ANALÍZIS (1) | **I. ZÁRTHELVI** | **2011. okt. 13.**

Mérnök Informatikus szak | **α változat** | Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (12 pont)

a) Adja meg a következő fogalmak definícióját!

$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0, \qquad\qquad \lim_{n\to\infty} a_n = \infty.$$

b) A megfelelő definícióval igazolja, hogy

$$\lim_{n\to\infty} \frac{2n^3-8}{n^3+1} = 2 \qquad\qquad (N(\varepsilon)=?)$$

a) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$:

D $\left.\begin{array}{l} \forall\, \varepsilon>0\text{-hoz } (\varepsilon\in\mathbb{R})\ \exists\, N(\varepsilon)\in\mathbb{N} : \\ |a_n - 0| < \varepsilon, \text{ ha } n > N(\varepsilon) \end{array}\right\}$ 2

$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$:

D $\left.\begin{array}{l} \forall\, P>0\text{-hoz } (P\in\mathbb{R})\ \exists\, N(P)\in\mathbb{N} : \\ a_n > P, \text{ ha } n > N(P) \end{array}\right\}$ 2

b) $\boxed{8}$

$$|a_n - A| = \left|\frac{2n^3-8}{n^3+1} - 2\right| = \left|\frac{2n^3-8-2(n^3+1)}{n^3+1}\right| =$$

$$= \left|\frac{-10}{n^3+1}\right| = \frac{10}{n^3+1} < \frac{10}{n^3} < \varepsilon \Rightarrow n > \sqrt[3]{\frac{10}{\varepsilon}}$$

$$N(\varepsilon) = \left[\sqrt[3]{\frac{10}{\varepsilon}}\right]$$

2. feladat (12 pont) Keresse meg a következő sorozatok határértékét (ha létezik)!

$$a_n = \sqrt{n^2+n} - n, \qquad\qquad b_n = \frac{n\cdot 2^{3n+1} + 7^n}{3^{2n-8}+4}.$$

6 $\left\{\begin{array}{l} a_n = \left(\sqrt{n^2+n} - n\right)\dfrac{\sqrt{n^2+n}+n}{\sqrt{n^2+n}+n} = \dfrac{\cancel{n^2}+n-\cancel{n^2}}{\sqrt{n^2+n}+n} = \\ = \underbrace{\dfrac{n}{n}}_{=1}\dfrac{1}{\sqrt{1+\frac{1}{n}}+1} \to \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2} \end{array}\right.$

1a1α111013|1

6 $b_n = \frac{n \cdot 2 \cdot 8^n + 7^n}{3^{-8} \cdot 9^n + 4} = \frac{2n \cdot \left(\frac{8}{9}\right)^n + \left(\frac{7}{9}\right)^n}{3^{-8} + 4\left(\frac{1}{9}\right)^n} \longrightarrow \frac{0+0}{3^{-8}+0} = 0$

Felhasználtuk, hogy

$\lim_{n\to\infty} a^n = 0$, ha $|a|<1$

és $\lim_{n\to\infty} n^k a^n = 0$, ha $|a|<1$ és $k \in \mathbb{N}^+$

3. feladat (12 pont) Keresse meg a következő sorozat összes torlódási pontját, limesz szuperiorját, limesz inferiorját, és ha létezik limeszét is!

$$c_n = \frac{(n^2+2)^2}{(n+\pi)^4} \cdot \sin\left(n\frac{\pi}{2}\right).$$

$a_n := \frac{(n^2+2)^2}{(n+\pi)^4} = \underbrace{\frac{n^4}{n^4}}_{=1} \frac{\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^2}{\left(1+\frac{\pi}{n}\right)^4} \longrightarrow \frac{(1+0)^2}{(1+0)^4} = 1$ 3

Ha $n = 4k+1$: $c_n = a_n \cdot 1 = a_n \to 1$ 2

Ha $n = 2k$: $c_n = a_n \cdot 0 = 0 \longrightarrow 0$ 2

Ha $n = 4k+3$: $c_n = a_n \cdot (-1) \longrightarrow -1$ 2

$S = \{1, 0, -1\}$

$\overline{\lim}\, a_n = 1$; $\underline{\lim}\, a_n = -1$, $\lim_{n\to\infty} a_n \nexists$

1 1 1

4. feladat (16 pont) Vizsgálja meg konvergencia szempontjából az alábbi sorozatot!

$$a_{n+1} = \sqrt{3a_n + 4}\,, \qquad n = 1, 2, \cdots \qquad \text{és} \qquad a_1 = 2$$

$$(a_n) \approx (2, 3.16, 3.67, \cdots)$$

Ha (a_n) konvergens, akkor $A = \lim_{n\to\infty} a_n$ kielégíti a rekurzió összefüggést, tehát

$A = \sqrt{3A+4} \implies A^2 - 3A - 4 = 0$ 3

Ezért $A = 4$ vagy $A = -1$.

(Mivel $a_n > 0$, jelenleg csak $A = 4$ jöhet szóba.)

5
Sejtés: (a_n) monoton növő
Bizonyítás: teljes indukcióval
1.) $a_1 < a_2 < a_3$ teljesül
2.) Tegyük fel, hogy
$$a_{n-1} < a_n$$
3.) Igaz-e, hogy
$$a_n = \sqrt{3a_{n-1}+4} < \sqrt{3a_n+4} = a_{n+1} \ ?$$
2.) miatt teljesül, hogy
$$a_{n-1} < a_n \Rightarrow 3a_{n-1} < 3a_n$$
$$\Rightarrow 0 < 3a_{n-1}+4 < 3a_n+4$$
$$\Rightarrow a_n = \sqrt{3a_{n-1}+4} < \sqrt{3a_n+4} = a_{n+1}$$

5
Belátjuk, hogy $a_n < 4$.
Teljes indukcióval:
1.) $a_i < 4$ $\quad i = 1, 2, 3$-ra igaz
2.) Tegyük fel, hogy
$$a_n < 4$$
3.) $a_{n+1} = \sqrt{3a_n+4} < 4$ igaz-e?
2.) miatt $a_n < 4 \Rightarrow 3a_n < 12 \Rightarrow 0 < 3a_n+4 < 16$
$$\Rightarrow \sqrt{3a_n+4} = a_{n+1} < 4 \text{ teljesül.}$$

Tehát a sorozat monoton nő és felülről korlátos, ezért konvergens. 2

Tehát $a_n > 0$ miatt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4$. 1

an1z1a 11.10.13.

5. feladat (10 pont)

Van-e határértéke az

$$a_n = \sqrt[n]{\frac{4n-3}{n^8+100}}$$

sorozatnak?

Konvergens-e a $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sor?

$$\underbrace{\frac{1}{\underset{\downarrow 1}{\sqrt[n]{101}}\,(\underset{\downarrow 1}{\sqrt[n]{n}})^8}}_{\downarrow 1} = \sqrt[n]{\frac{1}{n^8+100n^8}} \le a_n = \sqrt[n]{\frac{4n-3}{n^8+100}} \le \sqrt[n]{\frac{4n}{100}} = \underbrace{\underset{1 \swarrow}{\sqrt[n]{\frac{1}{25}}}\;\underset{\downarrow 1}{\sqrt[n]{n}}}_{\downarrow 1}$$

$$\xRightarrow[\text{rendőrelv}]{} a_n \to 1 \quad 7$$

$\sum a_n$ divergens, mert nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele: $a_n \not\to 0$. 3

6. feladat (12 pont)

a) Mondja ki a sorokra vonatkozó majoráns kritériumot!

b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n+1}+7^n}{3^{2n-8}} = ?$

a. T A pozitív tagú $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ sorra, ha $a_n \le c_n$ $\forall n$-re $\boxed{3}$ (vagy $n > N_1$-re) és $\sum^{\infty} c_n$ konvergens, akkor $\sum^{\infty} a_n$ is konvergens.

b.) A sor két konvergens geometriai sor összege, $\boxed{9}$ így konvergens.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\cdot 8^n + 7^n}{3^{-8}\cdot 9^n} = 2\cdot 3^8 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n + 3^8 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{7}{9}\right)^n = \quad 3$$

$q_1 = \frac{8}{9}$; $|q_1| < 1$ 1 $\qquad q_2 = \frac{7}{9}$, $|q_2| < 1$ 1

$$= 2\cdot 3^8 \frac{\frac{8}{9}}{1-\frac{8}{9}} + 3^8 \frac{\frac{7}{9}}{1-\frac{7}{9}}$$

2 $\qquad$ 2

an1z1a111013/4.

7. feladat (14 pont)

Döntse el az alábbi sorokról, hogy divergensek, konvergensek vagy abszolút konvergensek!

a) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n^2+3}{2n^4+5}$; b) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \left(\frac{2n^2-1}{2n^2+1}\right)^{n^2}$.

a.) $|a_n| = \frac{n^2+3}{2n^4+5} \leq \frac{n^2+3n^2}{2n^4+0} = \frac{2}{n^2}$

$\boxed{6}$

$2\sum^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergens $(\alpha = 2 > 1) \Rightarrow \sum^{\infty} |a_n|$ konvergens.

Tehát a sor abszolút konvergens.

b.) $|b_n| = \left(\frac{2n^2-1}{2n^2+1}\right)^{n^2} = \frac{\left(1+\frac{-1/2}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{1/2}{n^2}\right)^{n^2}} \to \frac{e^{-\frac{1}{2}}}{e^{1/2}} = \frac{1}{e}$

$\boxed{8}$

$|b_n| \not\to 0 \Rightarrow b_n \not\to 0$

A sor divergens, mert nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele.

8. feladat (12 pont) Mutassa meg, hogy a

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n-1}{2n^2+2}$$

sor konvergens! Adjon becslést az $s \approx s_{99}$ közelítés hibájára!

$c_n := \frac{n-1}{2n^2+2}$ (a sor váltakozó előjelű)

(2) $c_n = \underbrace{\frac{n}{n^2}}_{=\frac{1}{n}\to 0} \frac{1-\frac{1}{n}}{2+\frac{2}{n^2}} \to 0 \cdot \frac{1-0}{2+0} = 0$

(5) $c_{n+1} \overset{?}{\leq} c_n$ $\frac{n}{2(n+1)^2+2} \overset{?}{\leq} \frac{n-1}{2n^2+2}$

$n(2n^2+2) \overset{?}{\leq} (n-1)(2n^2+4n+4)$

$\ldots\ 0 \overset{?}{\leq} 4n^2-2n-4 \ (=2n(2n-1)-4)$ $n \geq 2$-re teljesül.

(2) Tehát a sor Leibniz sor, mert $c_n \searrow 0$. Így konvergens

$s \approx s_{99}$: $|H| = |s - s_{99}| \leq c_{100} = \frac{100-1}{2\cdot 100^2+2}$ (3)

an1z1α111013/5.

Pótfeladatok (csak az elégséges eléréséhez javítjuk ki):

9. feladat (12 pont)

Vizsgálja meg konvergencia szempontjából az alábbi számsorozatokat!

a) $a_n = \left(\dfrac{n+1}{n+4}\right)^{5n}$

b) $b_n = \sqrt[n]{\dfrac{5n^2+1}{n^2+5}}$

a.) $\boxed{7}$ $a_n = \left(\dfrac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{4}{n}\right)^n}\right)^5 \to \left(\dfrac{e}{e^4}\right)^5 = e^{-15}$

b.) $\boxed{5}$ $\underbrace{\dfrac{1}{\sqrt[n]{6}\,(\sqrt[n]{n})^2}}_{\downarrow 1} = \sqrt[n]{\dfrac{1}{n^2+5n^2}} \le \sqrt[n]{\dfrac{5n^2+1}{n^2+5}} \le \sqrt[n]{\dfrac{5n^2+n^2}{5}} = \sqrt[n]{\dfrac{6}{5}n^2} = \underbrace{\sqrt[n]{\dfrac{6}{5}}\,(\sqrt[n]{n})^2}_{\downarrow 1}$

$\Rightarrow b_n \to 1$

10. feladat (8 pont) Konvergensek-e az alábbi sorok?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{8+(\sqrt{5})^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{2}{8+\sqrt[n]{7}}$

a.) $\boxed{4}$ $c_n := \dfrac{2}{8+(\sqrt{5})^n}$ A nevező monoton növekedően tart ∞-hez $\Rightarrow c_n \searrow 0$

Így a váltakozó előjelű sor Leibniz sor, tehát konvergens.

Vagy: $c_n < \dfrac{2}{(\sqrt{5})^n}$; $2\sum^{\infty}\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^n$ konvergens geom. sor ($q = \frac{1}{\sqrt{5}}$, $|q|<1$)

A majoráns kritérium miatt a $\sum c_n$ konvergens, tehát a sor abszolút konv, ezért konvergens is.

b.) $\boxed{4}$ $\sum^{\infty} b_n$:

$|b_n| = \dfrac{2}{8+\sqrt[n]{7}} \to \dfrac{2}{8+1} = \dfrac{2}{9} \neq 0 \Rightarrow b_n \not\to 0$,

így $\sum^{\infty} b_n$ divergens, mert teljesül a konvergencia szükséges feltétele.

an1z1a 111013/6.