;0;1)$ és a normálisa $\mathbf{b}=\frac{1}{9}\mathbf{i}-\frac{4}{9}\mathbf{j}+\frac{8}{9}\mathbf{k}$. A simuló sík ($S$) tetszőleges pontja legyen P, ahová az $\mathbf{s}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ vektor mutat, akkor a sík $(\mathbf{r}-\mathbf{r}_0)\mathbf{n}=0$ általános egyenlete esetünkben $(\mathbf{s}-\mathbf{r}_0)\mathbf{b}=0$ alakú.

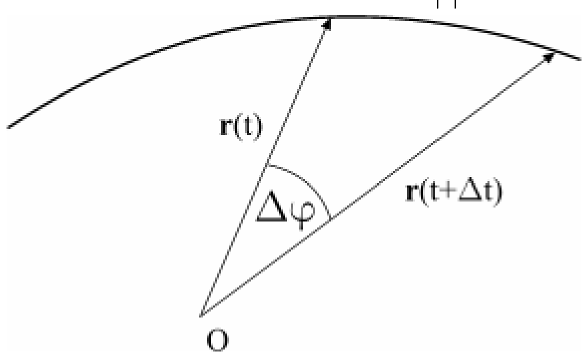
$$\left[x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}-(\mathbf{i}+\mathbf{k})\right]\cdot\left[\frac{1}{9}\mathbf{i}-\frac{4}{9}\mathbf{j}+\frac{8}{9}\mathbf{k}\right]=\left[(x-1)\mathbf{i}+y\mathbf{j}+(z-1)\mathbf{k}\right]\cdot\left[\frac{1}{9}\mathbf{i}-\frac{4}{9}\mathbf{j}+\frac{8}{9}\mathbf{k}\right]=$$

$=\frac{1}{9}(x-1)-\frac{4}{9}y+\frac{8}{9}(z-1)=0$ a simuló sík skalár egyenlete.

Rendezés után
$x-1-4y+8z-8=0$, illetve
$x-4y+8z-9=0$ a simuló sík egyenletének legegyszerűbb alakja.

Megjegyzések:

- A síkgörbék simuló köréhez hasonlóan térgörbe egy pontjához is rendelhető simuló kör, amely a **simuló síkban** van. Ennek sugara $R=\frac{1}{g}$, középpontja pedig a főnormális egyenesen van.
- A térgörbe egyenletét valamely kísérő triéderben, mint koordináta rendszerben is fel lehet írni (ívhossz paraméterrel). Az ívhossz kiszámítására a későbbi fejezetben még visszatérünk. Ebből bizonyos esetekben előnyök származhatnak, például bizonyos számolások egyszerűbbé válhatnak.
- Hogy egy térgörbe mennyire tér el egy adott hely környezetében a síkgörbétől azt az ún. **torzióval** (*T*) lehet jellemezni, amelynek nagysága $\mathrm{T}=\frac{(\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}})\cdot\dddot{\mathbf{r}}}{\left|\dot{\mathbf{r}}\times\ddot{\mathbf{r}}\right|^2}$, ahol a számláló vegyesszorzat(!).
- Egy vektor-skalár függvény szögsebességén az ábra alapján az $\omega=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\varphi}{\Delta t}$ határértéket értjük. Ez kiszámítható az $\omega=\frac{\left|\mathbf{r}\times\dot{\mathbf{r}}\right|}{\left|\mathbf{r}\right|^2}$ összefüggésből.



3.1.2 Kétparaméteres (kétváltozós) vektor-skalár függvények

Az előző fejezetben láttuk, hogy az $\mathbf{r}(t)$ egyparaméteres vektor-skalár függvény térbeli derékszögű koordináta rendszerben térgörbét határoz meg.

Az $\mathbf{r}(u,v)$ vektorfüggvényben két skalár paraméter (*u*, *v*) szerepel. A függvényt kétparaméteres (két skaláris változós) vektor-skalár függvénynek nevezzük.
Térbeli derékszögű koordináta rendszerben a $\mathbf{r}(u,v)$ helyvektor *x*, *y*, *z* koordinátái is ezen skalár paraméterek függvényei, azaz

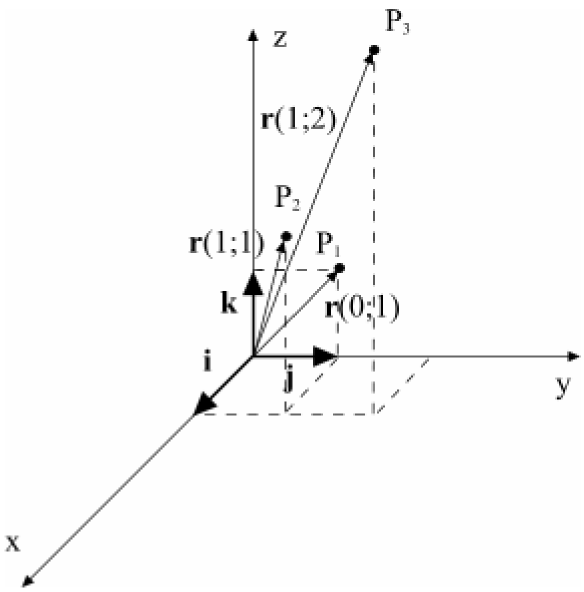
$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}$.

Az $\mathbf{r}(u,v)$ helyvektor végpontjainak halmaza (a függvény grafikonja) általában felület. (Már itt felhívjuk a figyelmet arra, hogy a korábbi tanulmányaik során már találkoztak a $z = f(x,y)$ típusú kétváltozós valós függvényekkel, amelyek grafikonja szintén (általában) felület. Ez a kétfajta függvény szoros kapcsolatára utal. Erre még visszatérünk.)

Pl.: $\mathbf{r}(u,v) = u\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (u^2 + v^2)\mathbf{k}$ esetén
$x(u,v) = u$, $y(u,v) = v$, $z(u,v) = u^2 + v^2$.

Az ábrán néhány pontot (helyvektor végpontot) tüntettünk fel különböző, tetszőlegesen választott *u*, *v* paraméterértékek esetén.

$u = 0$, $v = 1$ $\quad \mathbf{r}(0;1) = \mathbf{j} + \mathbf{k}$
$u = 1$, $v = 1$ $\quad \mathbf{r}(1;1) = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$
$u = 1$, $v = 2$ $\quad \mathbf{r}(1;2) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$



Felvetődik a kérdés, hogy a P_1, P_2, $P_3 \ldots$ pontok milyen felületre illeszkednek?

Általában a
$\mathbf{r}(u,v) = x(u,v)\mathbf{i} + y(u,v)\mathbf{j} + z(u,v)\mathbf{k}$
kétparaméteres vektor-skalár függvény megadható három kétváltozós függvénnyel
$x = x(u,v)$,
$y = y(u,v)$,
$z = z(u,v)$ alapján.

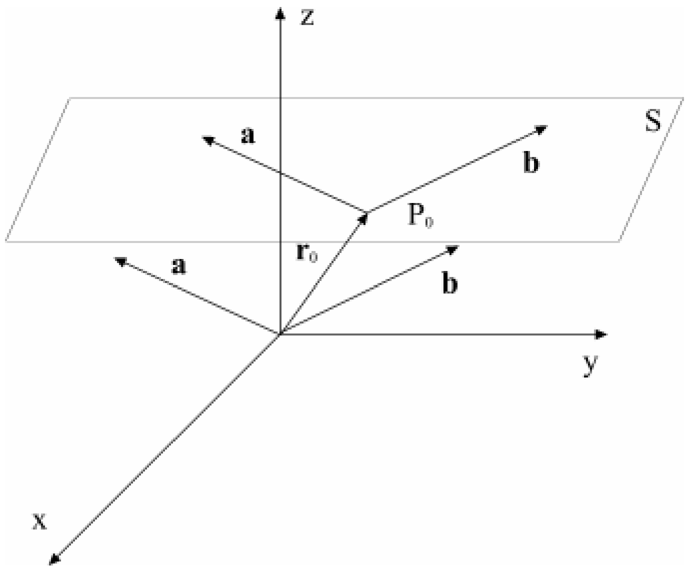
Előző egyszerű példánkban
$x = u$,
$y = v$,
$z = u^2 + v^2$, amiből viszont $z = x^2 + y^2$ következik.
Esetünkben tehát egy forgási paraboloidra illeszkednek a $\mathbf{r}(u,v)$ helyvektorok végpontjai.

Ha a két paraméter valamelyikét konstansnak választjuk, akkor olyan egyparaméteres vektor-skalár függvényt kapunk, amelyhez tartozó térgörbe rajta van az $\mathbf{r}(u,v)$ függvényhez tartozó felületen.

Pl.: $\mathbf{r}(u,v) = (u^2 + v)\mathbf{i} + uv\mathbf{j} + (u - v^2)\mathbf{k}$ kétparaméteres vektor-skalár függvény

- $u = 1$ választással $\mathbf{r}(v) = (v+1)\mathbf{i} + v\mathbf{j} + (1 - v^2)\mathbf{k}$ egyparaméteres vektor-skalár függvényt adja, amelyhez tartozó térgörbe rajta van az $\mathbf{r}(u,v)$ függvényhez tartozó felületen;
- $v = -1$ választással $\mathbf{r}(u) = (u^2 - 1)\mathbf{i} - u\mathbf{j} + (u - 1)\mathbf{k}$ a kapott egyparaméteres vektor-skalár függvény.

Pl.: Írjuk fel annak a síknak a kétparaméteres vektor-skalár egyenletét, amely illeszkedik a $P_0(1;2;4)$ pontra és párhuzamos az $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ill. $\mathbf{b} = -\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ helyvektorokkal.



$\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{r}_0 + u\mathbf{a} + v\mathbf{b}$, az adott adatokkal

$\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k} + u(\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) + v(-\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k}) =$

$= \mathbf{i}(u - v + 1) + \mathbf{j}(-2u + v + 2) + \mathbf{k}(u + 2v + 4)$

$x(u,v) = u - v + 1$,

$y(u,v) = -2u + v + 2$,

$z(u,v) = u + 2v + 4$ a sík (felület) paraméteres skalár egyenletrendszere (Gauss-féle megadási mód).

Az első két egyenletből:

$x + y = -u + 3 \quad \rightarrow \quad u = -x - y + 3$

$2x + y = -v + 4 \quad \rightarrow \quad v = -2x - y + 4$, így

$z = -x - y + 3 + 2(-2x - y + 4) + 4$ a sík kétváltozós skalár egyenlete, amelyből rendezéssel $z = -5x - 3y + 15$ adódik.

Felvetődik a kérdés, hogy a $z = f(x,y)$ alakú kétváltozós függvények által meghatározott felület megadható-e kétparaméteres vektor-skalár függvényként, és ha igen hogyan.
Ha speciálisan az x és y derékszögű koordinátákat választjuk paramétereknek, azaz $x = u$, $y = v$, akkor $z = f(x,y)$ és ezzel

$\mathbf{r}(u,v) = \mathbf{r}(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + f(x,y)\mathbf{k}$ a keresett függvény (un. Euler-féle megadási mód).

Pl.: $z = f(x,y) = x^2 + 2y^2$ (elliptikus paraboloid), akkor a megfelelő (keresett) vektorfüggvény:

$\mathbf{r}(x,y)=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+(x^2+2y^2)\mathbf{k}$ a keresett vektorfüggvény.

A probléma fordítottja; az $\mathbf{r}(u,v)$ vektorfüggvény felírható-e $z=f(x,y)$ (vagy $f(x,y,z)=0$) kétváltozós skalár függvényként, a válasz; lehet, de nem biztos.

Pl.: legyen $\mathbf{r}(u,v)=5\sin v\cos u\mathbf{i}+5\sin v\sin u\mathbf{j}+5\cos v\mathbf{k}$, akkor
$x^2+y^2=25\sin^2 v(\cos^2 u+\sin^2 u)=25\sin^2 v$
$z^2=25\cos^2 v$ és $x^2+y^2+z^2=25$ (vagy $x^2+y^2+z^2-25=0$, $f(x,y,z)=0$)
vagyis $\mathbf{r}(u,v)$ egy 5 sugarú origó középpontú gömbfelület egyenlete (ld. még gömbi koordináták, ahol *u*, *v* paraméterek szemléletes jelentésére is fény derül). Vagyis sikerült az F(u, v) függvényt f(x, y, z) alakúra hoznunk.

3.1.2.1 Kétváltozós vektor-skalár függvények deriválása

Két parciális deriváltat definiálunk a differenciahányadosok határértékeként (ld. Kétváltozós valós függvények)
$\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u}=\mathbf{r}'_{\mathrm{u}}$ ill. $\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v}=\mathbf{r}'_{\mathrm{v}}$.

Koordinátás alakban:
$\mathbf{r}'_u=x'_u\mathbf{i}+y'_u\mathbf{j}+z'_u\mathbf{k}$ és
$\mathbf{r}'_v=x'_v\mathbf{i}+y'_v\mathbf{j}+z'_v\mathbf{k}$.

Ezekből képezhetők a magasabbrendű parciális deriváltak is.
Pl.: legyen

$$\mathbf{r}(u,v)=ue^{-v}\mathbf{i}+uv\mathbf{j}+\frac{u^2}{v}\mathbf{k}\text{, akkor}$$

$$\mathbf{r}'_u=e^{-v}\mathbf{i}+v\mathbf{j}+\frac{2u}{v}\mathbf{k}\qquad \mathbf{r}'_v=-ue^{-v}\mathbf{i}+u\mathbf{j}-\frac{u^2}{v^2}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}''_{uu}=\frac{2}{v}\mathbf{k}\qquad \mathbf{r}''_{vv}=ue^{-v}\mathbf{i}+2\frac{u^2}{v^3}\mathbf{k}\qquad \mathbf{r}''_{uv}=-e^{-v}\mathbf{i}+\mathbf{j}-\frac{2u}{v^2}\mathbf{k}$$

A parciális deriváltak is kétparaméteres vektor-skalár függvények. Adott u, v paraméterértékek esetén a hozzájuk rendelt vektor behelyettesítéssel kiszámítható.

Legyen $u=1$, $v=-1$, akkor
$\mathbf{r}(1;-1)=e\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$, $\mathbf{r}'_u(1;-1)=e\mathbf{i}-\mathbf{j}-2\mathbf{k}$, $\mathbf{r}''_{uu}(1;-1)=-2\mathbf{k}$ stb.

Az $\mathbf{r}'_u(u_0;v_0)$ és $\mathbf{r}'_v(u_0;v_0)$ parciális differenciálhányadosok a felületre illeszkedő megfelelő térgörbék érintőjének irányvektorai. Ha a parciális deriváltak folytonosak, akkor a felület egy $\mathbf{r}(u_0;v_0)$ helyvektorú pontjához tartozó összes érintője egy síkban van, amelyet a felület adott ponthoz (adott helyvektorhoz) tartozó **érintősíkjának** nevezzük.
Ezen érintősík normálisa **n**, amely $\mathbf{n}=\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v$ -ből kiszámolható.

Ennek ismeretében az érintősík egyenlete felírható:
Jelölje $\mathbf{R}$ az érintősík tetszőleges pontját (futópontját), akkor az $\mathbf{r}_0$ helyvektorhoz tartozó érintősík egyenlete
$(\mathbf{R}-\mathbf{r}_0)\mathbf{n}=0$, vagyis
$(\mathbf{R}-\mathbf{r}_0)(\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v)=0$. Ez pedig $\mathbf{R}-\mathbf{r}_0$, az $\mathbf{r}'_u$ és $\mathbf{r}'_v$ vektorok vegyes szorzata, amit
$\mathbf{R}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$,
$\mathbf{r}_0=x_0\mathbf{i}+y_0\mathbf{j}+z_0\mathbf{k}$ felhasználásával determináns formájában is felírhatunk:

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ x'_u & y'_u & z'_u \\ x'_v & y'_v & z'_v \end{vmatrix}=0$$

A determináns kifejtésével megkapjuk a sík egyenletét (kétváltozós valós függvényként).

Megjegyzés: a felület normálisának irányítottsága az u és v paraméterek sorrendjétől függ, ennek bizonyos esetekben van jelentősége. (Feltételezzünk, hogy $\mathbf{r}'_u\times\mathbf{r}'_v\neq 0$.)

Pl.: Legyen $\mathbf{r}(u,v)=(2u^2+v)\mathbf{i}-\frac{u}{v}\mathbf{j}+uv\mathbf{k}$.
Keressük a felület érintősíkját az $u=2$, $v=1$ paraméterértékű pontban:
$\mathbf{r}_0=\mathbf{r}(2;1)=9\mathbf{i}-2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, $P_0(9;-2;2)$.

$$\mathbf{r}'_u=4u\mathbf{i}-\frac{1}{v}\mathbf{j}+v\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}'_u(P_0)=8\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}'_v=\mathbf{i}+\frac{u}{v^2}\mathbf{j}+u\mathbf{k} \qquad \mathbf{r}'_u(P_0)=\mathbf{i}+2\mathbf{j}+2\mathbf{k}$$

Az érintősík egyenlete

$$\begin{vmatrix} x-9 & y+2 & z-2 \\ 8 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix}=0, \text{ amiből}$$

$(x-9)(-4)-(y+2)15+(z-2)17=0$. Rendezve $-4x-15y+17z-28=0$ adódik.

Pl.: Legyen a felület $z=f(x,y)$ alakban megadva (pl. $z=x^2+3y^2+5$) és keressük az érintősíkot. Akkor $x=u$, $y=v$ paraméterválasztással
$\mathbf{r}(x,y)=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+f(x,y)\mathbf{k}$, esetünkben
$\mathbf{r}(x,y)=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+(x^2+3y^2+5)\mathbf{k}$.

Adott x_0 és y_0 esetén $z_0=f(x_0,y_0)$ esetünkben legyen $x_0=2$, $y_0=1$, akkor $z_0=12$ az érintési pont koordinátái. A számolás a továbbiakban az előző példával azonos.
$\mathbf{r}'_x=\mathbf{i}+2x\mathbf{k}$ $\quad\mathbf{r}'_x(P_0)=\mathbf{i}+4\mathbf{k}$
$\mathbf{r}'_y=\mathbf{j}+6y\mathbf{k}$ $\quad\mathbf{r}'_y(P_0)=\mathbf{j}+6\mathbf{k}$

Tehát

$$\begin{vmatrix} x-x_0 & y-y_0 & z-z_0 \\ 1 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & 6 \end{vmatrix} = 0 \text{ az érintősík egyenlete.}$$

A kifejtést az olvasóra bízzuk. Ellenőrizze, hogy a kétváltozós valós függvényeknél tanult módon felírt sík egyenletével megegyező-e az eredmény?

3.2 A skalár-vektor függvény

Azokat a függvényeket, amelyek vektorváltozóhoz $(\mathbf{r})$ skalár függvényértéket rendelnek skalár-vektor függvényeknek nevezzük. Jele: $u = u(\mathbf{r})$
Ha a vektort $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ koordinátás alakban írjuk, akkor mondhatjuk, hogy az $u = u(\mathbf{r})$ vektor-skalár függvény megegyezik az $u = u(x, y, z)$ háromváltozós skalár függvénnyel. Például egy térben a hőmérsékletváltozás skalár-vektor függvénnyel jellemezhető, hiszen a tér egy-egy pontjához mutató vektorhoz az ottani hőmérsékletet rendeli.
$T = T(\mathbf{r})$
Az ilyen tulajdonságú tereket skalár tereknek nevezzük.
Az $u = u(x, y, z)$ háromváltozós skalár függvény térbeli derékszögű koordináta rendszerben csak $u = áll.$ esetén ábrázolható.
Az $u(x, y, z) = áll.$ egyenlet egy felület egyenlete, az adott állandóhoz tartozó nívó – vagy szintfelület.

Pl.: ha az $u = \dfrac{z}{xy}$ és $u = 2$, akkor a $z = 2xy$ nyeregfelületet kapjuk.
Példánkban $u = c$ esetén, $z = cxy$ vagyis valamennyi szintfelület nyeregfelület ($c \neq 0$).

Pl.: ha az $u = x^2 + y^2 - z$ és u rendre 0, 1, 2, akkor
$z = x^2 + y^2$
$z = x^2 + y^2 - 1$
$z = x^2 + y^2 - 2$ forgási paraboloidok a szintfelületek.

Az $u = u(\mathbf{r})$ definíció szerint legyen például $u = 2\mathbf{r}^2$, akkor mivel $\mathbf{r}^2 = \mathbf{rr}$ skalárszorzat értéke $x^2 + y^2 + z^2$, így $u = 2(x^2 + y^2 + z^2)$ a megfelelő háromdimenziós skalár függvény. Ennek szintfelületei $u = c$ (≥ 0) origó középpontú koncentrikus gömbök. $\left(x^2 + y^2 + z^2 = \dfrac{c}{2},\right.$ ahol $\dfrac{c}{2} = R^2$ a gömbsugár négyzete).

3.2.1 A skalár-vektor függvény deriválása

A skalármezőt leíró $u = f(x, y, z)$ háromdimenziós függvényhez rendelhető $\dfrac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \dfrac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \dfrac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}$ vektort (feltéve, hogy a parciális deriváltak az értelmezési tartományban

mindenütt léteznek) a skalármező <u>gradiensvektorának</u> (gradiensének) nevezzük, jele $\operatorname{grad} u$.
(Szokásos még a $\operatorname{grad} u = u'_x\mathbf{i} + u'_y\mathbf{j} + u'_z\mathbf{k}$ jelölés is)

Pl.: mennyi az $u = x - 2xy + y^2 z$ skalármező gradiense a $P_0(0;1;2)$ pontban?
$\operatorname{grad} u = (1-2y)\mathbf{i} + (-2x+2yz)\mathbf{j} + y^2\mathbf{k}$, amiből $\operatorname{grad} u_{P_0} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$
Figyeljük meg, hogy az $u = u(\mathbf{r})$ skalármezőhöz a $\operatorname{grad} u(\mathbf{r})$ vektorteret rendel. A gradiensvektor mindig abba az irányba mutat, amerre haladva a skalármező értékei a legnagyobb mértékben változnak.

3.2.1.1 A nabla operátor

Definíciószerűen a ∇ szimbólum (vektorszimbólum) egy adott procedúra szerinti utasítás elvégzésére utal;

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}$$

(Vegyük észre, hogy ez önmagában nem elvégezhető műveletekre utal, hiszen nincs mit deriváljunk!)
A ∇ neve nabla (vagy Hamilton) operátor.

A gradiens kifejezhető ezzel az operátorral;

$$\operatorname{grad} u = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}.$$

A ∇ vektorra ugyanazon szabályok alkalmazhatók, mint más vektorokra. Mondhatjuk, hogy a $\operatorname{grad} u$ és a ∇u jelölés egyenértékű!
Egy érdekes eset a nabla önmagával való skaláris szorzata (négyzete)

$$\nabla\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right) = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Ez egy skalár operátor, amelyet Laplace-operátornak nevezünk, jele Δ.
Vagyis $\Delta = \nabla\cdot\nabla$

Pl.: $\Delta \mathrm{u} = \dfrac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{x}^2} + \dfrac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{y}^2} + \dfrac{\partial^2 \mathrm{u}}{\partial \mathrm{z}^2}$

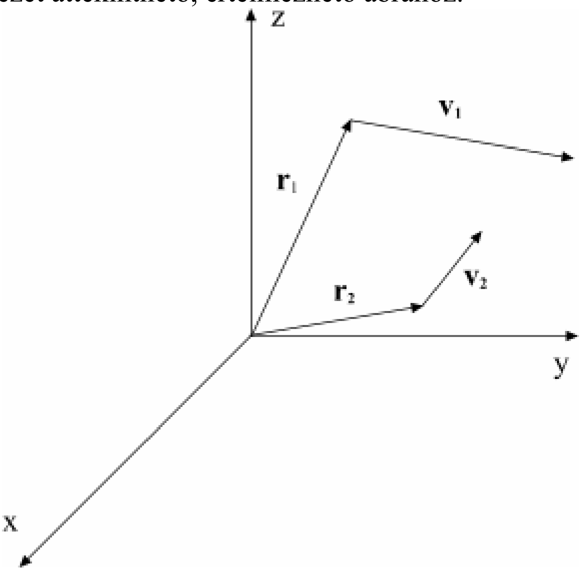
ha $u = x^2 y - yz^3$, akkor $\Delta u = 2y - 6zy$.

Pl.: értelmezhető-e a ∇ (∇u) művelet, vagy másként írva a $\operatorname{grad}(\operatorname{grad} u)$?
Nem, mert ∇u (vagy $\operatorname{grad} u$) vektormező, és annak nincs gradiense!

3.3 Vektor-vektor függvények (vektormezők)

Az olyan függvényeket, amelyek vektorváltozóhoz ($\mathbf{r}$) vektor értéket ($\mathbf{v}$) rendelnek, vektor-vektor függvényeknek nevezzük. Jele: $\mathbf{u} = \mathbf{v}(\mathbf{r})$
Az ($\mathbf{r}$) helyvektorok (koordinátásan $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$) végpontjaihoz ez a hozzárendelés egy-egy új vektort $\mathbf{v} = v_1\mathbf{i} + v_2\mathbf{j} + v_3\mathbf{k}$ rendel, ahol v_1, v_2, v_3 az x, y, z koordináták függvényei, vagyis:

$v_1 = v_1(x,y,z) = v_1(\mathbf{r})$
$v_2 = v_2(x,y,z) = v_2(\mathbf{r})$
$v_3 = v_3(x,y,z) = v_3(\mathbf{r})$
A $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = v_1(x,y,z)\mathbf{i} + v_2(x,y,z)\mathbf{j} + v_3(x,y,z)\mathbf{k}$ a vektor-vektor függvény leggyakoribb (koordinátás) alakja.
Vektor-vektor függvényekkel jellemezhetők a fizikában pl. az erőterek (gravitációs, elektromágneses), a sebességterek (áramlások) stb. Szokás az (**r**) vektorok halmazát tárgyvektor-térnek, a (**v**) vektorok halmazát képvektornak nevezni. A vektor-vektor függvény ábrázolása az adott (**r**) vektorokhoz tartozó (**v**) vektorok felrajzolásával lehetséges, de ez általában nem vezet áttekinthető, értelmezhető ábrához.



Hatásosabb az ún. áramvonalakkal történő ábrázolás. Az áramvonalak olyan irányított görbék, amelyek érintői bármelyik (**r**) pontban egyirányúak a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektorral. Az áramvonalak (általában térgörbék) egyenletének meghatározásával nem foglalkozunk.

Pl.: írjuk fel a $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$ vektor-vektor függvényt koordinátás alakban.

$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$, ezért $|\mathbf{r}| = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$, így

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} = \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{i} + \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{j} + \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\mathbf{k}$$

Ez a függvény a tér minden pontjához a helyvektora irányába mutató egységvektort rendel.

Pl.: Pontszerű Q töltés elektromos erőterét az $\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathrm{k}\frac{\mathrm{Q}}{\mathbf{r}^2}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$ függvény írja le. Ez átírható

$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathrm{kQ}\frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|^3}$ alakra, amiből az

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathrm{kQ}(\frac{\mathrm{x}}{\sqrt{(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+\mathrm{z}^2)^3}}\mathbf{i} + \frac{\mathrm{y}}{\sqrt{(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+\mathrm{z}^2)^3}}\mathbf{j} + \frac{\mathrm{z}}{\sqrt{(\mathrm{x}^2+\mathrm{y}^2+\mathrm{z}^2)^3}}\mathbf{k})$$

koordinátás alak adódik.

Megjegyzések:

- Kétdimenziós esetben (síkban) kimutatható a vektor-vektor függvények és az ún. komplex változós függvények közötti szoros kapcsolat! Az ún. komplex változós függvények $f(z)=f(x+iy)$ alakúak. Az $f(z)$ függvény valós és képzetes része is egy-egy kétváltozós függvény, azaz $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$. Ez azt jelenti, hogy egy komplex változós függvény megadása egyenértékű egy kétváltozós függvényrendszer $u(x,y)$; $v(x,y)$ megadásával.

  Ebből következik, hogy a komplex változós függvények megfelelnek a síkbeli (kétdimenziós) vektor-vektor függvényeknek. (Itt az i az imaginárius egység, ($\mathrm{i}^2=-1$) ami nem tévesztendő össze az $\mathbf{i}$ egységvektorral.)

  A fentiek miatt a komplex változós függvények $z\to f(z)$ leképezése a síkban ábrázolható, ellentétben az $\mathbf{r}\to\mathbf{v}(\mathbf{r})$ térbeli leképezéssel.
- Homogén lineáris vektorfüggvénynek nevezzük azokat, amelyekre $\mathbf{v}(c_1\mathbf{r}_1+c_2\mathbf{r}_2)=c_1\mathbf{v}(\mathbf{r}_1)+c_2\mathbf{v}(\mathbf{r}_2)$ teljesül. Ezek a vektorfüggvények

$$\mathbf{v}(x,y,z)=(a_{11}x+a_{12}y+a_{13}z)\mathbf{i}+(a_{21}x+a_{22}y+a_{23}z)\mathbf{j}+(a_{31}x+a_{32}y+a_{33}z)\mathbf{k}$$

alakúak. Az a_{ij} számokból egy 3x3-as négyzetes mátrixba rendezhető táblázat szerkeszthető

$$\mathbf{A}=\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

Az $\mathbf{A}$ jelű ún. homogén lineáris operátort tenzornak nevezzük.
Ezzel a $\mathbf{v}(\mathbf{r})=A\mathbf{r}$ rövid szimbólummal leírható.

3.3.1 Vektor-vektor függvények differenciálása

3.3.1.1 Vektortér divergenciája

A $\mathbf{v}(\mathbf{r})=v_1(x,y,z)\mathbf{i}+v_2(x,y,z)\mathbf{j}+v_3(x,y,z)\mathbf{k}$ függvényből kiszámítható $\frac{\partial v_1}{\partial x}$; $\frac{\partial v_2}{\partial y}$; $\frac{\partial v_3}{\partial z}$ parciális deriváltak összegét a vektortér $P_0(x,y,z)$ ponthoz tartozó divergenciájának nevezzük. Jele: div $\mathbf{v}$, tehát

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial v_3}{\partial z}$$

Pl.: legyen

$\mathbf{v}(\mathbf{r})=\mathbf{v}(x,y,z)=\sqrt{xy}\,\mathbf{i}+\frac{z}{y}\mathbf{j}+x\ln z\mathbf{k}$, akkor

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=\frac{\partial\sqrt{xy}}{\partial x}+\frac{\partial\left(\frac{z}{y}\right)}{\partial y}+\frac{\partial(x\ln z)}{\partial z}=\frac{\sqrt{y}}{2\sqrt{x}}-\frac{z}{y^2}+\frac{x}{z}$$

Legyen $P_0(4;1;-1)$, akkor

$$\operatorname{div}\mathbf{v}_P=\frac{1}{4}+1-4=-\frac{11}{4}$$

Tehát a vektortér divergenciája egy háromváltozós valós függvény, egy adott helyen pedig annak helyettesítési értékeként egy skalár számot kapunk.

A divergencia kifejezhető a nabla ∇ operátorral is:

$$\operatorname{div}\mathbf{v}=\nabla\mathbf{v}=\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial}{\partial z}\mathbf{k}\right)(v_1\mathbf{i}+v_2\mathbf{j}+v_3\mathbf{k})=\frac{\partial v_1}{\partial x}+\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial v_3}{\partial z}$$

A kétfajta jelölés egyenértékű.

Kérdés: értelmezhető-e a $\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v}(\mathbf{r})$ kifejezés?

Igen, mert a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektor-vektor függvény divergenciája skalár függvény (mező) annak pedig létezik a gradiense, ami pedig vektor (vektormező).

Pl.:

$$\mathbf{v}(\mathbf{r})=xy\mathbf{i}+yz^2\mathbf{j}+\frac{x}{z}\mathbf{k} \qquad \operatorname{div}\mathbf{v}=y+z^2-\frac{x}{z^2}\ \ (=u)$$

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v}=\operatorname{grad}\left(y+z^2-\frac{x}{z^2}\right)=\dots$$

$$=\frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k}=-\frac{1}{z^2}\mathbf{i}+\mathbf{j}+\left(2z+\frac{2x}{z^3}\right)\mathbf{k}$$

legyen $P_0(2;1;2)$, akkor

$$\operatorname{grad}\operatorname{div}\mathbf{v}_P=\left(\frac{1}{4}\mathbf{i}+\mathbf{j}+\frac{7}{2}\mathbf{k}\right)$$ a gradiens vektor a P helyen.

Ugyanez a műveletsor a nabla operátorral $\nabla(\nabla\mathbf{v}(r))$ alakban is felírható.

A divergencia értéke a vektormező ún. forrásosságát (forrás, ha pozitív, ill. nyelő, ha negatív) fejezi ki.

Ha a

- $\operatorname{div}\mathbf{v}_{P_0}=0$, akkor a P pontban a vektormező forrásmentes.
- $\operatorname{div}\mathbf{v}_{P_0}>0$, akkor a P pontban a vektormező forrásos.
- $\operatorname{div}\mathbf{v}_{P_0}<0$, akkor a P pontban a vektormezőnek nyelője van.
- $\operatorname{div}\mathbf{v}_{P_0}=0$, minden szóba jöhető $\mathbf{r}$ helyen, akkor a vektortér forrásmentes.

3.3.1.2 Vektortér rotációja

A $\mathbf{v}(\mathbf{r})=\mathbf{v}_1(x,y,z)\mathbf{i}+\mathbf{v}_2(x,y,z)\mathbf{j}+\mathbf{v}_3(x,y,z)\mathbf{k}$ függvényből képezhető $\nabla\times\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektor függvényt a vektortér rotációjának (örvényességének) nevezzük; jele: $\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r})$, azaz

$$\operatorname{rot}\mathbf{v}(\mathbf{r})=\nabla\times\mathbf{v}(\mathbf{r})=\begin{vmatrix}\mathbf{i}&\mathbf{j}&\mathbf{k}\\ \frac{\partial}{\partial x}&\frac{\partial}{\partial y}&\frac{\partial}{\partial z}\\ v_1&v_2&v_3\end{vmatrix}$$

Pl.: legyen

$$\mathbf{v}(\mathbf{r})=\mathbf{v}(x,y,z)=xyz\mathbf{i}-\frac{x^2}{yz}\mathbf{j}+xz^2\mathbf{k}$$, akkor

$$\text{rot}\,\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xyz & -\frac{x^2}{yz} & xz^2 \end{vmatrix}$$

$$= \mathbf{i}\left(\frac{\partial xz^2}{\partial y} - \frac{\partial\left(-\frac{x^2}{yz}\right)}{\partial z} \right) - \mathbf{j}\left(\frac{\partial xz^2}{\partial x} - \frac{\partial xyz}{\partial z} \right) + \mathbf{k}\left(\frac{\partial\left(-\frac{x^2}{yz}\right)}{\partial x} - \frac{\partial xyz}{\partial y} \right) =$$

$$= \mathbf{i}\left(0 - \left(\frac{x^2}{yz^2} \right) \right) - \mathbf{j}\left(z^2 - xy \right) + \mathbf{k}\left(-\frac{2x}{yz} - xz \right) = -\frac{x^2}{yz^2}\mathbf{i} + \left(xy - z^2 \right)\mathbf{j} - \left(\frac{2x}{yz} + xz \right)\mathbf{k}$$

legyen $P_0(1;-1;2)$, akkor

$$\text{rot}\,\mathbf{v}(\mathbf{r})_{P_0} = \frac{1}{4}\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

Tehát egy vektortér rotációja szintén vektortér, amelynek adott helyen vett értéke egy vektor. Ha egy vektortér rotációja minden szóba jöhető helyen zérus, azaz $\text{rot}\,\mathbf{v}(\mathbf{r}) \equiv 0$, akkor a vektorteret rotációmentesnek (örvénymentesnek) nevezzük.

Pl.: Értelmezhető-e a $\text{rot}(\text{rot}\,\mathbf{v}(\mathbf{r}))$ kifejezés?
Igen, hiszen a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektortér rotációja is vektortér, így annak szintén képezhető a rotációja, aminek eredménye vektortér.

Pl.: Értelmezhető-e a $\text{div}(\text{rot}\,\mathbf{v}(\mathbf{r}))$ kifejezés?
Igen, hiszen a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektortér rotációja is vektortér, aminek divergenciája egy háromváltozós skalártér.

Pl.: Értelmezhető-e a $\text{rot}(\text{div}\,\mathbf{v}(\mathbf{r}))$ kifejezés?
A válasz nem. Indokolja!

Pl.: Számítsa ki a $\text{rot}\,\text{grad}\,u$ értékét, ha

$$u = x^2 + 2xy + y^2 z^2$$

$$\text{grad}\,u = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k} = (2x + 2y)\mathbf{i} + \left(2x + 2yz^2\right)\mathbf{j} + 2y^2 z\mathbf{k}$$

$$\text{rot}\,\text{grad}\,u = \nabla \times (\text{grad}\,u) = \nabla \times (\nabla u) =$$

$$= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2x + 2y & 2x + 2yz^2 & 2y^2 z \end{vmatrix} = \mathbf{i}(4yz - 4yz) - \mathbf{j}(0 - 0) + \mathbf{k}(2 - 2) = 0$$

Vagyis az adott $u(x, y, z)$ skalártér gradiense rotációmentes.

Ez nem véletlen, hiszen a ∇ és a ∇u vektorok párhuzamosak, így vektori szorzatuk mindig 0.

Tehát $\text{rot grad u} = \nabla \cdot (\nabla \text{u}) = 0$.

A már korábban említett Δ (Laplace) operátor megadható div grad operátorok egymás utáni alkalmazásaként.

$\text{div grad}\, u = \nabla(\nabla u) = \nabla^2 u = \Delta u$.

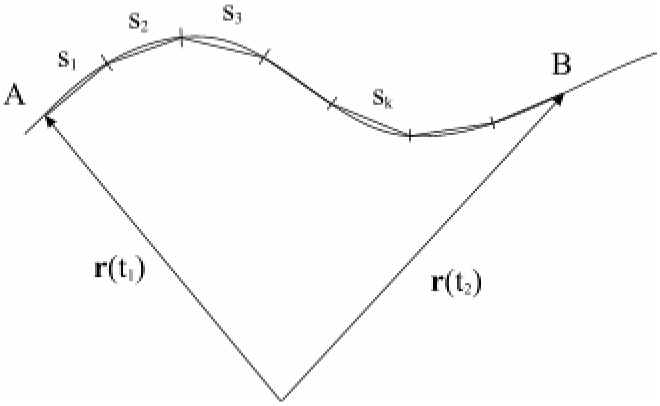
3.4 Vektorfüggvények integrálása

Háromféle vektorfüggvényről volt szó az előbbiekben:
- vektor-skalár (egy és kétparaméteres)
- skalár-vektor
- vektor-vektor

Ezen függvénytípusokkal kapcsolatban is definiálhatók integrálok, amelyek azonban nagymértékben eltérhetnek az egy és kétváltozós függvények integrálásánál tanultaktól. Ebben a fejezetben összefoglaljuk a legfontosabb (a gyakorlatban leginkább előforduló) integrálokat és azokat példában szemléltetjük.

3.4.1 Egyparaméteres vektor-skalár függvény ívhossza

Egy folytonos térgörbe két pontja közötti ívhosszának nevezzük azt a számot, melyhez a görbéhez húzott törött vonalak hosszai tartanak, ha az osztópontok számát minden határon túl növeljük, miközben a töröttvonalat alkotó húrok hosszának maximuma a 0-hoz tart (ld. ábra).



$S_n = \sum_1^n S_k$ a beírt húrok (poligonok) hossza.

A térgörbe AB pontok közötti ívhossza a levezetés mellőzésével:

$$s = \lim_{\substack{n\to\infty \\ \max S_k \to 0}} \sum_1^n S_k = \int_{t_1}^{t_2} |\dot{\mathbf{r}}|\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2}\, dt$$

Pl.: legyen $\mathbf{r}(t) = t^{\frac{3}{2}}\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} - t\mathbf{k}$, akkor

$$\dot{\mathbf{r}}(t) = \frac{3}{2} t^{\frac{1}{2}}\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$|\dot{\mathbf{r}}| = \sqrt{\frac{9}{4}t + 5}$

Keressük az $\mathbf{r}(t)$ ívhosszát az $1 \le t \le 3$ paraméterintervallumban!

$$s = \int_1^3 \sqrt{\frac{9}{4}t + 5}\,dt = \left[\frac{\left(\frac{9}{4}t + 5\right)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}\cdot\frac{9}{4}} \right]_1^3 =$$

$$\frac{8}{27}\left[\left(\frac{27}{4} + 5\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{9}{4} + 5\right)^{\frac{3}{2}} \right] = \frac{8}{27}\left[\left(\frac{47}{4}\right)^{\frac{3}{2}} - \left(\frac{29}{4}\right)^{\frac{3}{2}} \right] = \ldots$$

Ha t_2 nem egy adott érték, hanem folytonosan változó paraméter, akkor az integrál (az ívhossz) ezen t-nek lesz a függvénye.

$s(t) = \int_{t_1}^{t} |\dot{\vec{r}}|\,dt$ Ha az $s = s(t)$ függvényből a t kifejezhető, akkor $t = f(s)$ függvényhez jutunk (pl.: ha egy feladatban $s = \frac{t+1}{t}$ adódik, akkor ebből $t = \frac{1}{s-1}$ $(= f(s)$, t_1 egy rögzített pont, amitől az ív hosszát mérjük).

Ha az ívhosszat választjuk paraméternek, akkor az $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$ függvény, $t = f(s)$ alkalmazásával $\mathbf{r}(s) = x(s)\mathbf{i} + y(s)\mathbf{j} + z(s)\mathbf{k}$ alakú lesz.

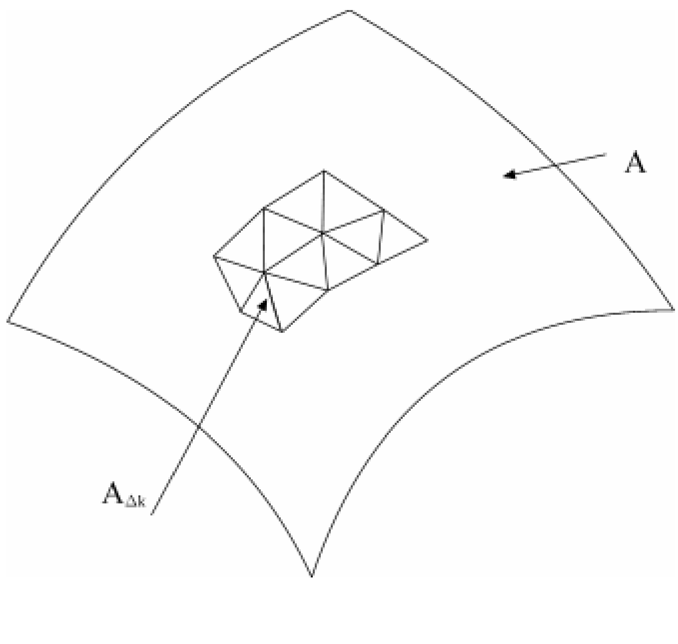
Az ívhossz mint paraméter, sok esetben, számos előnnyel jár (ld. 3.1.1.1):

Pl.:

- $\mathbf{r}'(s) =$ az érintő egységvektor (itt a deriválás s szerint történik, ezért alkalmazzuk a megszokott vesszős – nem pont – jelölést).
- $|\mathbf{r}''(s)| = g$ (görbület) stb.

3.4.2 Kétparaméteres vektor-skalár függvény felszíne

Ahogyan az egyparaméteres vektor-skalár függvény ívhosszát a beírt poligonok (húrok) összege határértékeként értelmeztük, a felület (kétparaméteres vektor-skalár függvény)



felszínét a beírt kis háromszög-lapok alkotta poliédersorozat felszínének határértékeként értelmezzük.

$$A_n = \sum_{i=1}^{n} A_{\Delta k}$$

$A = \lim\limits_{n\to\infty} A_n$ a szükséges, de nem elégséges feltétele a felszín létezésének. Az elégséges feltételek több elemi feltételből adódnak össze, ezek tárgyalásától eltekintünk.

A részletes számítások szerint, ha létezik a felületdarabnak felszíne, akkor az

$A = \iint\limits_T \left|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\right| du dv$, ahol T tartomány a szóba jöhető u, v paraméterértékek zárt, korlátos, egyszeresen összefüggő tartománya. Az $\left|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\right| du dv$ az un. skaláris felületelem (dA).

Megjegyzés: az $(\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v) du dv$ mennyiséget szokás vektoriális felületelemnek is nevezni ($d\mathbf{A}$), amely merőleges a felületelem érintősíkjára.

Pl.: számítsuk ki az

$\mathbf{r}(u,v) = (1+3u+4v)\mathbf{i} + (1+u+3v)\mathbf{j} + (3+4u+6v)\mathbf{k}$ síkfelület felszínét az $u+v \geq 0$; $u+v \leq 1$; paramétertartományban!

$\mathbf{r}'_u = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

$\mathbf{r}'_v = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$ (ebben a példában konstans vektorok, általában u, v függvényei).

$$\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

$$\left|\mathbf{r}'_\mathrm{u} \times \mathbf{r}'_\mathrm{v}\right| = \sqrt{65}$$

$$\mathrm{A} = \int\limits_{\mathrm{u}=0}^{1} \int\limits_{\mathrm{v}=0}^{1-\mathrm{u}} \sqrt{65}\,\mathrm{dvdu} = \sqrt{65}\int\limits_0^1 \left[\mathrm{v}\right]_0^{1-\mathrm{u}} \mathrm{du} = \sqrt{65}\int\limits_0^1 (1-\mathrm{u})\,\mathrm{du} =$$

$$= \sqrt{65}\left[u - \frac{u^2}{2}\right]_0^1 = \frac{\sqrt{65}}{2}$$

Pl.: számítsuk ki az $\mathbf{r}(u,v) = (\cos u - v\sin u)\mathbf{i} + (\sin u + v\cos u)\mathbf{j} + (u+v)\mathbf{k}$ felület $0 \leq u \leq \pi$, $0 \leq v \leq 2$ darabjának A felszínét!

$\mathbf{r}'_u = (-\sin u - v\cos u)\mathbf{i} + (\cos u - v\sin u)\mathbf{j} + \mathbf{k}$

$\mathbf{r}'_v = (-\sin u)\mathbf{i} + (\cos u)\mathbf{j} + \mathbf{k}$

$\left|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\right| = \ldots = \sqrt{2v^2}$ (ellenőrizze a számolást!)

$$A = \int\limits_{v=0}^{2} \int\limits_{u=0}^{\pi} \sqrt{2}v\,du dv = \sqrt{2}\pi \int\limits_0^2 v dv = \sqrt{2}\pi \left[\frac{\mathrm{v}^2}{2}\right]_0^2 = 2\sqrt{2}\pi .$$

Ha a felület $z = z(x,y)$ alakban adott, akkor (ld. korábban) $x = u$; $y = v$ paraméter választással $\mathbf{r}(x,y) \to x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z(x,y)\mathbf{k}$ a megfelelő vektorfüggvény.

$\mathbf{r}'_x = \mathbf{i} + z'_x\mathbf{k}$, $\mathbf{r}'_y = \mathbf{j} + z'_y\mathbf{k}$ és

$$\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & z'_x \\ 0 & 1 & z'_y \end{vmatrix} = -\mathbf{i}z'_x - \mathbf{j}z'_y + \mathbf{k}$$

$$\left|\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y\right| = \sqrt{1 + (z'_x)^2 + (z'_y)^2}$$

$A = \iint_T \left|\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y\right| dxdy$ a felület felszíne.

Pl.: legyen $z(x,y) = \dfrac{x^2}{2y}$ a felület, amelynek $0 \le x \le 1$; $2 \le y \le 3$ paramétertartományban (T) keressük a felszínét (megjegyzés: a *T* egy négyzet).

$$\mathbf{r}(x,y) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + \frac{x^2}{2y}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}'_x = \mathbf{i} + \frac{x}{y}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}'_y = \mathbf{j} - \frac{x^2}{2y^2}\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \dfrac{x}{y} \\ 0 & 1 & -\dfrac{x^2}{2y^2} \end{vmatrix} = -\frac{x}{y}\mathbf{i} - \left(-\frac{x^2}{2y^2}\right)\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\left|\mathbf{r}'_x \times \mathbf{r}'_y\right| = \sqrt{\frac{x^2}{y^2} + \frac{x^4}{4y^4} + 1} = 1 + \frac{x^2}{2y^2}$$

$$A = \int_{y=2}^{3} \int_{x=0}^{1} \left(1 + \frac{x^2}{2y^2}\right) dxdy = \int_2^3 \left[\frac{x^3}{6y^2} + x\right]_0^1 dy = \int_2^3 \left(\frac{1}{6y^2} + 1\right) dy =$$

$$= \left[-\frac{1}{6y} + y\right]_2^3 = \left(-\frac{1}{18} + 3\right) - \left(-\frac{1}{12} + 2\right) = \frac{37}{36}$$

3.4.3 Skalár-vektor függvény integrálása

Korábban láthattuk, hogy az $u(\mathbf{r})$ skalár-vektor függvény átírható $u = f(x,y,z)$ háromváltozós függvény alakúra.

3.4.3.1 Térfogati integrál

Ha V egy mérhető korlátos térbeli tartomány, akkor az $f(x,y,z)$ függvény V-re vonatkozó térfogati (hármas) integrálja alatt a

$\iiint_V f(x,y,z)dxdydz$ integrált értjük. (Röviden az $\int_V f\, dV$ jelölés is szokásos.)

Ha V az *x*, *y*, *z* térbeli derékszögű koordináta rendszerben $x_1 \le x \le x_2$, $y_1 \le y \le y_2$, $z_1 \le z \le z_2$ alakban megadható, akkor tégla(test)-tartományról beszélünk. Ebben az esetben a hármas integrál három darab, egyszeres integrálra visszavezethető és az integrálás sorrendje is tetszőleges.

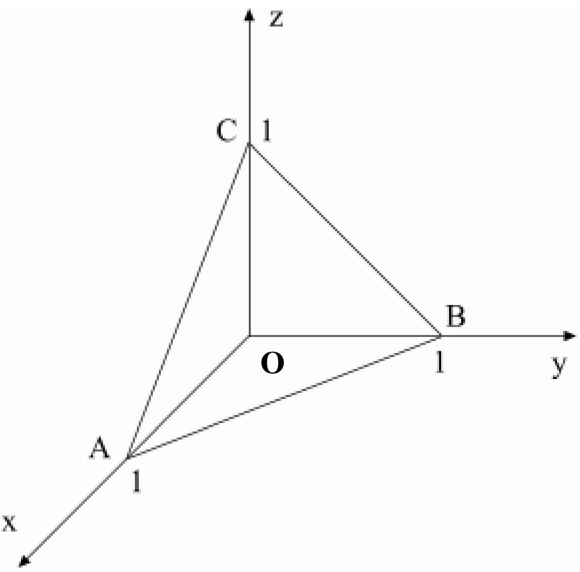
Pl.: legyen $f(x,y,z) = x^2 + 4yz$

V: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$ (kocka), akkor

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 \left(x^2+4yz\right)dzdxdy = \int_0^1\int_0^1 \left[x^2z+2yz^2\right]_0^1 dxdy = \int_0^1\int_0^1 \left(x^2+2y\right)dxdy =$$

$$= \int_0^1 \left[\frac{x^3}{3}+2xy\right]_0^1 dy = \int_0^1 \left(\frac{1}{3}+2y\right)dy = \left[\frac{1}{3}y+y^2\right]_0^1 = \frac{4}{3}$$

Pl.: legyen $f(x,y,z)=2xy$ és a V tartomány az ábra szerinti (O, A, B, C tetraéder).



Az ABC pontokra illeszkedő sík egyenlete

$x+y+z=1$

így V: $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1-x$, $0 \le z \le 1-x-y$ (egy lehetséges megadási mód), ezzel

$$\int_{x=0}^{1}\int_{y=0}^{1-x}\left(\int_{z=0}^{1-x-y} 2xydz\right)dydx =$$

$$\int_0^1\int_0^{1-x}\left[2xyz\right]_0^{1-x-y} = \int_0^1\int_0^{1-x} 2xy(1-x-y)dydx =$$

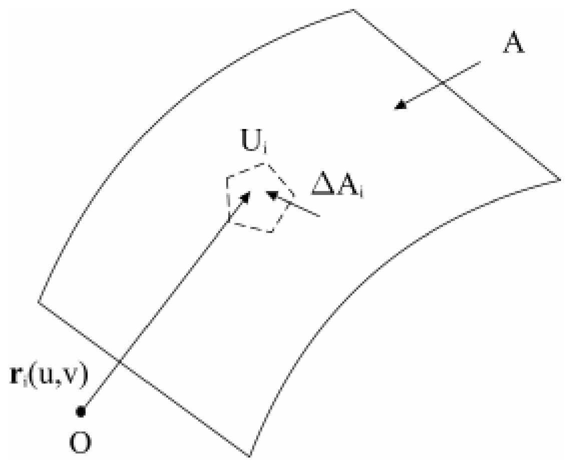
$$\int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left(2xy-2x^2y-2xy^2\right)dy\right)dx = \int_0^1\left[xy^2-x^2y^2-2x\frac{y^3}{3}\right]_0^{1-x} dx = \ldots =$$

$$= \int_0^1\left(-\frac{1}{3}x^4+x^3-x^2+\frac{1}{3}x\right)dx = \frac{1}{60}$$

Bonyolultabb V tartomány esetén, azokat ún. normál tartományokra kell bontani, és a résztartományonkénti integrálok összegét kell venni.

3.4.3.2 Felszín szerinti integrál

Legyen $u(\mathbf{r})$ skalár-vektor függvény, amely értelmezve van egy $\mathbf{r}(u,v)$ függvénnyel adott, mérhető felszínű felület A felületdarabján.



$\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \Delta A_i\to 0}} \Delta A_i = A$ (n az A felületdarab kis részekre osztott darabjainak száma)

A $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{1}^{n} u_i(\mathbf{r})\Delta A_i$ összeget az $u(\mathbf{r})$ függvény $\mathbf{r}(u,v)$ felületre vett felszíni integráljának nevezzük. Jele: $\int\limits_A u(\mathbf{r})\,dA$.

Kiszámítása: $\int\limits_A u(\mathbf{r})\,dA = \iint\limits_T u(\mathbf{r})\left|\mathbf{r}'_n \times \mathbf{r}_v\right|\,dudv$, ahol T az A felületdarabokhoz tartozó (u, v) paramétertartomány.

Pl.: legyen $u(\mathbf{r}) = x + y + z$ és $\mathbf{r}(u,v) = (\sin v\cos u)\mathbf{i} + (\sin v\sin u)\mathbf{j} + \cos v\mathbf{k}$ és $0 \le u \le 2\pi$, $0 \le v \le \frac{\pi}{2}$ a T paramétertartomány.

Akkor az $u(\mathbf{r})$ függvény az $\mathbf{r}(u,v)$ felületen $u(\mathbf{r}) = \sin v\cos u + \sin v\sin u + \cos v$ alakú.

$\mathbf{r}'_u = (-\sin v\sin u)\mathbf{i} + (\sin v\cos u)\mathbf{j}$

$\mathbf{r}'_v = (\cos v\cos u)\mathbf{i} + (\cos v\sin u)\mathbf{j} - \sin v\mathbf{k}$

$\left|\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v\right| = \ldots = \sin v$ (végezze el a kijelölt műveleteket!)

Ezzel $\int\limits_A u(\mathbf{r})\,dA = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_0^{2\pi}(\sin v\cos u + \sin v\sin u + \cos v)\cdot\sin v\;dudv =$

$$= \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}}\Big[(\sin v\sin u - \sin v\cos u + u\cos v)\sin v\Big]_0^{2\pi} dv = \int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} 2\pi\sin v\cos v\;dv = \pi\Big[\sin^2 v\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \pi$$

Megjegyzés: a felszín szerinti integrál nem azonos a felületi integrállal, amely a vektormezőkkel kapcsolatos (ld. később).

3.4.4 Vektor-vektor függvények integrálása

A vektortérben többféle integrál értelmezhető, amelyek hasonlóak ugyan a skalár-analízis integrál fogalmaihoz, de azoktól lényegesen el is térnek, kiszámításuk általában nehezebb. Ezekre a fizika számos területén szükség van, kiemelten az elektromosság (elektromágnesesség) területén.

3.4.4.1 Vonalmenti (görbe menti) skalár értékű integrál

A $\mathbf{v}=\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektortérben legyen $\mathbf{r}=\mathbf{r}(t)$ egy térgörbe. Az $\mathbf{r}(t)$ térgörbe $t_1 \le t \le t_2$ paraméterintervallumára az A és B pontok közé eső ívhosszát (görbehosszát) jelöljük s-sel.

Akkor a $\lim\limits_{\substack{n\to\infty \\ \Delta \bar{r}_i \to 0}} \sum\limits_{1}^{n} \mathbf{v}(\mathbf{r}_i)\Delta\mathbf{r}_i$ összeget a $\mathbf{v}$ vektortér vonalmenti integráljának nevezzük az s görbedarabon. Jelölése: $\int\limits_A^B \mathbf{v}(\mathbf{r})d\mathbf{r}$.

Mivel $\mathbf{v}(\mathbf{r})=v_1(x,y,z)\mathbf{i}+v_2(x,y,z)\mathbf{j}+v_3(x,y,z)\mathbf{k}$, így a skaláris szorzás elvégzése után

$\int\limits_A^B \mathbf{v}(\mathbf{r})d\mathbf{r}=\int\limits_A^B (v_1dx+v_2dy+v_3dz)$ a kiszámítandó integrál.

Megjegyzés: az A,B határokra vonatkozó integrálás, ebben a formában nem végezhető el, hiszen az A és B pontok helyét a t paraméter értékei (t_1; t_2) határozzák meg, miközben az integrálandó összeg az x, y, z függvénye!

A vonalintegrált a fentiek figyelembe vételével adott

$\mathbf{v}(\mathbf{r})=v_1(x,y,z)\mathbf{i}+v_2(x,y,z)\mathbf{j}+v_3(x,y,z)\mathbf{k}$

és

$\mathbf{r}(t)=x(t)\mathbf{i}+y(t)\mathbf{j}+z(t)\mathbf{k}$ (a görbe egyenlete) esetén

$\dot{\mathbf{r}}=\dfrac{d\mathbf{r}}{dt}\to d\mathbf{r}=\dot{\mathbf{r}}dt=(\dot{x}\mathbf{i}+\dot{y}\mathbf{j}+\dot{z}\mathbf{k})dt$ ismeretében tudjuk kiszámítani.

A $\mathbf{v}=\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektorteret a görbe érintett szakaszán felvett értékekre kell lokalizálni, azaz a $\mathbf{v}=\mathbf{v}(\mathbf{r})$ függvény komponenseibe az x, y, z helyébe a görbe egyenletében szereplő $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ értékeket kell beírnunk. Így

$\int\limits_A^B \mathbf{v}(\mathbf{r})d\mathbf{r}=\int\limits_{t_1}^{t_2} \mathbf{v}(\mathbf{r}(t))\dot{\mathbf{r}}dt$ már egy egyváltozós határozott integrál, amely kiszámítható.

A kiszámításhoz a tömör írásmód helyett a koordinátás alakot célszerű használni:

$$\int\limits_A^B \mathbf{v}(\mathbf{r})d\mathbf{r}=\int\limits_{t_1}^{t_2} (v_1(t)\dot{x}(t)+v_2(t)\dot{y}(t)+v_3(t)\dot{z}(t))dt$$

Pl.: Számítsuk ki a $\mathbf{v}(\mathbf{r})=2\mathbf{r}=2(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})$ vektortérnek az $\mathbf{r}(t)=\cos t\mathbf{i}+\sin t\mathbf{j}+2t\mathbf{k}$ térgörbe (csavarvonal) menti vonalintegrálját a $0\le t\le\pi$ paraméterintervallumban.

Az A pont koordinátái $\mathbf{r}(0)=\mathbf{i}$ következményeként $A(1;0;0)$, a B pont koordinátái $\mathbf{r}(\pi)=-\mathbf{i}+2\pi\mathbf{k}$ következményeként $B(-1;0;2\pi)$.

$\int\limits_A^B \mathbf{v}(\mathbf{r})d\mathbf{r}=\int\limits_A^B 2\mathbf{r}d\mathbf{r}$ kiszámításához

az $\mathbf{r}(t)=\cos t\mathbf{i}+\sin t\mathbf{j}+2t\mathbf{k}$ -ból $x(t)=\cos t$, $y(t)=\sin t$; $z(t)=2t$, míg
$\dot{\mathbf{r}}(t)=-\sin t\mathbf{i}+\cos t\mathbf{j}+2\mathbf{k}$, így

$$\int_A^B \mathbf{v}(\mathbf{r})d\mathbf{r}=\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{v}(\mathbf{r}(t))\dot{\mathbf{r}}dt=\int_0^{\pi}2(\cos t\mathbf{i}+\sin t\mathbf{j}+2t\mathbf{k})(-\sin t\mathbf{i}+\cos t\mathbf{j}+2\mathbf{k})dt=$$

$$=2\int_0^{\pi}(-\cos t\sin t+\sin t\cos t+4t)dt=8\int_0^{\pi}tdt=8\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi}=4\pi^2$$

Pl.: számítsuk ki a $\mathbf{v}(x,y,z)=x^2y\mathbf{i}+(x-yz)\mathbf{j}+xyz\mathbf{k}$ vektortér görbe menti integrálját az $\mathbf{r}(t)=(t+1)\mathbf{i}+(2-t)\mathbf{j}+t^2\mathbf{k}$ térgörbe $0\le t\le 1$ szakaszán.

A vektortér a görbe mentén $x=t+1$; $y=2-t$; $z=t^2$ behelyettesítésével

$$\mathbf{v}(t)=(t+1)^2(2-t)\mathbf{i}+\left[t+1-(2-t)t^2\right]\mathbf{j}+(t+1)(2-t)t^2\mathbf{k}=$$

$$=\left(-t^3+3t+2\right)\mathbf{i}+\left(t^3-2t^2+t+1\right)\mathbf{j}+\left(-t^4+t^3+2t^2\right)\mathbf{k} \text{ és}$$

$\dot{\mathbf{r}}(t)=\mathbf{i}-\mathbf{j}+2t\mathbf{k}$. Ezekkel

$$\int_A^B \mathbf{v}(\mathbf{r})d\mathbf{r}=\int_{t_1}^{t_2}\mathbf{v}(\mathbf{r}(t))\dot{\mathbf{r}}(t)\,dt=\int_0^1\left[\left(-t^3+3t+2\right)-\left(t^3-2t^2+t+1\right)+2t\left(-t^4+t^3+2t^2\right)\right]dt=$$

$$=\int_0^1\left(-2t^5+2t^4+2t^3+2t^2+2t+1\right)dt=\left[-2\frac{t^6}{6}+2\frac{t^5}{5}+2\frac{t^4}{4}+2\frac{t^3}{3}+2\frac{t^2}{2}+t\right]_0^1=$$

$$=-\frac{1}{3}+\frac{2}{5}+\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+1+1=\frac{97}{30}$$

Pl.: Számítsuk ki a $\mathbf{v}(x,y,z)=x^2y\mathbf{i}+xy^2\mathbf{j}+xz\mathbf{k}$ vektortér görbe menti integrálját az

$\mathbf{r}_1(t)=t\mathbf{i}+t^2\mathbf{j}+t^3\mathbf{k}$ $\quad 0\le t\le 1$ és az

$\mathbf{r}_2(t)=t^2\mathbf{i}+t^3\mathbf{j}+t^4\mathbf{k}$ $\quad 0\le t\le 1$ térgörbékre.

Vegyük észre, hogy $A(0;0;0)$, $B(1;1;1)$, tehát a két térgörbe kezdő és végpontja a megadott t értékeknél azonos!

a) $\int_A^B \mathbf{v}d\mathbf{r}_1=\int_0^1 \mathbf{v}\dot{\mathbf{r}}_1\,dt$, ahol $\dot{\mathbf{r}}_1=\mathbf{i}+2t\mathbf{j}+3t^2\mathbf{k}$, így

$$\int_0^1\left[\left(t^2t^2\right)\mathbf{i}+\left(tt^4\right)\mathbf{j}+\left(tt^3\right)\mathbf{k}\right]\left[\mathbf{i}+2t\mathbf{j}+3t^2\mathbf{k}\right]dt=$$

$$=\int_0^1\left(t^4\mathbf{i}+t^5\mathbf{j}+t^4\mathbf{k}\right)\left(\mathbf{i}+2t\mathbf{j}+3t^2\mathbf{k}\right)dt=\int_0^1\left(t^4+2t^6+3t^6\right)dt=\ldots=\frac{32}{35}\approx 0{,}914$$

b) $\int_A^B \mathbf{v}d\mathbf{r}_2=\int_0^1 \mathbf{v}\dot{\mathbf{r}}_2dt=\ldots=\frac{443}{495}\approx 0{,}895$

Ebben a feladatban tehát ugyanazon vektortér vonalintegráljai a különböző térgörbéken különbözők annak ellenére, hogy azok kezdő és végpontja azonos!

Pl.: számítsuk ki $\mathbf{v}=y\mathbf{i}+xy\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ vektortér görbe menti integrálját az
$\mathbf{r}(t)=2\mathbf{i}+\cos t\mathbf{j}+\sin t\mathbf{k}$ térgörbére $0\le t\le 2\pi$ paramétertartományban
$\mathbf{r}(0)=2\mathbf{i}+\mathbf{j}$ $\quad A(2;1;0)$

$\mathbf{r}(2\pi) = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} \quad B(2;1;0)$, vagyis itt egy zárt görbéről (esetünkben körről) van szó.

$\mathbf{v}(t) = \cos t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j} + \sin t\mathbf{k}$

$\dot{\mathbf{r}} = -\sin t\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k}$

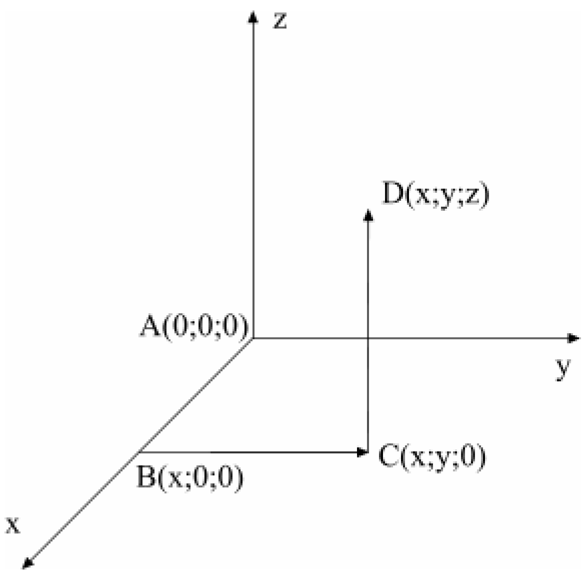
$$\int_0^{2\pi} (\cos t\mathbf{i} + 2\cos t\mathbf{j} + \sin t\mathbf{k})(-\sin t\mathbf{j} + \cos t\mathbf{k})dt =$$

$$= \int_0^{2\pi} (-2\cos t \sin t + \sin t \cos t\ )dt = \ldots = \left[\frac{\cos^2 t}{2}\right]_0^{2\pi} = 0$$

Látjuk, hogy a vektortér zárt görbére vett vonalintegrálja lehet zérus is, de attól eltérő is. A megfordítás nem igaz. Ha a vonalintegrál zérus, akkor abból nem következik a görbe alakja, netán zártsága. A zárt görbére vett vonalintegrálját (függetlenül attól, hogy az nem kör), szokás $\oint$ jellel jelölni és körintegrálnak hívni. Erre a kérdéskörre még visszatérünk!

Pl.: számítsuk ki a $\mathbf{v}(x,y,z)$ vektortér ábra szerinti „görbére" (A, B, C, D) vonatkozó vonalintegrálját.

$\mathbf{v}(x,y,z) = xy^2\mathbf{i} + (x^2y + z)\mathbf{j} + (y+z)\mathbf{k}$ esetén.



Itt várható, hogy a vonalintegrál A-tól D-ig három integrál összegéből adódik és eredménye nem szám, hanem egy háromváltozós (*x, y ,z*) függvény lesz!

$$\int_A^D \mathbf{v}\ d\mathbf{r} = \int_A^B \mathbf{v}\ d\mathbf{r} + \int_B^C \mathbf{v}\ d\mathbf{r} + \int_C^D \mathbf{v}\ d\mathbf{r}$$

Az A-B-C-D „térgörbe" AB darabjának $(0 \le t \le x)$ vektoregyenlete; $\mathbf{r} = t\mathbf{i}$ ($x = t$; $y = 0$; $z = 0$) helyettesítéssel $\mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) = 0$, tehát

$$\int_A^B \mathbf{v}d\mathbf{r} = \int_0^x \mathbf{v}d\mathbf{r} = 0$$

A térgörbe BC darabjának vektoregyenlete;

$\mathbf{r}(t) = x\mathbf{i} + t\mathbf{j} \qquad (0 \le t \le y)$, $\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{j}$

$$\mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) = xt^2\mathbf{i} + x^2t\mathbf{j}$$

$$\int_B^C \mathbf{v}d\mathbf{r} = \int_0^y \left(xt^2\mathbf{i} + x^2t\mathbf{j}\right)\mathbf{j}dt = \int_0^y x^2tdt = x^2\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^y = \frac{x^2y^2}{2}$$

A térgörbe CD darabjának vektoregyenlete:

$\mathbf{r}(t) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + t\mathbf{k} \qquad (0 \le t \le z)$, $\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{k}$

$$\int_B^C \mathbf{v}d\mathbf{r} = \int_0^z \left(xy^2\mathbf{i} + \left(x^2y + t\right)\mathbf{j} + \left(y + t\right)\mathbf{k}\right)\mathbf{k}dt = \int_0^z \left(y + t\right)\, dt = \left[yt + \frac{t^2}{2}\right]_0^z = yz + \frac{z^2}{2}$$

Összegezve a három részintegrált

$$\int_A^D \mathbf{v}d\mathbf{r} = 0 + \frac{x^2y^2}{2} + \left(yz + \frac{z^2}{2}\right) = \frac{x^2y^2}{2} + yz + \frac{z^2}{2}$$ az eredmény.

Megjegyzés: a kapott háromváltozós függvény egy skalár-vektor függvénynek tekinthető:

$$u = \frac{x^2y^2}{2} + yz + \frac{z^2}{2}$$

Keressük ennek a gradiensét;

$\operatorname{grad} u = \nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\mathbf{k} = xy^2\mathbf{i} + \left(x^2y + z\right)\mathbf{j} + \left(y + z\right)\mathbf{k}$ és ráismerünk a $\mathbf{v}(r)$ függvényre. Erre az érdekes eredményre még visszatérünk, elvi és gyakorlati jelentőségére való tekintettel.

3.4.4.2 A vektortér skalár potenciálfüggvénye

Láttuk, hogy a vektortérben a vonalintegrálok kiszámítása egy összetett matematikai feladat, annak értéke függ a görbétől $(\mathbf{r}(t))$, a paramétertartománytól ($t_1 \le t \le t_2$) illetve az azokhoz tartozó *A*, *B* végpontoktól).

Ha a vonalintegrál képletére gondolunk és azt a koordinátás alakban írjuk fel, akkor

$$\int_A^B \mathbf{v}(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \int_A^B \left(v_1(x,y,z)dx + v_2(x,y,z)dy + v_3(x,y,z)dz\right).$$

Ennek kiszámítása, nagyon leegyszerűsödik, ha az integrandus speciálisan egy $u = u(x,y,z)$ skalár függvény teljes differenciálja, azaz (rövid írásmódban):

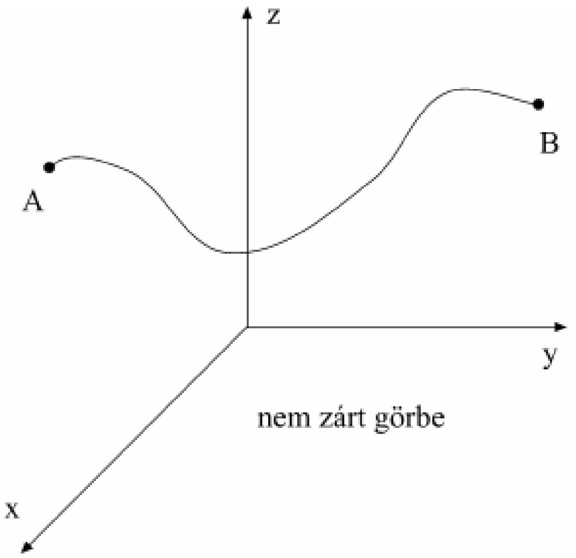
$v_1dx + v_2dy + v_3dz = du = \frac{\partial u}{\partial x}dx + \frac{\partial u}{\partial y}dy + \frac{\partial u}{\partial z}dz$, mert ebben az esetben

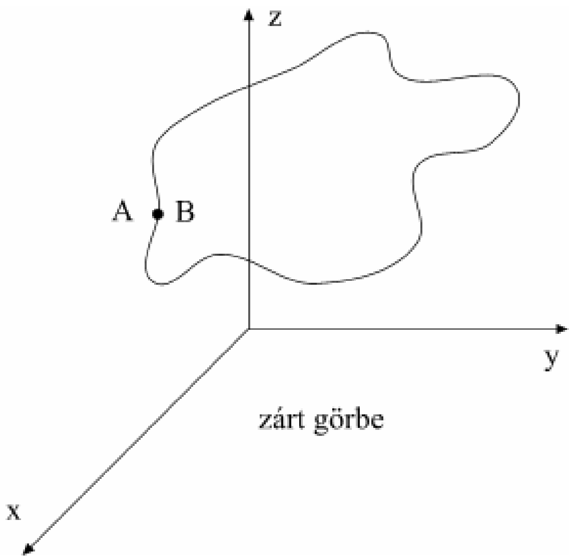
$$\int_A^B \left(v_1dx + v_2dy + v_3dz\right) = \int_A^B du = [u]_A^B = u(B) - u(A)$$

Ebből pedig az következik, hogy az ilyen vektortérben a vonalintegrál értéke teljesen független a görbe alakjától, csak a kezdő (*A*) és a végpont (*B*) függvénye! Hogy az adott vektortérhez rendelhető-e (található-e) ilyen skalár függvény, azt vizsgálni fogjuk. Ha rendelhető, akkor azt honnan lehet felismerni?

Ha létezik ilyen $u(x,y,z)$ függvény, akkor azt a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektortér potenciálfüggvényének (potenciáljának) nevezzük.

Fontos következmény, hogy az $u(x,y,z)$ létezése esetén a vektortér zárt görbéire számított vonalmenti integrálja biztosan zérus, hiszen $A = B$ és $u(B) = u(A)$,





tehát $\int_A^B \mathbf{v}(\mathbf{r})d\mathbf{r} = \oint \mathbf{v}d\mathbf{r} = u(B) - u(A) = 0$.

Az olyan vektorteret, amelynek van potenciálfüggvénye (potenciálja), konzervatív vektortérnek nevezzük. (Ilyen például a gravitációs erőtér, és az elektrosztatikus erőtér is.) A kérdés tehát az, hogy hogyan lehet megállapítani egy $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektortérről, hogy annak van-e potenciálfüggvénye, és ha van, akkor azt hogyan lehet meghatározni? Bizonyítható, hogy ha a vektortér rotációmentes, azaz $\text{rot}\,\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{0}$, akkor biztosan van potenciál. Meghatározását példán mutatjuk be.

Pl.: legyen $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = (2xy + z^2)\mathbf{i} + (2yz + x^2)\mathbf{j} + (2xz + y^2)\mathbf{k}$ a vektortér. Van-e potenciálja?

$$\text{rot}\,\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 2xy + z^2 & 2yz + x^2 & 2xz + y^2 \end{vmatrix} =$$

$$= (2y - 2y)\mathbf{i} - (2z - 2z)\mathbf{j} + (2x - 2x)\mathbf{k} = 0$$

tehát a vektortér rotációmentes, van potenciálja. A keresett potenciálfüggvény legyen $u(x, y, z)$ alakú és tudjuk, hogy

$$\frac{\partial u}{\partial x} = v_1(x, y, z) = 2xy + z^2, \text{ amiből}$$

$$u(x, y, z) = \int (2xy + z^2)\, dx = x^2 y + z^2 x + f(y, z)$$

Az integrációs konstans most y és z függvénye lehet, hiszen x szerinti integrálásról volt szó, tehát $f(y, z)$ x szerinti deriváltja zérus $(f'_x(y, z) = 0)$.

Keressük az $f(y, z)$ függvényt!

Mivel $\frac{\partial u}{\partial y} = v_2(x, y, z)$ így

$$x^2 + \frac{\partial f(y, z)}{\partial y} = 2yz + x^2, \text{ ebből}$$

$$\frac{\partial f(y, z)}{\partial y} = 2yz, \quad f(y, z) = \int 2yz\, dy$$

$f(y,z) = y^2 z + h(z)$

Az integrációs „konstans” most már csak a z függvénye lehet $(h(z))$. Tehát $u(x,y,z) = x^2 y + z^2 x + y^2 z + h(z)$.

Végezetül $\frac{\partial u}{\partial z} = v_3$, vagyis

$$2zx + y^2 + \frac{\partial h(z)}{\partial z} = 2xz + y^2$$

(itt $\frac{\partial h(z)}{\partial z} = h'(z)$ jelölés a célszerűbb, mivel már egyváltozós függvényről van szó)

amiből $h'(z) = 0 \to h(z = C)$

Így a potenciálfüggvény

$u(x,y,z) = x^2 y + z^2 x + y^2 z + C$ (C tetszőleges konstans, lehet zérust is választani)

Másként fogalmazva: ha van potenciálfüggvény, akkor végtelen sok van (de csak a konstansban különböznek). A gyakorlatban ez azt jelenti, hogy hol tekintjük a potenciált zérusnak, az választás kérdése, mert leggyakrabban a két pont közötti potenciálkülönbségre van szükség. Az pedig független a C értékétől. (Előfordul, hogy a potenciált a végtelenben tekintjük zérusnak.)

Ezek után ebben a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektortérben vonalintegrált meghatározni, a potenciálfüggvény ismeretében, már elemi feladat (hiszen integrálás nélkül kapjuk az eredményt).

Számítsuk ki a

$\int_A^B \mathbf{v}(\mathbf{r})d\mathbf{r}$ vonalintegrált az $A(1;2;0)$; $B(4;1;1)$ pontok között (a görbe alakja tetszőleges!)

$$\int_A^B \mathbf{v}(\mathbf{r})d\mathbf{r} = [u(x,y,z)]_A^B = \left[x^2 y + z^2 x + y^2 z + C\right]_{1;2;0}^{4;1;1} = (16+4+1+C) - (2+0+0+C) = 19$$

Ha a $\oint \mathbf{v}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}$ értékét keresnénk, akkor az, a zárt görbe alakjától teljesen függetlenül zérus, azaz

$$\oint \mathbf{v}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} \equiv 0$$

3.4.4.3 Skalár értékű felületi integrál

Egy $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektortér $\mathbf{r}(u,v)$ felületdarabra vonatkozó felületi integrálja alatt az $\int_A \mathbf{v}(\mathbf{r})d\mathbf{A}$ integrált értjük, ahol

$d\mathbf{A} = (\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v)dudv$, tehát

$$\int_A \mathbf{v}(\mathbf{r})d\mathbf{A} = \iint_T \mathbf{v}(\mathbf{r})(\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v)dudv$$

Megjegyzés: az A felületdarab az u, v paraméterekkel jellemezhető T tartomány, tehát kettős integrálra vezet.

Pl.: legyen $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$ vektortér és $\mathbf{r}(u,v) = (1+3u+4v)\mathbf{i} + (1+u+3v)\mathbf{j} + (3+4u+6v)\mathbf{k}$ az adott felület $u \le 0 \le 1$ és $0 \le u+v \le 1$ véges darabja.

$\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = (1+3u+4v)\mathbf{i} + (1+u+3v)\mathbf{j} + (3+4u+6v)\mathbf{k}$ és

$\mathbf{r}'_u = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{r}'_v = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$, ezzel

$$\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 6 \end{vmatrix} = -6\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}(u,v)(\mathbf{r}'_u \times \mathbf{r}'_v) = -6(1+3u+4v) - 2(1+u+3v) + 5(3+4u+6v) = 7$$

$$\int_A \mathbf{v}(\mathbf{r})d\mathbf{A} = \int_{u=0}^{1}\int_{v=0}^{1-u} 7dvdu = \int_0^1 [7v]_0^{1-u} du = \int_0^1 7(1-u)du = 7\left[u - \frac{u^2}{2}\right]_0^1 = 7\left(1-\frac{1}{2}\right) = \frac{7}{2}$$

Megjegyzés: a skalár értékű felületi integrálhoz hasonlóan létezik a $\int_A \mathbf{v}(\mathbf{r})\mathrm{dx}\mathbf{A}$ vektor értékű felületi integrál is.

3.4.4.4 *Integrál redukciós tételek vektorterekben*

a) Gauss-Osztrogradszkij tétel: zárt felület (A) által határolt térben (V) a $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ vektortér divergenciájának térfogatintegrálja megegyezik a vektortér felületi integráljával.

$$\iiint_V \mathrm{div}\ \mathbf{v}(\mathbf{r})\mathrm{dV} = \oiint_A \mathbf{v}(\mathbf{r})\ \mathrm{d}\mathbf{A}$$

Másként mondva felesleges mindkettőt kiszámítani, célszerűen az egyszerűbb integrálhoz vezető utat választjuk.

Pl.: legyen $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ a vektortér, adott A zárt felület, melynek térfogata V ($dV = dxdydz$ derékszögű koordináta rendszerben).

$\oiint_A \mathbf{r}d\mathbf{A} = \iiint_V \mathrm{div}\ \mathbf{r}dxdydz$ kiszámításához

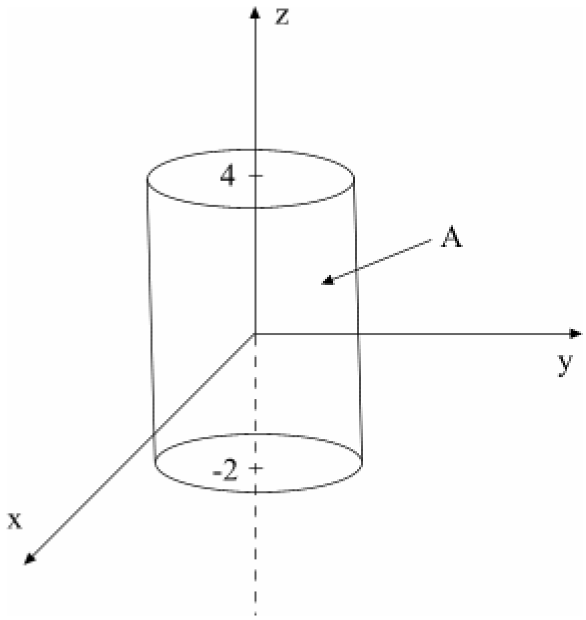
$\mathrm{div}\ \mathbf{r} = 1+1+1 = 3$, tehát $\iiint_V 3\ dxdydz = 3\iiint_V dxdydz = 3V$

Ha például egy R sugarú gömbfelületről van szó, akkor $V = \dfrac{4R^3\pi}{3}$, és így

$$\oiint_A \mathbf{r}d\mathbf{A} = 3\frac{4R^3\pi}{3} = 4R^3\pi$$

Itt a felületi integrált célszerű volt térfogati integrálra visszavezetni.

Pl.: legyen $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = 2x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + 3z\mathbf{k}$. Számítsuk ki ennek felületi integrálját az ábra szerinti henger felületre, amelynek sugara 3.



$\oint\!\!\oint_A \mathbf{v}(\mathbf{r})d\mathbf{A}$ helyett a $\iiint_V \mathrm{div}\,\mathbf{v}(\mathbf{r})dV$ kiszámítása egyszerűbb, mert $\mathrm{div}\,\mathbf{v}(\mathbf{r}) = 2+1+3 = 6$ ezért

$\iiint_V 6dV = 6\iiint_V dV$, melyből $6\iiint_V dV$ éppen az A felület által közbezárt térrész térfogata, azaz a henger térfogata, tehát

$\iiint_V dV = V_{\text{henger}} = r^2\pi m = 9\pi \cdot 6 = 54\pi$

Ezzel $\oint\!\!\oint_A \mathbf{v}(\mathbf{r})d\mathbf{A} = 6 \cdot 54\pi = 324\pi$

Pl.: az elektrosztatikában szerepel a $\mathbf{D}(r)$ eltolási vektormezőre a $\oint\!\!\oint_A \mathbf{D}(r)d\mathbf{A} = \iiint_V \rho dV$ összefüggés ($\rho = \rho(x,y,z)$ a térbeli töltéssűrűség, egysége a Coulomb/m^3).

Mivel

$\oint\!\!\oint_A \mathbf{D}(\mathbf{r})d\mathbf{A} = \iiint_V \mathrm{div}\,\mathbf{D}(\mathbf{r})dV$, így $\iiint_V \mathrm{div}\,\mathbf{D}(\mathbf{r})dV = \iiint_V \rho dV$, amit

$\iiint_V (\mathrm{div}\,\mathbf{D}(\mathbf{r}) - \rho)dV = 0$ alakra hozhatunk.

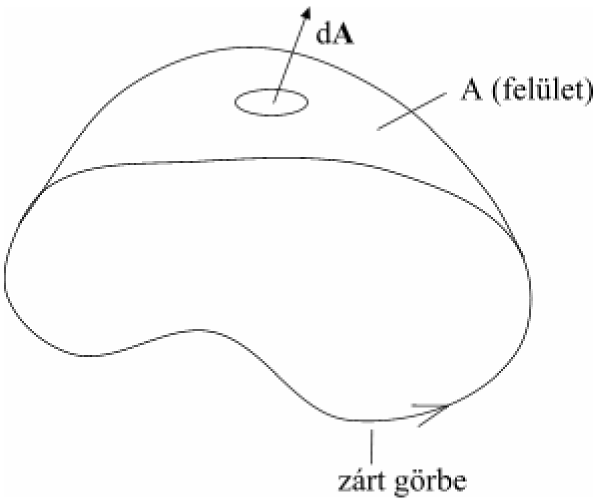
Az integrál értéke a térrésztől függetlenül csak úgy lehet zérus, ha maga az integrandus is zérus, azaz

$\mathrm{div}\,\mathbf{D}(\mathbf{r}) - \rho(x,y,z) = 0$, átrendezve

$\mathrm{div}\,\mathbf{D}(\mathbf{r}) = \rho(x,y,z)$, vagy röviden

$\mathrm{div}\,\mathbf{D} = \rho$, vagyis a $\mathbf{D}$ vektortér divergenciája valóban a forrás (töltés) jelenlétére utal.

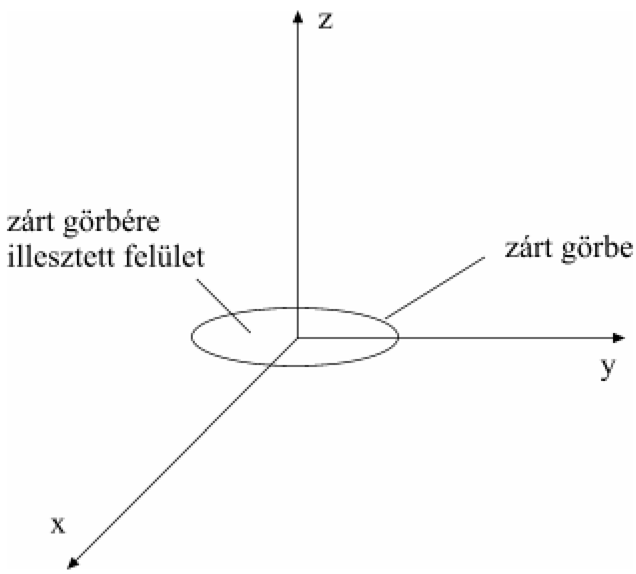
b) Stokes tétel (olv. Sztoksz): a $\mathbf{v}(r)$ vektortérben kapcsolatot teremt a vektortér vonalintegrálja (zárt görbe menti integrálja) és a görbéhez rendelhető felületre vonatkozó felületi integrál között.



A tétel szerint:

$$\oint \mathbf{v}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = \iint_A \operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{r})\, d\mathbf{A}$$

Ez választási lehetőséget ad a könnyebb kiszámíthatóságra.
Pl.: legyen $\mathbf{v}(\mathbf{r}) = \mathbf{r}$, a zárt felület az xy síkban ($z = 0$) levő origó középpontú egységsugarú körlap. Ezt a zárt felületet az egységsugarú kör határolja.



Számítsuk ki $\oint \mathbf{v}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r}$ értékét!

Mivel $\operatorname{rot} \mathbf{v} = \nabla \times \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \ldots = 0$, ezért

$$\oint \mathbf{v}(\mathbf{r})\, d\mathbf{r} = \iint_A \operatorname{rot} \mathbf{v}(\mathbf{r})\, d\mathbf{A} = 0$$

Ha ezt nem vesszük észre, akkor

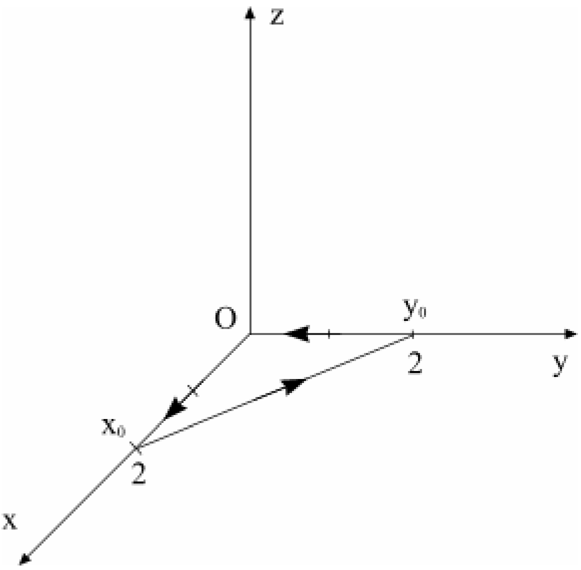
$$\oint \mathbf{v}\ d\mathbf{r} = \int_0^{2\pi} v\left(\mathbf{r}(t)\right)\ \dot{\mathbf{r}}(t)\ dt =$$

(a határoló körvonal egyenlete $\mathbf{r}(t) = \cos \mathbf{i} + \sin \mathbf{j}$, $0 \le t \le 2\pi$)

$$= \int_0^{2\pi} (\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j})(-\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j})\,dt = \int_0^{2\pi} \cos 2t dt = \left[\frac{\sin 2t}{2}\right]_0^{2\pi} = 0$$

Az eredmény ugyanaz, de jóval többet kellett számolni!

Pl.: legyen $\mathbf{v}(r) = \left(-x^2 + y + z\right)\mathbf{i} + \left(x - y^2 + z\right)\mathbf{j} + \left(x + y - z^2\right)\mathbf{k}$ és egy zárt görbe az ábra szerinti.



Számítsuk ki a $\oint \mathbf{v}d\mathbf{r}$ értékét. Ez, három részintegrál összegeként számolható ki:

a) Ox_0 egyenes mentén

$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \qquad 0 \le t \le 2$

$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{i}$, $\mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) = -t^2\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t\mathbf{k}$

$$\int_0^2 \mathbf{v}(\mathbf{r}(t))\dot{\mathbf{r}}\ dt = \int_0^2 -t^2\ dt = \left[-\frac{t^3}{3}\right]_0^2 = -\frac{8}{3}$$

b) x_0y_0 egyenes mentén:

$\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (2 - t)\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \qquad 2 \le t \le 0$

$\dot{\mathbf{r}}(t) = \mathbf{i} - \mathbf{j}$, $\mathbf{v}(\mathbf{r}(t)) = \left(-t^2 + 2 - t\right)\mathbf{i} + \left[t - (2 - t)^2\right]\mathbf{j} + (t + 2 - t)\mathbf{k}$

Az integrál: $\int_0^2 \mathbf{v}(\mathbf{r}(t))\dot{\mathbf{r}}\ dt = \ldots = 0$

c) y_0O egyenes mentén:

$\mathbf{r}(t) = 0\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 0\mathbf{k} \qquad 2 \le t \le 0$

…

$$\int_0^2 \mathbf{v}(\mathbf{r}(t))\dot{\mathbf{r}}\, dt = \ldots = \frac{8}{3}$$

Tehát $\oint \mathbf{v}d\mathbf{r} = -\frac{8}{3} + 0 + \frac{8}{3} = 0$.

Ez felveti annak gyanúját, hogy $\mathrm{rot}\ \mathbf{v} = 0$ lehet, hiszen $\oint \mathbf{v}d\mathbf{r} = \iint_A \mathrm{rot}\ \mathbf{v}d\mathbf{A} = 0$

$$rot\ \mathbf{v} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 + y + z & x - y^2 + z & x + y - z^2 \end{vmatrix} = \ldots = 0$$

Vagyis a gyanú beigazolódott. Ennek tudatában a vonalintegrál kiszámítása felesleges volt, hiszen az utóbbi eredményből már következik annak értéke.

Megjegyzés:

- az integrálokra mutatott példák a lehető legegyszerűbbek. Bonyolultabb esetekben komoly integrálási nehézségek adódhatnak, gyakran kell áttérni henger, vagy gömbi koordinátákra.
- Az ún. Green tétellel nem foglalkozunk.

4 Koordináta rendszerek

Tanulmányaik során síkbeli (kétdimenziós x, y) derékszögű (Descartes-féle) koordináta rendszerrel találkoztak a leggyakrabban, a gyakorlatban is ez a legismertebb. Az un. euklideszi-térben ennek háromdimenziós változatát használtuk az előző fejezetekben x, y, z koordináta tengelyekkel és utaltunk más koordináta rendszerre is, mint lehetőségre.
A koordináta rendszer **matematikai fogalom**, a térben (síkban) való tájékozódásnak, a helymeghatározásnak egyik szemléltető eszköze. Ha tudjuk, vagy feltételezhető a vizsgált probléma (tér, mező, stb.) speciális tulajdonsága (pl. szimmetriája), akkor célszerű a problémához jobban „illeszkedő”, ezáltal a megoldandó matematikai feladatot egyszerűsítő koordináta-rendszer választása.

Például:

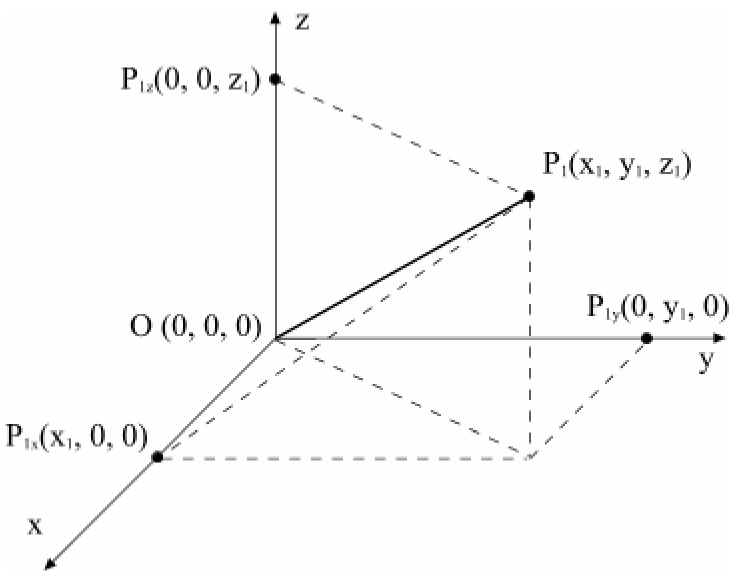
- Egy pontszerű elektromos töltés elektromos erőtere a töltés helyéhez viszonyítva gömbszimmetrikus (irányfüggetlen). Ezért ebben az erőtérben célszerű un. gömbi - koordináta rendszer használata, melynek kezdőpontja (origója) éppen a töltés helyére esik.
- Egy hosszú egyenes vezetőben folyó elektromos áram mágneses tere a vezetékhez (mint vonalhoz) viszonyítva hengerszimmetrikus, ezért itt célszerű henger – koordináta rendszer választása. (A „hosszú” valamihez képest értendő, esetünkben a vezetőtől való távolsághoz viszonyítva.)

Megjegyzés:

Egy adó-antenna sugárzását tervező mérnökök különböző formulákat alkalmaznak, az un. „közel” térben és az un. „távol” térben, mert egyik eset jól közelíthető henger, míg a másik gömbi koordináta rendszerben.

A leggyakrabban használt **henger**- ill. **gömbi** koordináta rendszerek mellett más koordináta rendszerek is választhatók. Úgy is mondhatjuk, hogy végtelen sok koordináta rendszer létezik, ezek közül mi a közismert Descartes-féle koordináta rendszeren kívül a henger- ill. gömbi koordináta rendszerekről szólunk.
A koordináta rendszereknek van egy fix pontja (vagy vonatkoztatási pontja, amit önkényesen rögzítünk valamihez képest) a térben és az összes többi pont helyét ehhez (is) viszonyítva adjuk meg egyértelműen olyan adatokkal (távolságokkal, szögekkel), amelyek (csak) arra a pontra jellemzők. Természetesen az egyes koordináta rendszerek közötti „átjárhatóságot" egyértelmű matematikai összefüggésekben kell kifejezni (koordináta transzformációs formulák). Gyakori eset az, hogy a Descartes-féle koordináta rendszerbe képzelt valamilyen problémát (fizikai, műszaki, stb.) egy másik (pl. gömbi) koordináta rendszerben oldunk meg, majd az eredményeket visszatranszformáljuk (átszámítjuk) Descartes-rendszerbe.
A háromdimenziós (térbeli) koordináta rendszereknek általában jól elképzelhető az un. kétdimenziós (síkbeli) változata úgy, hogy például valamelyik koordináta zérus. Erre a tárgyalás során, mint speciális esetre térünk ki. A vektoranalízis különböző fejezeteiben láttuk a tartományintegrálok (felületdarabok, térrészek) jelentőségét. A későbbiekben erre fokozottan kitérünk, míg az általunk korábban nem részletezett kérdésekre itt legfeljebb utalunk.

4.1 Descartes-féle koordinátarendszer



A három egymásra merőleges tengely (x, y, z) közös pontja az origó (O). A tér egy tetszőleges P_1 pontjának helyét ebben a koordináta rendszerben az (x_1, y_1, z_1) rendezett számhármas (a P_1 pont koordinátái) adja meg. Figyeljük meg, hogy itt az egyes koordináták távolságot fejeznek ki, pl: x_1 jelenti

– a P_1 pont távolságát az y, z síktól vagy

- a P_1 pont x tengelyre eső merőleges vetületének (P_{1x}) távolságát az origótól.

A fentiekből következik, hogyha valamely pont;
- egyik (és csak egyik) koordinátája zérus, akkor az rajta van valamelyik koordináta síkon (de nem tengelyen)
- két (és csak két) koordinátája zérus, akkor az rajta van valamelyik tengelyen (de nem az origóban)
- mindhárom koordinátája zérus, akkor az, az origóban van.

Ebben a koordináta rendszerben számos függvénytani problémával foglalkoztunk az előtanulmányokban (pl. kétváltozós valós függvények analízise, vektorváltozós függvények stb.).

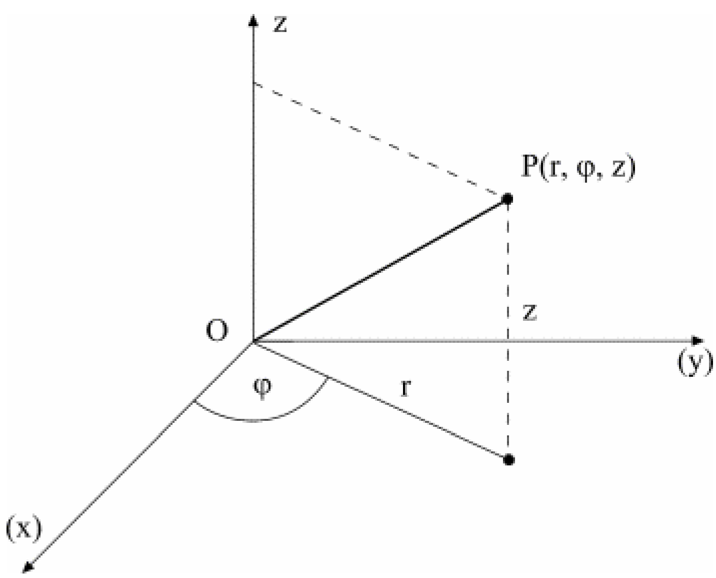
Összefoglalásképpen:

$\iint\limits_T f(x,y)dxdy$, ahol T normál tartomány és
$dA = dxdy$ a felületelem („téglalap”).

A térfogatelem: $dV = dxdydz$ („téglatest”).

Az ívelem: $|d\mathbf{r}| = ds = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2}$ (Pitagorasz tétel).

4.2 Henger koordinátarendszer



Ebben a koordináta rendszerben az ábra szerinti *(r, φ, z)* számhármas adja meg a P pont helyét a térben. A Descartes-féle koordináta rendszer x tengelyét szokás itt polár tengelynek is nevezni, amitől a φ szöget mérjük. Vegyük észre, hogy a *z* koordináta változatlan marad. A Descartes-féle koordináták *(x, y, z)* és a hengerkoordináták *(r, φ, z)* között az ábra szerint az

$$x = r\cos\varphi$$
$$y = r\sin\varphi$$
$$z = z$$

összefüggések érvényesek.

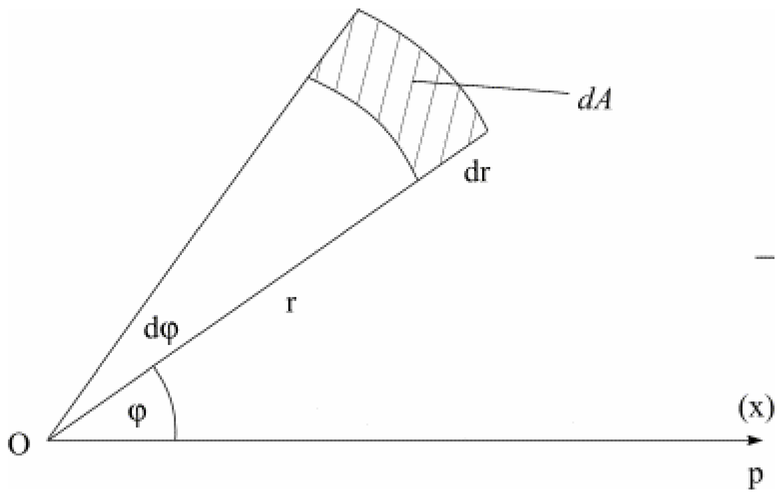
(Belátható, hogy $x^2 + y^2 = r^2$ és $\varphi = arctg\frac{y}{x}$)

Megjegyzések:

Ha z ≡ 0 egy adott feladatkörben, akkor az un. síkbeli polár koordináta rendszerhez jutunk, amelyet széles körben alkalmaznak.
Ebben a koordináta rendszerben például egy O középpontú R sugarú kör egyenlete r = R , ami lényegesen egyszerűbb, mint Descartes koordinátákban. A síkgörbék jelentős része csak r = r (φ) alakban adható meg, ill. ebben az alakban egyszerűbb mint esetleg Descartes koordinátarendszerben. A leghíresebbek a különböző spirálisok, amelyek egy része $r = a \cdot \varphi^n$ (a > 0) alakban adható meg.

Pl: n = 1 esetén archimedesi spirális
n = - 1 esetén hiperbolikus spirális
n = 2 esetén Galilei spirális
$n = \frac{1}{2}$ esetén parabolikus (Fermat) spirális stb.

Ebben az esetben egy felületelem az ábra szerint:

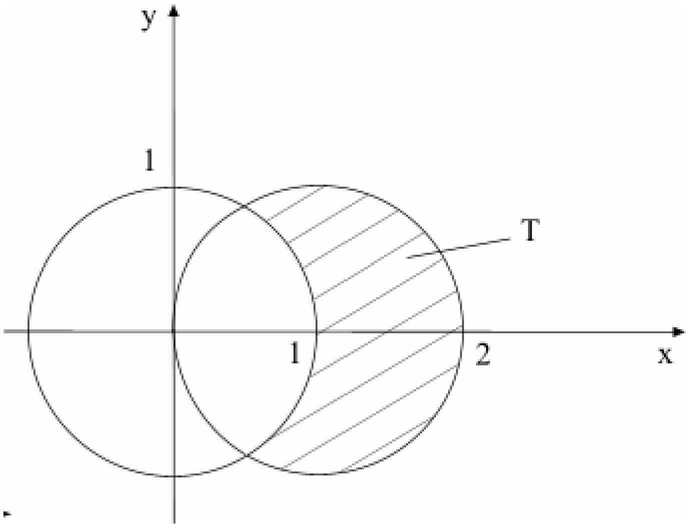


$$dA = rd\varphi dr$$

Ezt az összefüggést akár síkidom területének számításához, akár kettős integrál kiszámításánál használhatjuk. Erre később még visszatérünk.

A vektorváltozós függvényeknél láttuk a tartomány és a térfogati integrálok jelentőségét és alkalmazását (ld. integráltételek). Ezek kiszámításához gyakran használjuk a koordináta transzformációt.

Pl: számítsuk ki az $f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2}$ kétváltozós függvény **tartományintegrálját** az ábra szerinti satírozott tartományra.



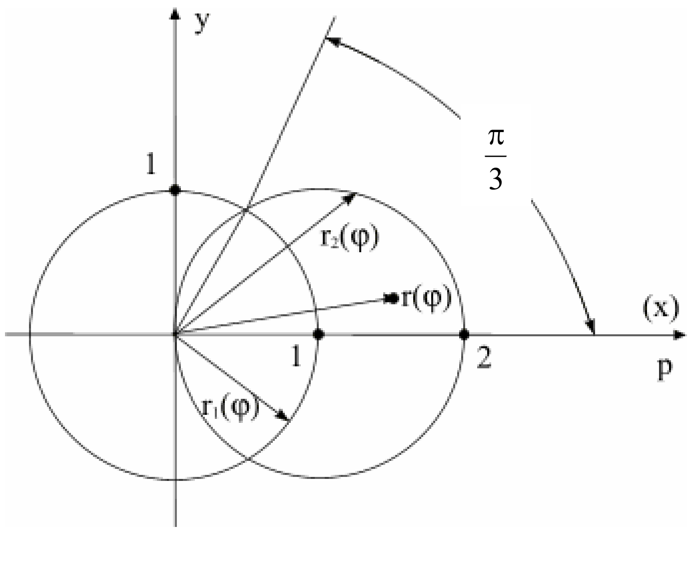
A $\iint\limits_T \sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ integrál kiszámítását megelőzően már az integrációs határok (függvények) megállapítása sem könnyű.

Áttérve polárkoordinátákra

$$f(x,y)=\sqrt{x^2+y^2} \Rightarrow \sqrt{r^2\sin^2\varphi + r^2\cos^2\varphi} = r = f_P(r,\varphi)$$

az integrálandó függvény, míg $dA = dxdy = rdrd\varphi$ és a T tartomány polár megfelelője T_P az ábra szerint:

$$-\frac{\pi}{3} \le \varphi \le \frac{\pi}{3}$$
$$r_1(\varphi)=1,\ \ r_2(\varphi)=2\cos\varphi$$



Tehát

$$\iint_T f(x,y)dxdy = \iint_{T_P} f_P(r,\varphi)rdrd\varphi = \int_{\varphi=-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \int_{r=1}^{2\cos\varphi} r\cdot rdrd\varphi = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left[\frac{r^3}{3}\right]_1^{2\cos\varphi} d\varphi = \int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{3}\left[8\cos^3\varphi - \frac{1}{3}\right]d\varphi =$$

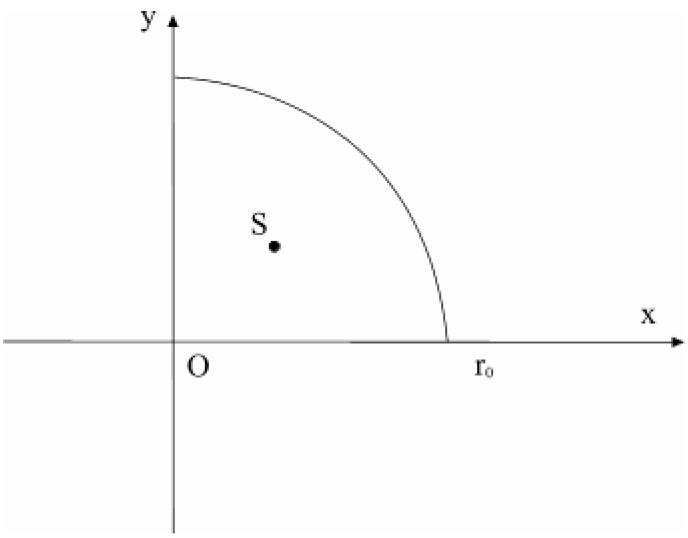
$$= \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left[8\left(1-\sin^2\varphi\right)\cos\varphi - \frac{1}{3}\right]d\varphi = \frac{1}{3}\int_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} \left(8\cos\varphi - 8\sin^2\varphi\cos\varphi - \frac{1}{3}\right)d\varphi =$$

$$= \frac{1}{3}\left[8\sin\varphi - 8\frac{\sin^3\varphi}{3} - \frac{1}{3}\varphi\right]_{-\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{3}} = \ldots = 2\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{9}\right) \approx 2{,}766$$

Megjegyzendő tehát, hogy

az $f(x,y)$ függvénybe $x = r\cos\varphi,\ y = r\sin\varphi$ helyettesítéssel kapjuk az $f\left[x(r,\varphi);\, y(r,\varphi)\right] = f_P(r,\varphi)$ függvényt, amelyet a T_P tartományban integrálunk.

Pl. Homogén síkidom elsőrendű (statikai) nyomatékát az x tengelyre vonatkoztatva $M_x = \iint_T f(x)dxdy$ integrállal lehet meghatározni ($y = f(x)$ a síkidomot „burkoló" görbe egyenlete).
Legyen a síkidom egy (ábra szerinti) negyed körcikk.



Az $M_x = \iint_T ydxdy$ kiszámítása egyszerűbb polárkoordinátákra áttérve:

$$M_x = \int_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}} \int_{r=0}^{r_0} r\sin\varphi \cdot rdrd\varphi =$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\varphi d\varphi \cdot \int_0^{r_0} r^2 dr =$$

$$= \left[-\cos\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}} \cdot \left[\frac{r^3}{3}\right]_0^{r_0} = \frac{r_0^3}{3}$$

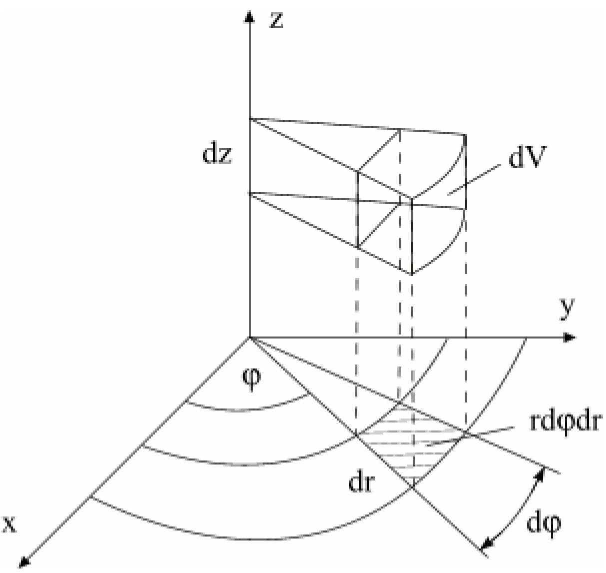
Megjegyzés:

szimmetria okokból $M_x = M_y$ és $x_s = y_s$ a tömegközéppont (S) koordinátái.

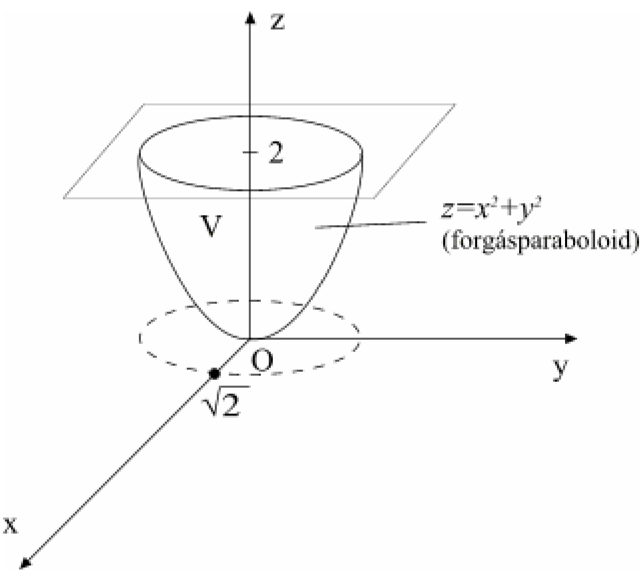
$$x_s = y_s = \frac{M_x}{A} = \frac{\frac{r_0^3}{3}}{\frac{r_0^2\pi}{4}} = \frac{4r_0}{3\pi}$$

(Az A a síkidom – esetünkben negyed körlap – területe.)

Térfogati integrál esetén a $dV = dxdydz$ descartes-i („téglatest alakú”) térfogatelem értéke az ábra alapján $dV = rdrd\varphi dz$ –re változik.



Pl: számítsuk ki a $\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz$ integrált az $f(x,y,z) = (x^2 + y^2)\cdot z$ háromváltozós függvényre az ábra szerinti V térrészre:



$\iiint\limits_V \left(x^2+y^2\right)\cdot zdxdydz$ kiszámítása helyett (gondoljunk az integrál határaira!)

hengerkoordinátákra áttérve:

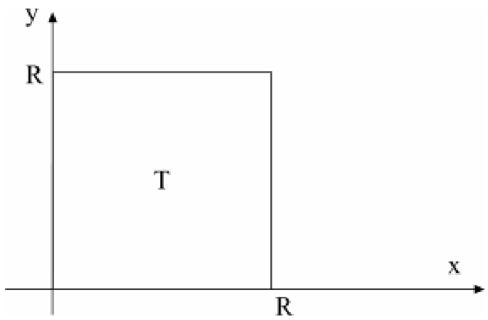
$$\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{\sqrt{2}}\int\limits_{z=r^2}^{2}\left(r^2\sin^2\varphi+r^2\cos^2\varphi\right)\cdot z\cdot rdrd\varphi dz=\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi}\int\limits_{r=0}^{\sqrt{2}}\int\limits_{z=r^2}^{2} r^2zrdrd\varphi dz=\int\limits_{0}^{2\pi}d\varphi\left[\int\limits_{0}^{2\pi}\left(\int\limits_{z=r^2}^{2}r^3zdz\right)dr\right]=\ldots 2\pi$$

(az $f(x,y,z)=\left(x^2+y^2\right)\cdot z$ helyett $f_P(r,\varphi,z)=r^2\cdot z$ az integrálandó függvény)

Pl: számítsuk ki a $\iint\limits_T e^{-x^2-y^2}dxdy$ integrált az ábra szerinti tartományra:

$$\int\limits_0^R\int\limits_0^R e^{-x^2-y^2}dxdy=\int\limits_0^R e^{-x^2}dx\cdot\int\limits_0^R e^{-y^2}dy=\left(\int\limits_0^R e^{-x^2}dx\right)^2$$

(hiszen a két integrál egyenlő). Az integrál a szokásos módon nem határozható meg, mivel e^{-x^2} –nek nincs primitív függvénye.



Ha áttérünk polárkoordinátákra, akkor; $\iint\limits_T e^{-x^2-y^2}dxdy=\int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{r=0}^{R}e^{-r^2}rdrd\varphi$ integrál könnyen kiszámítható az ábra szerinti tartományra.

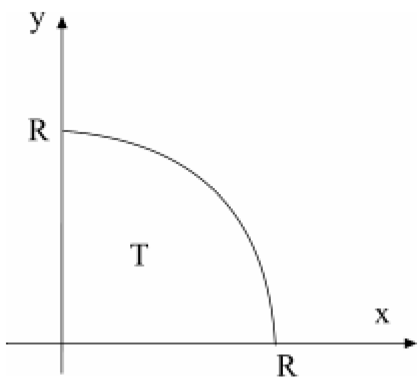
$$\int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}}d\varphi\cdot\int\limits_{r=0}^{R}e^{-r^2}rdr=\left[\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\left[-\frac{1}{2}e^{-r^2}\right]_0^R=\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right)$$

Ha $R\to\infty$, akkor ennek határértéke

$$\lim_{R\to\infty}\frac{\pi}{4}\left(1-e^{-R^2}\right)=\frac{\pi}{4}$$

Mindezekből (bizonyíthatóan) arra lehet következtetni, hogy,

$\int\limits_0^\infty e^{-x^2}dx=\lim\limits_{R\to\infty}\int\limits_0^R e^{-x^2}dx=\sqrt{\frac{\pi}{4}}$, vagy



$\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-x^2}dx=2\cdot\sqrt{\frac{\pi}{4}}=\sqrt{\pi}$ (mivel e^{-x^2} páros függvény!).

Vagyis az improprius integrál kiszámítható.

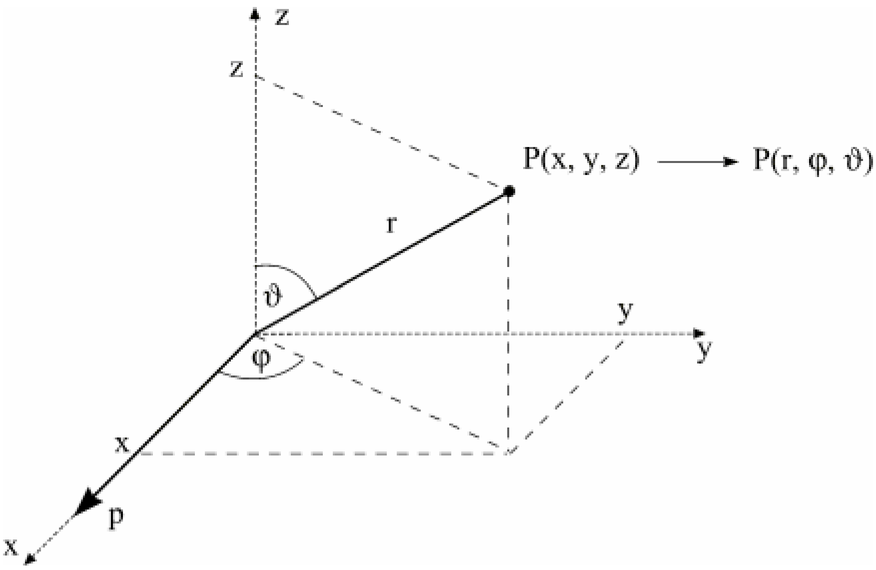
Az e^{-x^2} alapfüggvényből lehet lineáris transzformációval sűrűségfüggvényt (ld. valószínűségszámítás) készíteni, ha fenti integrálja egységnyi lesz.

Erre a $p(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}$ függvény alkalmas.

(ld. standard normál eloszlás sűrűségfüggvénye!)

4.3 Gömbi koordináta rendszer (gömbkoordináták, térbeli polár)

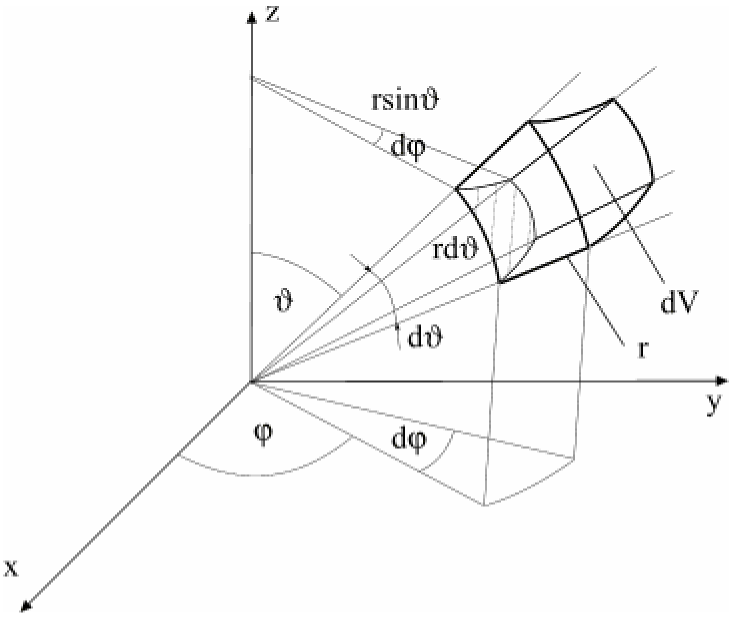
Ebben a koordináta rendszerben egy pont három koordinátája: r, φ, ϑ az ábra szerinti. (Ha $\vartheta \equiv \dfrac{\pi}{2}$, akkor síkbeli polár –koordináta rendszerhez jutunk.)



Az ábra szerinti derékszögű háromszögekre alkalmazott trigonometrikus összefüggésekből:

$$x = r\sin\vartheta\cos\varphi\,, \qquad y = r\sin\vartheta\sin\varphi\,, \qquad z = r\cos\vartheta \qquad \text{adódik.}$$

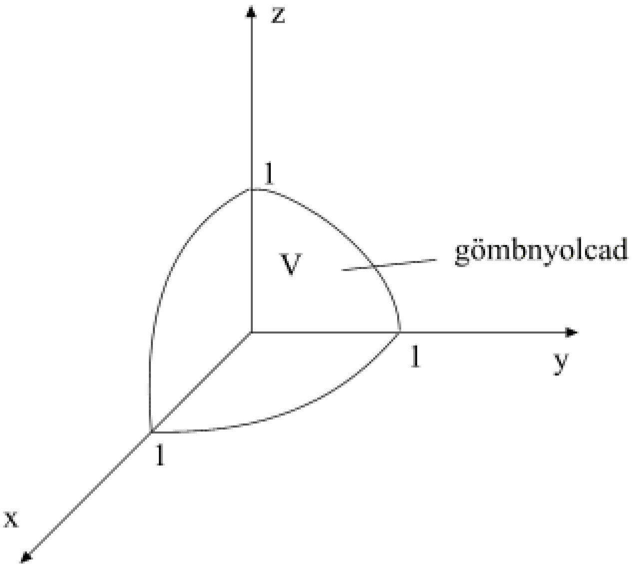
A $dV = dxdydz$ descartes-i térfogatelem („téglatest”) gömbgyűrűcikké transzformálódik az ábra szerint.



$dV = (r\sin\vartheta)\cdot d\varphi\cdot rd\vartheta\cdot dr = r^2\cdot\sin\vartheta drd\varphi d\vartheta$

Tehát $f(x,y,z) = f\left[x(r,\varphi,\vartheta), y(r,\varphi,\vartheta), z(r,\varphi,\vartheta)\right] = f_G(r,\varphi,\vartheta)$ ha elvégezzük a koordináta transzformációt.

Pl: Számítsuk ki az $f(x,y,z) = x\cdot y\cdot z$ függvény térfogatintegrálját az ábra szerinti térrészre.



$\iiint\limits_V f(x,y,z)dxdydz = \iiint\limits_V x\cdot y\cdot z\ dxdydz$ helyett (gondoljon az integrál határaira!)

gömbi koordinátákban

$$\int\limits_{r=0}^{1}\int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}}(r\sin\vartheta\cos\varphi\cdot r\sin\vartheta\sin\varphi\cdot r\cos\vartheta)\cdot r^2\sin\vartheta drd\varphi d\vartheta$$

a megoldandó (látszólag nagyon nehéz!) feladat.

Beszorzások után: $\int\limits_{r=0}^{1}\int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}}\int\limits_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}} r^5\cdot\sin^3\vartheta\cos\vartheta\cdot\sin\varphi\cos\varphi\ drd\varphi d\vartheta$ adódik, ami esetünkben három db integrál szorzatára bontható (mert $f_G(r,\varphi,\vartheta)$ 3 db egyváltozós függvény szorzata):

$$\int\limits_{r=0}^{1} r^5 dr\cdot\int\limits_{\varphi=0}^{\frac{\pi}{2}}\sin\varphi\cos\varphi\ d\varphi\cdot\int\limits_{\vartheta=0}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\vartheta\cos\vartheta\ d\vartheta = \left[\frac{r^6}{6}\right]_0^1\cdot\left[\frac{\sin^2\varphi}{2}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\cdot\left[\frac{\sin^4\vartheta}{4}\right]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{48}$$

Pl: Mennyi annak a gömbnek a tömege (m), amelynek tömegeloszlása nem egyenletes (inhomogén, sűrűsége nem állandó), hanem $\rho = k\cdot r^2$ függvény szerint változik (k>0, és a gömb sugara R adott).

Az $m = \iiint\limits_V \rho\ \mathrm{dV}$ a meghatározandó.

Esetünkben az integrálandó függvény $f_G(r,\varphi,\vartheta)=\rho(r)$, azaz a sűrűség irányfüggetlen (nem szerepel φ és ϑ), nagyon egyszerű.
Gömbi koordinátákban

$$m=\int_{r=0}^{R}\int_{\varphi=0}^{2\pi}\int_{\vartheta=0}^{\pi} kr^2\cdot r^2\sin\vartheta drd\varphi d\vartheta = k\int_0^R r^4dr\int_0^\pi \sin\vartheta d\vartheta\int_0^{2\pi} d\varphi = k\left[\frac{r^5}{5}\right]_0^R\cdot\left[-\cos\vartheta\right]_0^\pi\cdot\left[\varphi\right]_0^{2\pi}=$$

$$=\ldots=\frac{4}{5}k\pi R^5$$

Figyelje meg az integrációs határokat!
Hasonlítsa össze a homogén gömb tömegének sugártól való függésével.

4.4 A helyettesítéses integrál általánosítása

Az előzőekben új koordinátarendszerek bevezetésével olyan lehetőséghez jutottunk, ami bizonyos feladatok megoldhatóságát, vagy egyszerűbb megoldását eredményezte.
Egyváltozós függvények integrálása esetén is gyakran sikeres a helyettesítés. Az új koordináta rendszerek bevezetésével tulajdonképpen helyettesítést végzünk.
A $dV=dxdydz$ descartes-i térfogatelem más-más alakúra változik a választott koordinátarendszertől függően. Bizonyítható, hogyha az x, y, z koordináták helyett új paramétereket – általános jelölésük u, v, w – vezetünk be, akkor

$$dV=dxdydz=\begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix} dudvdw \text{ a térfogatelem.}$$

A $\begin{vmatrix} x'_u & x'_v & x'_w \\ y'_u & y'_v & y'_w \\ z'_u & z'_v & z'_w \end{vmatrix}$ harmadrendű determinánst **Jakobi-determinánsnak** nevezzük. A determinánsban a parciális deriváltak szerepelnek.

Speciálisan:

a. **Hengerkoordináták** esetén u, v, w helyett r, φ, z jelölés honosodott meg.

Mivel $x=r\sin\varphi$ így $x'_r=\sin\varphi$ $x'_\varphi=r\cos\varphi$ $x'_z=0$

$y=r\cos\varphi$ $y'_r=\cos\varphi$ $y'_\varphi=-r\sin\varphi$ $y'_z=0$

$z=z$ $z'_r=0$ $z'_\varphi=0$ $z'_z=1$

Ezzel:

$$dV=dxdydz=\begin{vmatrix} \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} drd\varphi dz = r(\sin^2\varphi+\cos^2\varphi)drd\varphi dz=$$

$=rdrd\varphi dz$, mint azt korábban szemlélet alapján már láttuk.

Ezen belül, ha $z \equiv 0$, akkor síkbeli polárkoordináta rendszerhez jutunk és a felületelem:

$dA = dxdy = \begin{vmatrix} x'_r & x'_\varphi \\ y'_r & y'_\varphi \end{vmatrix} drd\varphi = rdrd\varphi$, amit már láttunk.

b. **Gömbi koordináták** esetén u, v, w helyett r, φ, ϑ jelölés honosodott meg.

Mivel $x = r\sin\vartheta\cos\varphi$

$y = r\sin\vartheta\sin\varphi$

$z = r\cos\vartheta$, így a parciális deriváltak

$x'_r = \sin\vartheta\cos\varphi$

.

.

.

$z'_\vartheta = -r\sin\vartheta$, és a determináns kifejtése, majd rendezés, összevonás után:

$dV = dxdydz = r^2\sin\vartheta drd\varphi d\vartheta$ adódik, amit korábban szemlélet (ábra) alapján már kiszámítottunk.

c. Fentieknek megfelelően elvileg végtelen sok koordináta rendszer választható. A választásra általában valamilyen célszerűségi okból van szükség. Mi további koordináta rendszerekkel nem foglalkozunk.

Felhasznált és ajánlott irodalom:

[1] *Scharnitzky Viktor:* Matematika 3. (TK. 1988)
[2] *Császár Ákosné:* Vektoranalízis (M.K. 2002)
[3] *Fekete-Zalay:* Többváltozós függvények analízise (M.K. 1985)
[4] *Szarka Zoltán:* Vektoranalízis (OMIKK 1988)
[5] *Rejtő-Padi-Révész:* Matematika (Mezőg.K. 1972)
[6] *Dr. Walter József*: Matematika I. agrármérnök hallgatók számára (1995)