**1. feladat (5+12=17 pont)**
*a*) Adja meg a $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ definícióját! (Az $x_0$ a $D_f$ torlódási pontja.)
*b*) A definíció alapján mutassa meg, hogy $\lim\limits_{x\to -2} \dfrac{5x-2}{2x+7} = -4$ !

---

*Mo.* *a*) $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$ ha minden $\varepsilon > 0$ számhoz létezik $\delta(\varepsilon) > 0$, melyre $|x - x_0| < \delta(\varepsilon)$ esetén $|f(x) - A| < \varepsilon$. **(5p)**
*b*) Legyen $\varepsilon > 0$.

$$\left|\frac{5x-2}{2x+7} + 4\right| = \frac{|5x - 2 + 8x + 28|}{|2x+7|} = 13\frac{|x+2|}{|2x+7|}$$

A további becsléshez felhasználjuk, hogy $x$ a $-2$ közelében van. Ha például $|x+2| < 1$, akkor $-3 < x < -1$, és $1 < 2x + 7 < 5$. Tehát

$$13\frac{|x+2|}{|2x+7|} \le 13|x+2| < \varepsilon, \qquad \textbf{(7p)}$$

ha $|x+2| < \frac{1}{13}\varepsilon$ **(3p)** , így $\delta(\varepsilon) = \min\left(1, \frac{1}{13}\varepsilon\right)$. **(2p)**

---

**2. feladat (19 pont)**
Osztályozza az $f(x) = \dfrac{(x+2)\sin^2(x-1)}{|x^3 + x^2 - 2x|}$ függvény szakadási helyeit!

---

*Mo.* A függvény az $0, 1, -2$ pontok kivételével folytonos. **(2p)**

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \frac{(x+2)\sin^2(x-1)}{|x^2+x-2|} \cdot \frac{1}{|x|} = +\infty \qquad \textbf{(3p)}$$

így a 0 pontban a függvénynek lényeges szakadása van **(2p)**

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{(x+2)}{|x^2+2x|} \cdot \frac{\sin^2(x-1)}{(x-1)^2} \cdot |x-1| = 0 \qquad \textbf{(4p)}$$

így az 1 pontban a függvénynek megszüntethető szakadása van **(2p)**

$$\lim_{x\to -2\pm} f(x) = \lim_{x\to 1} \frac{(x+2)}{|x+2|} \cdot \frac{\sin^2(x-1)}{|x^2-x|} = \pm\frac{\sin^2 3}{6} \qquad \textbf{(4p)}$$

így az -2 pontban a függvénynek véges ugrása van **(2p)**

---

**3. feladat (18 pont)**
Adja meg az értelmezési tartományát, illetve értékkészletét az $f(x) = 2\,\mathrm{arctg}(3x+5) + \pi$ függvénynek! Határozza meg a függvény deriváltját! Invertálható a függvény a teljes értelemzési tartományán? (Indokoljon!) Ha igen, írja fel inverzét, és az inverz értelmezési tartományát, illetve értékkészletét.

---

*Mo.* $D_f = \mathbb{R}$ **(2p)** , $R_f = (0, 2\pi)$ **(3p)** . $f'(x) = \dfrac{6}{1+(3x+5)^2}$ **(3p)** . Mivel ez mindig pozitív, a függvény az egész értelmezési tartományán kölcsönösen egyértelmű, így invertálható **(2p)** . Inverze: $f^{-1}(x) = \dfrac{1}{3}\left(\operatorname{tg}\left(\dfrac{x-\pi}{2}\right) - 5\right)$ **(4p)** , $D_{f^{-1}} = (0, 2\pi)$ **(2p)** , $R_{f^{-1}} = \mathbb{R}$ **(2p)**

---

**4. feladat (22 pont)**
Határozza meg a legbővebb intervallumokat, ahol az $f(x) = (x-4)^3(x+3)^2$ függvény monoton! Mely pontokban veszi fel a függvény maximumát, illetve minimumát a $[-1, 1]$ intervallumon?

---

*Mo.* $D_f = \mathbb{R}$, $f'(x) = 3(x-4)^2(x+3)^2 + 2(x-4)^3(x+3) = (x-4)^2(x+3)(3(x+3) + 2(x-4)) = (x-4)^2(x+3)(5x+1) = 0$, ha $x = -3$, $x = -\frac{1}{5}$, $x = 4$ **(6p)** .

| | $(-\infty, -3)$ | $-3$ | $\left(-3, -\frac{1}{5}\right)$ | $-\frac{1}{5}$ | $\left(-\frac{1}{5}, 4\right)$ | $4$ | $(4, \infty)$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $+$ |
| $f$ | $\nearrow$ | lok. max. | $\searrow$ | lok. min. | $\nearrow$ | | $\nearrow$ |

**(6p)**

tehát a függvény monoton nő a $(-\infty, -3]$ és a $\left[-\frac{1}{5}, \infty\right)$ intervallumon, és monoton csökken a $\left[-3, -\frac{1}{5}\right]$ intervallumon. **(2p)** Mivel a függvény mindenhol folytonos, így korlátos és zárt intervalumon felveszi a minimumát és a maxiumát **(2p)** . Mivel a függvény mindenhol differenciálható, a minimumot, illetve a maximumot az intervallum végpontjaiban, vagy az intervallum belsejében levő lokális szélsőértékhelyeken veheti fel. Az intervallumon belül egyedül a $-\frac{1}{5}$ pontban van lokális szálsőértékhely, és előtte a függvény csökkenő, utána pedig nővő, a minimumot ebben a pontban veszi fel. **(3p)** . $f(-1) = -500 < f(1) = -432$, tehát a maximumot a 1 pontban veszi fel. **(3p)**

---

**5. feladat (24 pont)**
Számolja ki az alábbi határértékeket!

$$a)\ \lim_{x\to 2} \frac{\operatorname{sh}(x^2-4)}{\operatorname{arsh}(x^2-2x)} \qquad b)\ \lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^{2x}-1} - \frac{1}{2x}\right)$$

---

*Mo.* a) $\frac{0}{0}$ típusú határérték **(2p)**

$$\lim_{x\to 2} \frac{\operatorname{sh}(x^2-4)}{\operatorname{arsh}(x^2-2x)} = \lim_{x\to 2} \frac{2x\operatorname{ch}(x^2-4)}{\frac{2x-2}{\sqrt{1+(x^2-2x)^2}}} = 2 \qquad \textbf{(10p)}$$

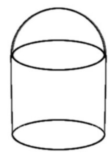
b) $\infty - \infty$ típusú határérték **(2p)**

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1}{e^{2x}-1}-\frac{1}{2x}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{2x-e^{2x}+1}{2x(e^{2x}-1)} = \lim_{x\to 0}\frac{2-2e^{2x}}{2(e^{2x}-1)+4xe^{2x}} =$$

$$= \lim_{x\to 0}\frac{-4e^{2x}}{4e^{2x}+4e^{2x}+8xe^{2x}} = -\frac{1}{2} \qquad \textbf{(10p)}$$

---

**IMSC feladat (8 IMSC pont)**
Olajat szeretnénk egy alul henger, felül félgömb alakú flakonba önteni, amihez összesen 30 dm$^2$ felületre elegendő műanyag áll rendelkezésre. Mekkora legyen a henger alapkörének sugara, hogy a lehető legtöbb olaj férjen a flakonba? (Ha kiürült a flakon, pompás kis madáretetőt lehet belőle csinálni télre!)



*Mo.* Legyen $r$ a henger sugara és $h$ a magassága! Ekkor a flakon térfogata illetve felülete:

$$V = r^2\pi h + \frac{2}{3}r^3\pi, \qquad A = r^2\pi + 2rh\pi + 2r^2\pi \qquad \textbf{(2p)}$$

Mivel $A = 30$ dm$^2$ ismert, így a második egyenletből kifejezve $h$-t és beírva az elsőbe:

$$V(r) = r^2\pi\cdot\frac{A-3r^2\pi}{2r\pi}+\frac{2}{3}r^3\pi = \frac{Ar-3r^3\pi}{2}+\frac{2}{3}r^3\pi. \qquad \textbf{(2p)}$$

Látható, hogy az $V(r)$ függvény differenciálható a $(0,\infty)$ intervallumon (valójában persze $r$ felülről korlátos, hiszen mondjuk a flakon alja nem lehet 10 dm$^2$-nél nagyobb), ezért a lokális szélsőértékhely(ek)en deriváltja zérus.

$$V'(r) = \frac{A}{2}-\frac{9r^2\pi}{2}+2r^2\pi = \frac{A}{2}-\frac{5r^2\pi}{2}, \qquad \textbf{(2p)}$$

és ennek egyetlen pozitív zérushelye az $r_0 = \sqrt{\frac{A}{5\pi}} = \sqrt{\frac{6}{\pi}}$ dm. **(1p)**

Mivel a derivált pozitív a zérushely előtt, és negatív utána, függvénynek valóban maximuma van a $r_0$ helyen **(1p)** .

(A számolást a dimenziók kezelése nélkül, $A = 30$ beírásával is elfogadjuk.)

---