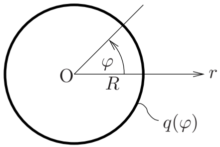
Nagypélda – 10 pont

Csak egész pontszám adható (a kispéldákra is)!

Az ábra szerint a hengerkoordináta-rendszer $z = 0$ síkjában körgyűrű alakú vonaltöltés van, amelynek középpontja az origó, sugara R, és töltéssűrűsége a φ szög függvényében $q = q(\varphi)$ szerint változik. A közeg levegő. A Φ skalárpotenciált a végtelenben 0-nak választjuk.



Legyen először $q(\varphi) = q_0$ állandó érték [a. és b. feladatrészek]

a. Határozza meg a potenciált és a térerősség nagyságát az origóban! *(3 p.)*

$$\Phi = \int_0^{2\pi} \frac{q_0 R \mathrm{d}\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R} = 2\pi \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{q_0}{2\varepsilon_0} \qquad \textbf{(2 p.)}$$

A szimmetria miatt $E = 0$. **(1 p.)**

b. Határozza meg a térerősség nagyságát az $r = 20R$, $\varphi = \pi/4$, $z = 0$ koordinátájú pontban! [megj: a nagy távolság miatt használhat közelítést] *(2 p.)*

Ponttöltéssel közelítve: $E = \dfrac{2R\pi q_0}{4\pi\varepsilon_0 (20R)^2} = \dfrac{q_0}{800\varepsilon_0 R}$ **(2 p.)**

Legyen a továbbiakban $q(\varphi) = q_0 \cos(\varphi)$ [c. és d. feladatrészek].

c. Határozza meg a potenciál értékét, valamint a térerősség nagyságát és irányát az origóban! *(3 p.)*

A szimmetria miatt $\Phi = 0$ (persze integrálással is kijön). **(1 p.)**

$$E = \int_0^{2\pi} \frac{q_0 \cos(\varphi) R \mathrm{d}\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \cos\varphi = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 R} \int_0^{2\pi} \cos^2(\varphi) \mathrm{d}\varphi = \frac{q_0}{4\varepsilon_0 R}, \text{ vízszintes} \qquad \textbf{(2 p.)}$$

d. Tegyük fel, hogy az $r = 20R$, $\varphi = 0$, $z = 0$ koordinátájú pontban a potenciál értéke Φ_0. Adja meg a potenciált az $r = 20R$, $\varphi = \pi/3$, $z = 0$ koordinátájú pontban! [megj: a nagy távolság miatt használhat közelítést] *(2 p.)*

Vízszintes tengelyű dipólussal közelítve: $\Phi = \Phi_0 \cos(\pi/3) = \dfrac{\Phi_0}{2}$ **(2 p.)**

Kispéldák – 5 × 2 pont

1. Mekkora erő hat a föld felett a levegőben, $h = 1\,\mathrm{m}$ magasságban lévő $Q = 5\,\mu\mathrm{As}$ ponttöltésre?

$$F = 56{,}2\,\mathrm{mN}$$

2. Egy két elektródából és a földből álló elrendezésben az elektródákat különböző potenciálra hozva mérjük a kialakult elektromos tér energiáját. Az alábbi három mérés eredménye áll rendelkezésünkre:
„A" mérés: $\Phi_1 = 1\,\mathrm{V}$, $\Phi_2 = \Phi_0 = 0\,\mathrm{V} \rightarrow W_e = 73\,\mu\mathrm{J}$
„B" mérés: $\Phi_1 = \Phi_0 = 0\,\mathrm{V}$, $\Phi_2 = 1\,\mathrm{V} \rightarrow W_e = 45\,\mu\mathrm{J}$
„C" mérés: $\Phi_1 = \Phi_2 = 1\,\mathrm{V}$, $\Phi_0 = 0\,\mathrm{V} \rightarrow W_e = 36\,\mu\mathrm{J}$
Határozza meg a C_{10}, C_{20} és C_{12} részkapacitásokat!

$$C_{10} = 64\,\mu\mathrm{F} \quad C_{20} = 8\,\mu\mathrm{F} \quad C_{12} = 82\,\mu\mathrm{F}$$

3. Egy síkkondenzátor fegyverzetei 10 cm sugarú körlemezek, amelyek egymástól 5 mm távolságra vannak. A dielektrikum relatív permittivitása 4,5. Számítsa ki a kondenzátor kapacitását!

$$C = 0{,}25\,\mathrm{nF}$$

4. A derékszögű koordináta-rendszer $z = 0$ síkja két szigetelő közeget választ el egymástól. A $z < 0$ tartományban $\varepsilon_1 = 3\varepsilon_0$, a $z > 0$ tartományban $\varepsilon_2 = \varepsilon_0$. A $z = 0$ síkban $\sigma = 4 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{As/m^2}$ sűrűségű felületi töltés van jelen. A $z < 0$ tartományban az elektromos térerősség homogén, $\mathbf{E}_1 = (5\mathbf{e}_y - 12\mathbf{e}_z)\mathrm{V/m}$ értékű. A térerősség a $z > 0$ féltérben szintén homogén. Adja meg ebben $\mathbf{E}_2$ vektorát!

$$\mathbf{E}_2 = (5\mathbf{e}_y - 31{,}5\mathbf{e}_z)\mathrm{V/m}$$

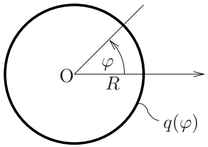
5. Egy gömbkondenzátor kapacitása $0{,}9\,\mu\mathrm{F}$, szigetelőanyagának dielektromos állandója 10. A kondenzátor szivárgási ellenállása körülbelül $10\,\mathrm{M\Omega}$. Milyen nagyságrendbe esik a szigetelőanyag fajlagos vezetőképessége?

$$\sigma \approx 10^n \frac{\mathrm{S}}{\mathrm{m}}, \qquad n = -11$$

Pontszám	Osztályzat
0 - 9	elégtelen (1)
10 - 13	elégséges (2)
14 - 15	közepes (3)
16 - 17	jó (4)
18 - 20	jeles (5)

Nagypélda – 10 pont

Csak egész pontszám adható (a kispéldákra is)!



Az ábra szerint a hengerkoordináta-rendszer $z = 0$ síkjában körgyűrű alakú vonaltöltés van, amelynek középpontja az origó, sugara R, és töltéssűrűsége a φ szög függvényében $q = q(\varphi)$ szerint változik. A közeg levegő. A Φ skalárpotenciált a végtelenben 0-nak választjuk.

Legyen először $q(\varphi) = q_0$ állandó érték [a. és b. feladatrészek]

a. Határozza meg a potenciált és a térerősség nagyságát az origóban! *(3 p.)*

$$\Phi = \int_0^{2\pi} \frac{q_0 R \mathrm{d}\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R} = 2\pi \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0} = \frac{q_0}{2\varepsilon_0} \qquad \textbf{(2 p.)}$$

A szimmetria miatt $E = 0$. **(1 p.)**

b. Határozza meg a potenciált az $r = 30R$, $\varphi = \pi/6$, $z = 0$ koordinátájú pontban! [megj: a nagy távolság miatt használhat közelítést] *(2 p.)*

Ponttöltéssel közelítve: $\Phi = \dfrac{2R\pi q_0}{4\pi\varepsilon_0 30R} = \dfrac{q_0}{60\varepsilon_0}$ **(2 p.)**

Legyen a továbbiakban $q(\varphi) = q_0 \sin(\varphi)$ [c. és d. feladatrészek].

c. Határozza meg a potenciál értékét, valamint a térerősség nagyságát és irányát az origóban! *(3 p.)*

A szimmetria miatt $\Phi = 0$ (persze integrálással is kijön). **(1 p.)**

$$E = \int_0^{2\pi} \frac{q_0 \sin(\varphi) R \mathrm{d}\varphi}{4\pi\varepsilon_0 R^2} \sin\varphi = \frac{q_0}{4\pi\varepsilon_0 R} \int_0^{2\pi} \sin^2(\varphi) \mathrm{d}\varphi = \frac{q_0}{4\varepsilon_0 R}, \text{ függőleges} \qquad \textbf{(2 p.)}$$

d. Tegyük fel, hogy az $r = 30R$, $\varphi = 0$, $z = 0$ koordinátájú pontban a térerősség φ irányú komponense, $E_\varphi(30R, 0, 0) = E_0$. Adja meg a térerősség φ komponensét az $r = 30R$, $\varphi = \pi/2$, $z = 0$ koordinátájú pontban, azaz $E_\varphi(30R, \pi/2, 0)$ értékét! [megj: a nagy távolság miatt használhat közelítést] *(2 p.)*

Függőleges tengelyű dipólussal közelítve, annak tengelyében $E_\varphi = 0$ **(2 p.)**

Kispéldák – 5 × 2 pont

1. Mekkora erő hat a föld felett a levegőben, $h = 2\,\mathrm{m}$ magasságban lévő $Q = 8\,\mu\mathrm{As}$ ponttöltésre?

$$F = 36\,\mathrm{mN}$$

2. Egy $V = 2 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{m}^3$ térfogatú, $\sigma = 8 \cdot 10^4\,\mathrm{S/m}$ vezetőképességű közegben inhomogén eloszlású, stacionárius áram folyik. A térfogatban disszipált teljesítmény $P = 12\,\mathrm{mW}$. Jelölje a térfogatban fellépő maximális áramsűrűség nagyságát J_m. Adjon alsó korlátot J_m-re!

$$J_m > 6{,}93 \frac{\mathrm{kA}}{\mathrm{m}^2} \quad \text{(a homogén eloszlásra számolt érték)}$$

3. Egy gömbkondenzátorban a dielektrikum belső sugara 5 mm, külső sugara 10 mm, dielektromos állandója 9. Számítsa ki a kondenzátor kapacitását!

$$C = 10\,\mathrm{pF}$$

4. Az x és y irányban végtelen kiterjedésű V térrészt a $z = 0\,\mathrm{m}$ és $z = 1\,\mathrm{m}$ síkok határolják. Előbbin $\Phi_0 = -5\,\mathrm{V}$, utóbbin $\Phi_1 = 2\,\mathrm{V}$ Dirichlet-peremfeltétel érvényes. Határozza meg V-ben a (homogén) térerősség *vektorát*!

$$\mathbf{E} = -7\mathbf{e}_z \mathrm{V/m}$$

5. Egy koaxiális kábel hosszegységre eső kapacitása $C' = 2{,}5\,\mathrm{pF/m}$. A kábelszigetelés relatív permittivitása $\varepsilon_r = 2{,}3$, fajlagos ellenállása $\rho = 5 \cdot 10^9\,\Omega\mathrm{m}$. Határozza meg azt az ellenállást, amely a kábel 1 m hosszúságú, nyitott végű darabján a kábelér és az árnyékolás között mérhető!

$$R = 40{,}7\,\mathrm{G\Omega}$$

Pontszám	Osztályzat
0 - 9	elégtelen (1)
10 - 13	elégséges (2)
14 - 15	közepes (3)
16 - 17	jó (4)
18 - 20	jeles (5)