VII. előadás

2010. XI. 16.

Sztochasztikus folyamatok (folytatás)

Adott egy indexhalmaz az időre: T

Van egy S állapottér

$X = (X_t,\ t \in T)$ valószínűségi változó

$$X : \Omega \to S^T$$

S^T: az összes olyan fv, aminek értelmezési tartománya T és értékkészlete S.

Tehát X olyan valószínűségi változó, melynek értéke egy függvény.

X eloszlása: elég nekünk – többdimenziós eloszlásokat ismerni ahhoz, hogy X eloszlása meghatározható legyen.

az összes többdimenziós eloszlás ismert és kompatibilisek.

$\forall n$ és $\forall t_1, \dots, t_n, t_{n+1} \in T$ -re ~~igaz~~ és

~~$B \in S^n = S \times S \times \dots$~~ $\times S$

igaz, hogy $P((X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in B) =$

n dimenziós halmaz

$= P((X_{t_1}, \dots, X_{t_n}, X_{t_{n+1}}) \in B \times S)$

$X_{t_{n+1}}$ tetszőleges

$(X_{t_1}, \dots, X_{t_n}) \in B$

ez a Kolmogorov-féle alaptétel egyik feltétele.

Sztochasztikus folyamat-osztályok

1) Független növekményű

$T = \{0, 1, 2, \dots\} = \mathbb{N}_0$ a nemnegatív egész számok halmaza

Adott egy $X_1, X_2, \dots,$ valószínűségi változó sorozat

↑ fgtlen, azonos eloszlásúak.

legyen $S = \mathbb{R}$

$S = (S_n, n \in \{0, 1, 2, \dots\})$ folyamat.

$S_n = X_1 + \dots + X_n$

$S_0 = 0$

Az S folyamat fgtlen. növekményű, mert bármely vegyünk 2 S_n-t: $n < m < k < l$:

$X_l + \dots + X_{k+1} \leftarrow S_l - S_k$ fgtl. $S_m - S_n$-től.

$S_m - S_n \downarrow X_m + \dots + X_{n+1}$

Egy bolyongást nézünk.

2, Markov-láncok

Az $X = (X_0, X_1, \dots)$ sztochasztikus folyamat diszkrét értékű, diszkrét idejű Markov-lánc, ha $\forall n$-re X_n értékét $S = \{0, 1, \dots\}$-ból veszi és ~~∀n-re~~ $\forall n > 0$ egészre és $\forall i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, i, j \in S$ állapotra

$$P(\overset{\text{jövő}}{X_{n+1}} = j \mid \underbrace{X_n = i}_{\text{jelen}}, \underbrace{X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_0 = i_0}_{\text{múlt}}) =$$

$$= P(X_{n+1} = j \mid X_n = i)$$

Nevezük az n időt a jelennek. Ekkor $n-1, n-2, \dots$ a múlt, $n+1$ pedig a jövő.

Vagyis ha tudjuk a jelenbeli értéket, akkor a jövő független a múlttól.

Ha ismert a folyamat jelene ($X_n = i$), akkor a múlt feltételesen független a jövőtől.

3) Stacionárius folyamatok

Kivesszük a néhány véges dimenziós cuccot, s ha kicsit arrébb megyünk, még mindig azt látjuk.

<u>Def</u>: $(X_0, X_1, \dots)$ folyamat ~~stac~~ erősen stacionárius, ha $\forall n, m$-re $(X_0, \dots, X_n)$ eloszlása $=$

$= (X_m, X_{m+1}, \dots, X_{m+n})$ eloszlása.

<u>Markov-láncok</u>

$$P(X_{n+m} = j_m, \dots, X_{n+1} = j_1 \mid X_n = i, X_{n-1} = i_{n-1}, \dots, X_1 = i_1, X_0 = i_0)$$
$$= P(X_{n+m} = j_m, \dots, X_{n+1} = j_1 \mid X_n = i)$$

Az X Markov-lánc ~~homogén~~ időben homogén, ha az

1) ~~fetis~~ feltételes valószínűség nem függ az n-től.

Ekkor a $P(X_{n+1} = j \mid X_n = i) = p_{ij}$ jelölést alkalmazzuk.

Példa

$M/G/1$ sorbanállási rendszer

memoryless (a beérkezési folyamat Poisson
↓
exp. időközönként jönnek be a csomagok.
$\exp(\lambda)$

general
valamilyen általános eloszlás írja le a csomagok kiszolgálásának idejét (adott eloszlás, nem feltétlen exp.

A kiszolgálási idők fgtlen.-ek

Legyen $X(t)$ a t-időben sorbanálló csomagok száma (ez folytonos idejű)

A $M/G/1$ esetben be lehet ágyazni egy diszkrét idejű Markov-láncot amikor a csomagok kiszolgálódnak.

Legyen T_n az n-edik csomagra ~~kiszolgálásának~~ a az idő, amikor az n-edik csomag kiszolgálódik.

legyen $X_n = X(T_n +)$ plusz

↑ rögtön az n-edik csomag kiszolgálása után hányan vannak a rendszerben.

ÁLL: $X = (X_n,\ n \in \{1, 2, \dots\})$ Markov-lánc,

ugyanis legyen A_n a n. csomag kiszolgálása alatt beérkező új csomagok száma.

A beérkezési folyamat Poisson-folyamat, így az $A_1, A_2, \dots$ beérkezések fgtlen.-ek és azonos eloszlásúak.

Biz:

$$X_{n+1} = (X_n - 1)_+ + A_{n+1}$$

n-edik csomag kiszolgálása

$$a_+ = \begin{cases} 0, & \text{ha } a < 0 \\ a, & \text{ha } a \geq 0 \end{cases}$$

Markov-lánc akkor, ha csak az előző állapottól függ. Itt ez teljesül: nem függ a múlttól ($X_{n-1}, X_{n-2}, \ldots$-től nem függ). Így Markov-lánc

Az időben homogén láncokat lehet gráfon való bolyongással reprezentálni.

Gráfreprezentáció

$\forall$ Markov-lánc reprezentálható egy gráfon való bolyongásként.

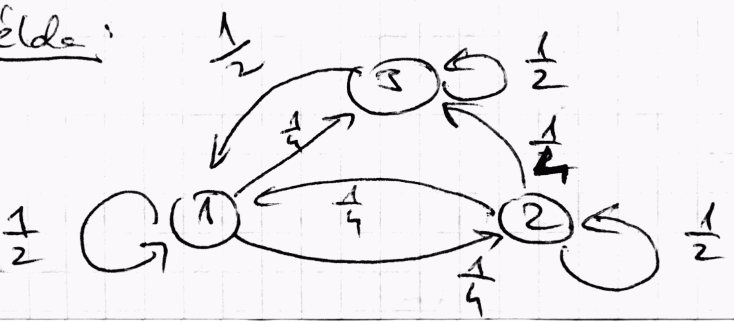
A gráf: a csúcsok az S halmaz pontjai

$i, j \in S$ között van irányított él $(i \to j)$, ha egy lépésben el tudunk pozitív valószínűséggel oda:

$$p_{ij} > 0 \qquad P(X_1 = j \mid X_0 = i) > 0$$

Ha az i csúcsban tartózkodik a bolyongás, akkor a j-be p_{ij} valószínűséggel lép.

Példa:



Ha a 2-ben veszünk, akkor annak vagyi, hogy ~
van az életre ina.

Problémák

(1) Véges trajektóriák valószínűsége

Mi a valószínűsége véges trajektóriáknak?

$$P(X_1=i_1, X_2=i_2, \dots, X_m=i_m \mid X_0=i_0)=?$$

$i_1, i_2, \dots, i_m$-et látogatta meg egymás után a Markov-lánc.

(2.) Érdekel X_n eloszlása.

n idő múlva mi a valószínűsége, hogy $1, 2, \dots$ állapotban tartózkodik:

$$P(X_n=j)=?$$

$$P(X_n=j \mid X_0=i)=?$$

(3.) Állapotok osztályozása

(4.) Mikor lesz Markov-lánc stacionárius folyamat

(5.) $\lim_{n\to\infty} P(X_n=j)=?$ $\quad \forall j\in S$

a Markov-lánc az n-edik időben j-ben van

Azt szeretnénk, hogy tartson valamihez.

Sokáig futtatjuk, s mi az eloszlás.

(6.) $\lim_{n\to\infty} \frac{N_n(j)}{n} = ?$

$N_n(j)$: az első n lépésben hányszor látogatta meg a j állapotot?

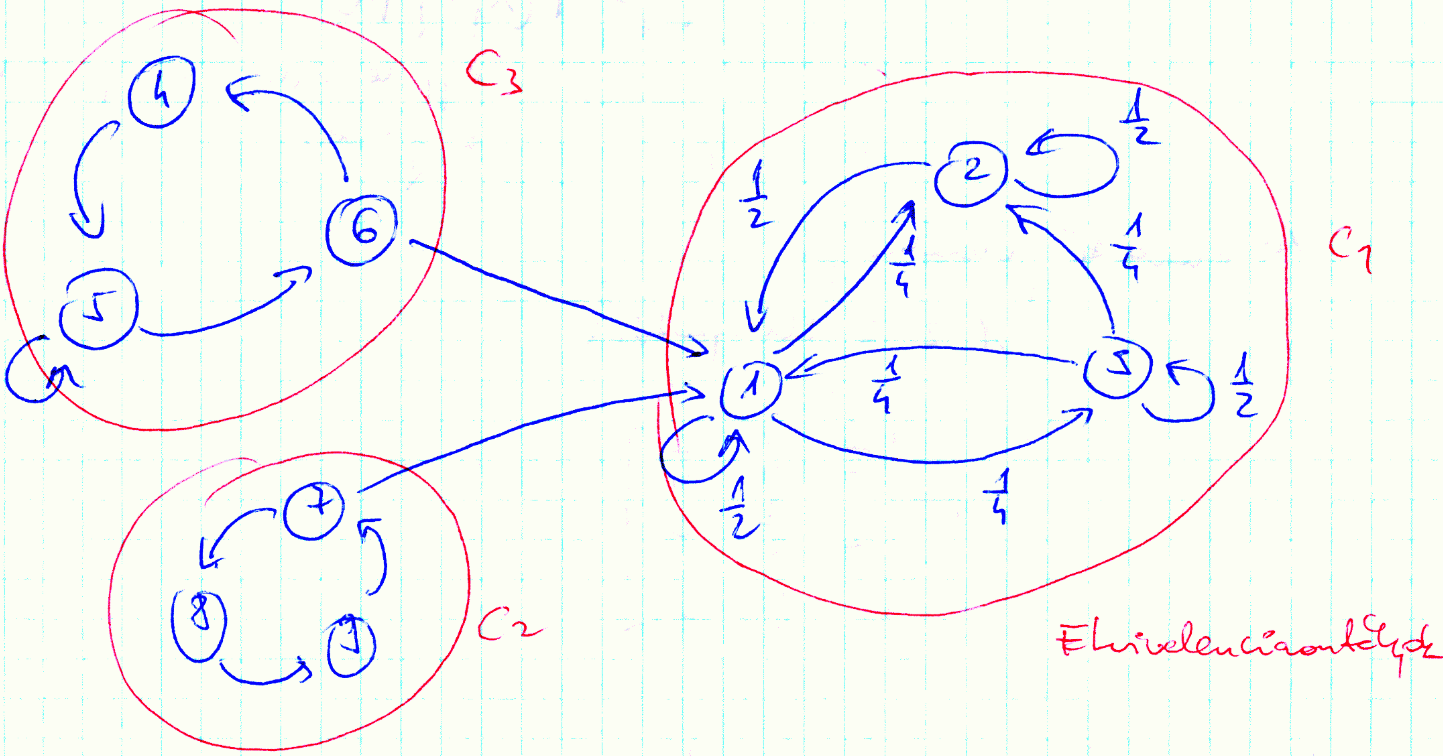
Ez azt az arányt, hogy az első n lépés alatt az idő hány %-ában tartózkodott j-ben.

⑤-ből meg lehet mondani, hogy mekkora legyen a puffer.

① Össze kell szorozni az átugrási valószínűségeket:

$$P(X_1=i_1, X_2=i_2, \dots, X_m=i_m \mid X_0=i_0) =$$

$$= p_{i_0 i_1} \cdot p_{i_1 i_2} \cdots\cdot p_{i_{m-1} i_m}.$$



a) $P(X_3=1, X_2=2, X_1=1 \mid X_0=1)$

$p_{11}\, p_{12}\, p_{21} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2}$

~~b) P(X_4~~

② $P(X_n=j \mid X_0=i) = ?$

A Markov-láncot két dologgal lehet leírni:

– egylépéses átmenet-valószínűségmátrix

$$P = [p_{ij}]_{i,j \in S}$$

hova lép

$$P = \text{honnan lép} \quad \begin{array}{c|cccc} & & & & j \\ \hline & p_{11} & p_{12} & p_{13} & \\ & p_{21} & p_{22} & p_{23} & \\ & p_{31} & p_{32} & p_{33} & \\ & & & & \\ i & & & & p_{ij} \end{array}$$

$p_{i j}$

honnan index (sorindex)

hova index (oszlopindex)

Egy lépésben

$$p_{ij} = P(X_1 = j \mid X_0 = i)$$

egy lépésben átlép i-ből a j-be.

Az eredeti példában pl.:

1, 2, 3 állapotokkal:

$$P = \begin{array}{c} \\ 1 \\ 2 \\ 3 \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{ccc} 1 & 2 & 3 \end{array} \\ \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \end{array}$$

Kezdeti eloszlás (vektor)

$$\underline{a} = (a_i, i \in S) = (a_1, a_2, \dots)$$

Mi van akkor, ha a kezdeti állapot is valamilyen valószínűséggel választódik.

A példában: $\underline{a} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

minden állapotot egyenlő valószínűséggel

$P(X_0=i)=a_i$

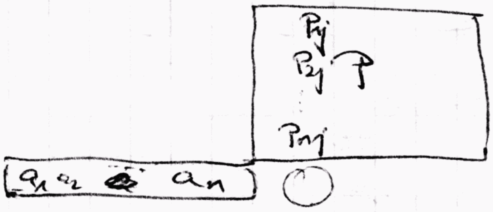
Így a példában: $P(X_0=i)=\frac{1}{3}$ $\quad i=1,2,3$

Így már ismert X_0 eloszlása. Mi lesz X_1 valószínűsége?

$$P_{\underline{a}}(X_1=j)=\sum_{i\in S}\underbrace{P(X_1=j\mid X_0=i)}_{p_{ij}}\cdot\underbrace{P(X_0=i)}_{a_i}=$$

$$=\sum_{i\in S}p_{ij}\cdot a_i=\Big[\underbrace{\underline{a}P}_{\text{mátrixszorzat}}\Big]_j$$

Struktúrája olyan, mint egy mátrixszorzat



Bevezetjük az n-lépéses átmenet-valószínűségmátrixot:

$$P^{(n)}=\left[p_{ij}^{(n)}\right]_{i,j\in S}$$

ahol $p_{ij}^{(n)}=P(X_n=j\mid X_0=i)$

$$P^{(n)}=\begin{array}{c} \\ \\ i \end{array}\begin{bmatrix} & j & \\ & \vdots & \\ \cdots & p_{ij}^{(n)} & \end{bmatrix}$$

n-edik lépésben hány lépésben tud eljutni i-ből j-be.

<u>Áll:</u> $P^{(n)}=P^n$

↑ egylépéses n-edik hatványa.

Biz: $P^{(n+m)} = P^{(n)} \cdot P^{(m)}$

↑ ebből már következik az állítás, mert

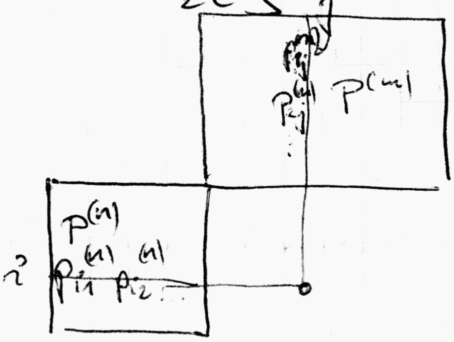
$$P^{(n)} = P^{(n-1)} \cdot P^{(1)} = P^{(n-2)} P^{(1)} P^{(1)} = \dots$$

Mi történik az n-edik időben?

↓ teljes valószínűség tétele

$$P(X_{n+m}=j \mid X_0=i) = \sum_{k\in S} \underbrace{P(X_{n+m}=j \mid X_n=k)}_{p_{kj}^{(m)}} \cdot \underbrace{P(X_n=k \mid X_0=i)}_{p_{ik}^{(n)}} =$$

$$= \sum_{k\in S} p_{ik}^{(n)} \cdot p_{kj}^{(m)} = \left[P^{(n)} \cdot P^{(m)}\right]_{ij}$$



Példa:

mivel veszi az összes lehetséges kétlépéses utat.

$$P(X_2=1 \mid X_0=1) = \left[P^2\right]_{11} = \underbrace{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}}_{1\to3\to1} + \underbrace{\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}}_{1\to1\to1} + \underbrace{\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}}_{1\to2\to1}$$

$$P_{\underline{a}}(X_n=j) = ?$$

A teljes valószínűség tételével a 0. lépésre:

$$= \sum_{i\in S} \underbrace{P(X_n=j \mid X_0=i)}_{p_{ij}^{(n)}} \underbrace{P(X_0=i)}_{a_i} =$$

$$= \sum_{i \in S} a_i \cdot p_{ij}^{(n)} = \left[\underline{a} \cdot P^n\right]_j$$

ez egy sorvektor

ez X_n-nek a eloszlása.

③ Az állapotok osztályozása

<u>Def</u>: A j elérhető i-ből ($i \to j$), ha létezik n úgy, hogy $p_{ij}^{(n)} > 0$

↑ a n hosszú út i-ből j-be.

<u>Def</u>: Az i és j érintkeznek ($i \leftrightarrow j$), ha i-ből el lehet jutni j-be ($i \to j$) és j-ből el lehet jutni i-be ($j \to i$).

<u>Áll</u>: Az érintkezési reláció ($\leftrightarrow$) ekvivalenciareláció

Az ekvivalenciareláció ekvivalencia-osztályokat hoznak létre, így az állapotok ekvivalencia-osztályokba ~~particionálhatók~~ bonthatók (S ekvivalencia-osztályokba bontható).

(*) <u>Ekvivalenciaosztályok</u>

Pirossal bekarikázva a következőben: C_1, C_2, C_3

• Periódus: ezt egy elemre nézzük. Egy elem periódusa d, ha egy bizonyos véges időn belül d lépésben visszaér oda a Markov-lánc. (pozitív valószínűséggel tartózkodik abban az állapotban).

$i \in S$ periódusa: $d(i) = \text{LNKO}\{n : p_{ii}^{(n)} > 0\}$

Áll: Ha n elég nagy, akkor $P_{ii}^{n d(i)} > 0$.

↑ periódusnyi időnként visszatér.

Áll: A periódus osztálytulajdonsága:

- $i, j \in C$, akkor $d(i) = d(j)$

pl. C_2-ben: $d(i) = 3$

C_3-ban: $d(i) = 1$ ← LNKO $(3,4) = 1$

Def: Ha $d(i) = 1$, akkor i aperiodikus.

(*) Egy Markov-lánc irreducibilis, ha egyetlen ekvivalenciaosztályból áll.

↑ mindenki érintkezik mindenkivel.

• Visszatérőség

Def: Az i állapot visszatérő, ha annak a valószínűsége, hogy véges időn belül visszatérünk i-be 1.

$$P(\exists n\ X_n = i \mid X_0 = 1) = 1$$

Def: i átmeneti, ha $P(\exists n\ X_n = 1 \mid X_0 = 1) < 1$

példa: ~~C_1-be~~ C_3 átmeneti osztály, mert "kipottyanódik" belőle a valség → átmegy C_1-be.

Áll: Ha n elég nagy, akkor $P_{ii}^{nd(i)} > 0$.

↑ periódusnyi időnként visszatér.

Áll: A periódus osztálytulajdonsága:

- $i, j \in C$, akkor $d(i) = d(j)$

pl. C_2-ben: $d(i) = 3$

C_3-ban: $d(i) = 1$ ← $LNKO(3,4) = 1$

Def: Ha $d(i) = 1$, akkor i aperiodikus.

(*) Egy Markov-lánc irreducibilis, ha egyetlen ekvivalencia-osztályból áll.

↑ mindenki érintkezik mindenkivel.

- Visszatérőség

Def: Az i állapot visszatérő, ha annak a valószínűsége, hogy véges időn belül visszatérünk i-be 1.

$$P(\exists n\ X_n = i \mid X_0 = 1) = 1$$

Def: i átmeneti, ha $P(\exists n\ X_n = 1 \mid X_0 = 1) < 1$

példa: ~~C_1-ben~~ C_3 átmeneti osztály, mert "kipárolódik" belőle a valség → átmegy C_1-be.