Megoldás

1. feladat **12 pont**

Oldja meg az

$$\frac{1+7\imath-(4+3\imath)z}{1+\imath-z} = z+1$$

egyenletet!

Megoldás: $z \neq 1+\imath$

$$\begin{aligned} \frac{1+7\imath-(4+3\imath)z}{1+\imath-z} &= z+1 \\ 1+7\imath-(4+3\imath)z &= (z+1)(1+\imath-z) = -z^2+\imath z+1+\imath \\ z^2-(4+4\imath)z+6\imath &= 0 \boxed{\textbf{3p.}} \\ z_{1,2} &= \frac{4+4\imath+\sqrt{(4+4\imath)^2-24\imath}}{2} = 2+2\imath+\underbrace{\sqrt{2\imath}}_{\pm(1+\imath)\boxed{\textbf{3p.}}} \quad \boxed{\textbf{3p.}} \end{aligned}$$

$z_1 = 1+\imath$ nem lehet, így $z_2 = 3+3\imath$ az egyetlen megoldás. $\boxed{\textbf{3p.}}$

2. feladat **5+7+5 pont**

(a) Legyen $a \in \mathbb{R}$ rögzített! Mit tud mondani az a^n mértani sorozat határértékéről?

(b) $\lim\left(\sqrt{4n^2-3n}-\sqrt{4n^2+8n+7}\right) =?$

(c) $\lim \dfrac{n^4 3^n+5^n}{2^{3n+1}+4} =?$

Megoldás:

(a) Ha $a>1$, akkor $a^n \to \infty$, ha $a=1$, akkor $a^n \to 1$, míg $-1<a<1$ esetén $a^n \to 0$. Ha $a \leq -1$, akkor nincs határérték.

(b)
$$\sqrt{4n^2-3n} - \sqrt{4n^2+8n+7} \overset{\boxed{\textbf{2p.}}}{=} \frac{(4n^2-3n)-(4n^2+8n+7)}{\sqrt{4n^2-3n}+\sqrt{4n^2+8n+7}} = \frac{-11n-7}{\sqrt{4n^2-3n}+\sqrt{4n^2+8n+7}} \overset{\boxed{\textbf{3p.}}}{=} \frac{-11-\frac{7}{n}}{\sqrt{4-\frac{3}{n}}+\sqrt{4+\frac{8}{n}+\frac{7}{n^2}}} \overset{\boxed{\textbf{2p.}}}{\longrightarrow} \frac{-11-0}{\sqrt{4-0}+\sqrt{4+0+0}} = \frac{-11}{4}.$$

(c)
$$\frac{n^4 3^n+5^n}{2^{3n+1}+4} \overset{\boxed{\textbf{3p.}}}{=} \frac{n^4\left(\frac{3}{8}\right)^n+\left(\frac{5}{8}\right)^n}{2+4\left(\frac{1}{8}\right)^n} \overset{\boxed{\textbf{2p.}}}{\longrightarrow} \frac{0+0}{2+4\cdot 0} = 0.$$

3. feladat **6 pont**

$$\lim\left(\frac{3n^2+6}{3n^2+1}\right)^{n^2}=?$$

Megoldás: $\left(\frac{3n^2+6}{3n^2+1}\right)^{n^2} = \left(\frac{1+\frac{6}{3n^2}}{1+\frac{1}{3n^2}}\right)^{n^2} = \frac{\left(1+\frac{2}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{1/3}{n^2}\right)^{n^2}}$ **3p.** $\to \frac{e^2}{e^{1/3}} = e^{5/3}$. **3p.**

4. feladat **12 pont**

Hol és milyen típusú szakadásai vannak az $f(x)=\frac{|x+2|\sin(x-1)}{x^2+x-2}$ függvénynek?

Megoldás: Tanult tételek szerint f folytonos, így csak az értelmezési tartomány határán lehet szakadása, azaz a nevező zérushelyein **1p.**.

$x=1$: $\lim_{x\to 1\pm} f(x) = \lim_{x\to 1\pm} \frac{|x+2|}{x+2}\frac{\sin(x-1)}{x-1} = 1\cdot 1 = 1$. **4p.**

Mivel a féloldali határértékek léteznek, végesek és megegyeznek, ezért itt megszüntethető szakadás van. **1p.**

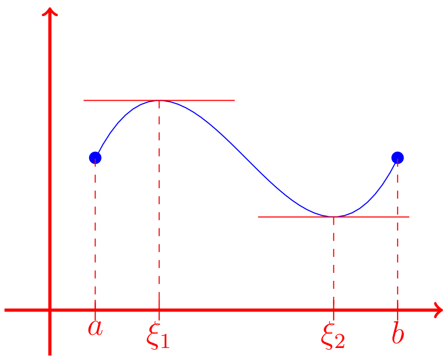
$x=-2$: $\lim_{x\to -2\pm} f(x) = \lim_{x\to -2\pm} \frac{|x+2|}{x+2}\frac{\sin(x-1)}{x-1} = \pm 1\cdot\frac{\sin(-3)}{-3} = \pm\frac{\sin 3}{3}$. **5p.**

Mivel a féloldali határértékek léteznek, végesek de különbözőek, ezért itt véges ugrás van. **1p.**

5. feladat **10 pont**

Mondja ki és igazolja Rolle tételét!

Megoldás: Legyen $a,b\in\mathbb{R}$, $a<b$, f deriválható $]a,b[$-n, és folytonos a-ban és b-ben! Ha $f(a)=f(b)$, akkor létezik $\xi\in]a,b[$, melyre $f'(\xi)=0$. **4p.**



Mivel f folytonos az $[a,b]$ kompakt intervallumon, ezért létezik $\min_{[a,b]} f$, és $\max_{[a,b]} f$. Mivel $f(a)=f(b)$, ezért a két szélsőérték közül legalább az egyiket felveszi a függvény belső pontban (is). Ez jó lesz ξ-nek. **6p.**

6. feladat **8 pont**

Határozza meg a legbővebb intervallumokat, melyeken az $f(x) = \dfrac{x-3}{(x+5)^3}$ függvény monoton! Adja meg a lokális szélsőértékekhelyeket, és ezek jellegét!

Megoldás: $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-5\}$ $\boxed{\textbf{1p.}}$

$f'(x) = \dfrac{1 \cdot (x+5)^3 - (x-3)3(x+5)^2}{(x+5)^6} \boxed{\textbf{2p.}} = \dfrac{(x+5) - 3(x-3)}{(x+5)^4} = \dfrac{-2x+14}{(x+5)^4}$ egyetlen zérushelye $x = 7$. $\boxed{\textbf{1p.}}$

	$]-\infty,-5[$	$]-5,7[$	7	$]7,\infty[$	**1p.**
f	$\uparrow$	$\uparrow$	lok.max.	$\downarrow$	**2p.**
f'	+	+	0	-	**1p.**

Szigorúan monoton növő a $]-\infty,-5[$ és a $]-5,7]$ intervallumokon, és szigorúan monoton csökkenő a $[7,\infty[$ intervallumon. a 7-ben lokális maximum van.

7. feladat* **5+8 pont**

(a) Mondja ki a Newton-Leibniz tételt!

(b) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \left|e^{2x} - 1\right| \mathrm{d}x = ?$

Megoldás:

(a) Ha f Riemann-integrálható $[a,b]$-n, és létezik F primitív függvénye is itt, akkor

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b .$$

(b) $\displaystyle\int_{-1}^{2} \left|e^{2x}-1\right| \mathrm{d}x \overset{\boxed{\textbf{4p.}}}{=} \int_{-1}^{0} 1 - e^{2x}\,\mathrm{d}x + \int_0^2 e^{2x} - 1\,\mathrm{d}x \overset{\boxed{\textbf{2p.}}}{=} \left[x - \frac{e^{2x}}{2}\right]_{-1}^{0} + \left[\frac{e^{2x}}{2} - x\right]_0^2 \overset{\boxed{\textbf{2p.}}}{=} 0 - 0.5 - \left(-1 - \frac{1}{2e^2}\right) + \frac{e^4}{2} - 2 - (0.5+0) = \frac{1}{2e^2} + \frac{e^4}{2} - 2$

8. feladat* **12 pont**

Megfelelő helyettesítéssel határozza meg az $\displaystyle\int \frac{e^x+2}{e^{2x}+1}\,\mathrm{d}x$ integrált!

Megoldás: $e^x = t$ helyettesítéssel $x = \ln t$, és így $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dfrac{1}{t}$, azaz $\mathrm{d}x = \dfrac{\mathrm{d}t}{t}$ $\boxed{\textbf{3p.}}$

Ekkor $\displaystyle\int \frac{e^x+2}{e^{2x}+1}\,\mathrm{d}x \overset{\boxed{\textbf{1p.}}}{=} \int \frac{t+2}{t^2+1}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t.$

$\dfrac{t+2}{t^2+1}\dfrac{1}{t} = \dfrac{At+B}{t^2+1} + \dfrac{C}{t} \implies t+2 = (At+B)t + C(t^2+1) = (A+C)t^2 + Bt + C \implies C = 2, B = 1, A = -2.$ $\boxed{\textbf{3p.}}$

Így $\displaystyle\int \frac{e^x+2}{e^{2x}+1}\,\mathrm{d}x = \int \frac{1-2t}{t^2+1} + \frac{2}{t}\,\mathrm{d}t \overset{\boxed{\textbf{3p.}}}{=} \operatorname{arctg} t - \ln(t^2+1) + 2\ln t + c \overset{\boxed{\textbf{2p.}}}{=} \operatorname{arctg} e^x - \ln(e^{2x}+1) + 2x + c.$

9. feladat* **10 pont**

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(\operatorname{arctg} x + \pi)} \, \mathrm{d}x = ?$$

Megoldás: $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(\operatorname{arctg} x + \pi)} \, \mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{(x^2+1)(\operatorname{arctg} x + \pi)} \, \mathrm{d}x + \int_{0}^{\infty} \frac{1}{(x^2+1)(\operatorname{arctg} x + \pi)} \, \mathrm{d}x = \lim_{a\to-\infty} \int_{a}^{0} \frac{1}{(x^2+1)(\operatorname{arctg} x + \pi)} \, \mathrm{d}x + \lim_{b\to\infty} \int_{0}^{b} \frac{1}{(x^2+1)(\operatorname{arctg} x + \pi)} \, \mathrm{d}x$ $\boxed{\mathbf{3p.}}$ $\displaystyle = \lim_{a\to-\infty} [\ln(\operatorname{arctg} x + \pi)]_a^0 + \lim_{b\to\infty} [\ln(\operatorname{arctg} x + \pi)]_0^b$ $\boxed{\mathbf{3p.}}$ $\displaystyle = \lim_{a\to-\infty} (\ln(\operatorname{arctg} 0 + \pi) - \ln(\operatorname{arctg} a + \pi)) + \lim_{b\to\infty} (\ln(\operatorname{arctg} b + \pi) - \ln(\operatorname{arctg} 0 + \pi)) = \ln\pi - \ln\frac{\pi}{2} + \ln\frac{3\pi}{2} - \ln\pi$ $\boxed{\mathbf{3p.}}$ $= \ln 3$ $\boxed{\mathbf{1p.}}$