Indoklás nélküli eredményközlést nem fogadunk el, a dolgozat időtartama 90 perc.

1. *(12 pont)* Adja meg a $2x(1+\ln y) - \left(4y^2 - \dfrac{x^2}{y}\right) y' = 0$ egyenlet összes megoldását!

2. *(12 pont)* Adja meg az $\begin{cases} x' = -y, \\ y' = -9x + \sin t \end{cases}$ differenciálegyenlet rendszer általános megoldását!

3. *(12 pont)* Számítsa ki a $v(x,y,z) = (z, y^3, z^2)$ vektorfüggvény görbementi integrálját az $r(t) = (\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 2\pi]$ csavarvonalra vonatkozóan!

4. *(12 pont)* Számítsa ki a $v(x,y,z) = (x^2z^3, 2xyz^3, xz^4)$ vektorfüggvény felületi integrálját annak a kúpnak a kifelé irányított felszínére, aminek a palástja az $x^2+y^2 = z^2$ egyenletű, $0 \le z \le 1$ által meghatározott felület, alaplapja pedig az $x^2+y^2 \le 1$, $z = 1$ által meghatározott körlap!

5. *(3+3+3+3 pont)* **(a1)** Számítsa ki a $v : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, r \mapsto \operatorname{rot}(a \times r)$ függvény értékét, ahol $a = (a_1, a_2, a_3) \in \mathbf{R}^3$.
(a2) A $k \in \mathbf{R}$ paraméter mely értékére lesz az $(x+k)^2 y' = y$ differencálegyenletnek olyan megoldása, ami az $\mathbf{R} \setminus \{0\}$-n értelmezett?
(b) Igazak-e az alábbi állítások? (Válaszát indokolja!)
(b1) Ha G egy sima zárt görbe, akkor G-re a $v : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3, r \mapsto r$ vonalintegrálja nulla.
(b2) Ha $f : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}$ kétszer folytonosan differenciálható, akkor $\nabla(\nabla f) = 0$.

iMSc feladat. *(10 pont)* Tudjuk, hogy $v : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ olyan kétszer folytonosan differenciálható vektorfüggvény, amire $\nabla \times v = a$ teljesül, ahol $a \in \mathbf{R}^3$ egy konstans vektor. Írja fel deriválásokat nem tartalmazó alakban a $w : \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3 : r \mapsto \nabla(\nabla(v \times r))$ vektorfüggvényt!

—

1. MO. Egzakt. $\int 2x(1+\ln y)dx = x^2(1+\ln y) + C(y)$, $\frac{x^2}{y} + C'(y) = -4y^2 + \frac{x^2}{y} \rightsquigarrow C(y) = -\frac{4}{3}x^2$. $x^2(1+\ln y) - \frac{4}{3}x^2 = c$.

2. MO. Az első egyenletből $y = -x'$, innen $-x'' + 9x = \sin t$. A homogén általános megoldása: $c_1e^{3t} + c_2e^{-3t}$. Az inhomogén egy partikuláris megoldását $x_p = A\sin t + B\cos t$ alakban keresve: $A = 1/10$, $B = 0$, így $x = c_1e^{3t} + c_2e^{-3t} + \frac{1}{10}\sin t$. Továbbá mivel $y = -x'$, így $y = -3c_1e^{3t} + 3c_2e^{-3t} - \frac{1}{10}\cos t$.

3. MO. $\int\limits_0^{2\pi} -t\sin t + \sin^3 t \cdot \cos t + t^2 dt = [t^3/3 + \sin^4(t)/4 - \sin t + t\cos t]_0^{2\pi} = 2\pi + (8\pi^3)/3$.

4. MO. Gaussal: $\operatorname{div}(x^2z^3, 2xyz^3, xz^4) = 8xz^3$. Polárkoordinákkal: $\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \int\limits_{r=0}^{1} \int\limits_{z=r}^{1} 8r\cos\varphi z^3 r dz dr d\varphi = (\int\limits_{\varphi=0}^{2\pi} \cos\varphi d\varphi) \cdot (\int\limits_{r=0}^{1} \int\limits_{z=r}^{1} 8z^3r^2 dz dr) = 0$

5. MO. **(a1)** $\operatorname{rot}(a \times r) = 2a$.
(a2) $y = e^{-\frac{1}{x-k}} \rightsquigarrow k = 0 : \operatorname{Dom}(y) = \mathbf{R} \setminus \{0\}$.
(b1) Igaz, Stokes-tételből.
(b2) Két megoldás van. Az egyik: hamis. Vagy azért mert legyen $f(x,y,z) = x^2$. Ekkor $\nabla f(x,y,z) = (2x, 0, 0)$ és $\nabla\nabla f(x,y,z) = \left(\begin{smallmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix}\right) \ne 0$. Vagy azért mert a div grad f a kérdéses függvény, és akkor az ellenpélda ugyanaz, csak ekkor $\operatorname{div}\operatorname{grad} x^2 = 2$. A másik: nincs értelme. Ha ∇ azt jelenti, hogy grad, akkor vektormezőnek nem értelmezett a gradiense, és ekkor az egész kifejezés nem definiált.

iMSc. MO. Einstein-konvencióval

$$\nabla(v \times r) \overset{\text{EK}}{=} \partial_i \varepsilon_{ijk} v_j x_k = \varepsilon_{ijk} x_k \partial_i v_j + \varepsilon_{ijk} v_j \partial_i x_k = x_k \varepsilon_{kij} \partial_i v_j - v_j \varepsilon_{jik} \partial_i x_k \overset{\text{EK}}{=}$$

$$= (r \text{ rot } v) - (v \text{ rot } r) = r \text{ rot } v$$

Mivel rot $v = a$, ezért $w = \nabla r a = a$. De lehet kiírva a koordinátákat és kiszámolva is megoldani.