Ropi 02.01.

Ami kell:

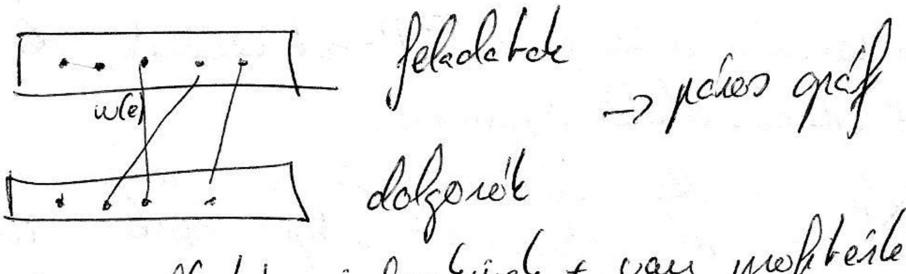
Bsz 1: lineáris algebra (vektortér, mátrix)

Bsz 2: gráfelmélet - párosítás, folyamok, alapfogalmak, Euler síkgráfok, színezés

Algel: P, NP, CoNP

1 ZH van + pZH + vizsgai vizsga
jegyzet van belőle + kidolgozott vizsga
és van digitálisan ♡♡

Pl: van 1 cég, megrendelések + dolgozók vannak



nem minden adható mindenkinek + van preferenciája az alkalmazottaknak
összerendelés max összsúllyal?

Input: pS. gráf $G(F, L)$
súlyok: $w: E \to \mathbb{R}$

Output: párosítás, amin
$\sum_{e \in M} w(e)$ maximális

Spec. eset megoldása: minden él súlya 1 → méretet maximalizál

Javító utas algoritmus (ismétlés)
javító út: adott M pS-re nézve: párosítatlan pontból indul, párosítatlan pontban végződik
minden második él M-beli
→ ezt ismételni amíg
van javító út → ha nincs, max a párosítás (ez tétel volt)

bizonyításból 1 rész kell:

1.

F_1 / L_1: ptlan fiúk + lányok → nincs javító út

van alternáló út (nem javító)

↳ párosított lányok rendezése: akiket elérünk F_1-ből és akiket nem

L_2: F_1-ből alternáló úton elérhető lányok, párjaik: F_2

L_3: $L - L_1 - L_2$ (maradék), párjaik: F_3

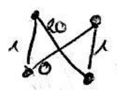
Nincs $F_1 \cup F_2$-ből $L_1 \cup L_3$-ba menő él G-ben!

$F_2 \to L_1$ él esetén lenne javító út (F_2-nek van párja L_2-ben...)

Feladat: teljes párosítást próbálunk keresni (ált. b. van benne)

Nem az. feladat! pl.  → itt az átlós él a max
de az 1-1 a teljes

optimális hozzárendeléseket a TP-vel kezeljük, de
mindkettő visszavezethető egymásra

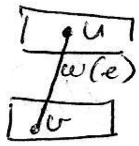
→  → olyan élek amiknek nincs súlya → ezt feltölteni
teljes párosítást → kijön belőle a max
virtuális él: 0 a súlya

∀ nem szomszédos f-l párra virtuális élet húzni
(ettől nem lesz b. ki teljes párosítás, lehet pl. kevesebb lány)
→ virtuális lányok felvétele

Negatív élek kezelése: TP nélkül értelmetlen a kérdés
TP-vel: minden negatív esetre is van...
→ kezdő lépés: negatív élek törlése, virtuális legyen helyette

→ mostantól csak van szűkítve a feladat TP-s gráfra

Egerváry-algoritmus (magyar módszer)



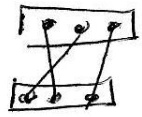
Címkézés: $c:(F\cup L)\to\mathbb{R}$

$\forall e=\{u,v\}$

$c(u)+c(v)\ge w(e)$ (csúcsok összege nagyobb mint a között levő él)

M: tetszőleges TP

$$\sum_{e=\{u,v\}\in M} w(e) \le \sum_{e=\{u,v\}\in M}\left(c(u)+c(v)\right)=\sum_{v\in F\cup L} c(v)$$



↓
az összes csúcs egyszer szerepel a TP-ban !

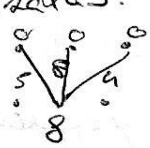
Lemma: c címkézés, M^* TP
$\forall\, e\in M^*: c(u)+c(v)=w(e)$
$\Longrightarrow M^*$ max. összsúlyú TP

→ Piros él a címkézésre nézve
↓
ilyenekből akarunk TP-t

M^* esetében: $\sum w(e)=\sum c(u)+c(v)$

fenntartunk: M párosítás, c címkézés
$\forall$ M-beli él piros !
→ addig amíg M TP lesz

0. Inicializálás: $M=\{\emptyset\}$ c: minden lépésnél 0



$c(v)=\begin{cases}0, \text{ ha } v\in L\\ \max(v\text{-ből induló élek súlya}), \text{ ha } v\in F\end{cases}$

1. M-ből indítva a piros élek gráfjában javító utas algoritmus indítása, ameddig kell: M'
ha M' TP → STOP

2. → címkézést át kell alakítani, mert a jelenlegi pirossal nem ment

→ L_1, L_2, L_3 felbontást nézni

→ $(F_1 \cup F_2)$-ből $(L_1 \cup L_3)$-ba nincs piros él ő

(mert az még lehet, ha nem lenne ... növes)

↳ VAN ő (mert van TP a gráfban)

(Hall feltétel)

$$\delta : \min \{ c(u) + c(v) - w(e) : e = \{u, v\},\ u \in (F_1 \cup F_2),\ v \in (L_1 \cup L_3) \}$$

↳ ez itt egy pozitív szám lesz

$$c'(v) = \begin{cases} c(v) - \delta, & \text{ha } v \in (F_1 \cup F_2) \\ c(u) + \delta, & \text{ha } u \in L_2 \end{cases}$$

a maradék változatlan

→ Folytatni az 1. lépéssel

Állítás: c' címkézés ✓

Bizonyítás:

	L_2	$L_1 \cup L_3$
$F_1 \cup F_2$ (F)	$+\delta - \delta$ 0	$-\delta$
F_3	$+\delta$	nincs vált. 0

4 eset van, mely a változás?

⇐ címkeösszegek

⇐ erre a 2 esetre kéne figyelni → csak a csökkenésre, mert a cov. teljesíti a definíciót

→ ilyen éleket vettünk figyelembe → a legkisebbet vettük el, ez tehát jó (δ definíciója)

Piros élek megőrzésével mi lett?

↳ lehet P → fehér átmenet

- e megszűnt pirosnak lenni, ha $L_2 F_3$ típusú
- mindig keletkezik piros él ⇒ legkisebb fölösleg elvevése → egyenlő lesz a súllyal

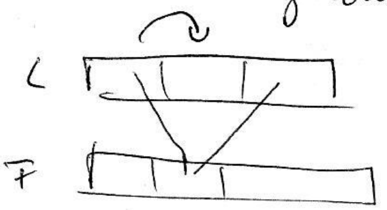
$(F_1 \cup F_2) \to (L_1 \cup L_3)$ típus és a σ-t def. minimum e-n fbeletik

Állítás: M' élei pirosak maradhat c'-re nézve is

Bizonyítás: M' élei $L_2 - F_2$
$L_3 - F_3$ típusúak $\Rightarrow$ ilyenek nem nőnek meg újracimkézéskor ✓

Megáll-e ez a cucc? + hatékony-e?

Megfigyelés: L_2-beliek az új piros gráfban is elérhetők csak olyan F_1-ből, mint előtte az élek amik nekik kellettek elbes, nem tudnak megnőni $\Rightarrow$ mindig pirosak maradnak



elfogynak az L_3 beli lányok ✓

$\forall$ ciklusban vagy M mérete nő (ezt látjuk, Vincent?)
vagy L_2 mérete nő (L_3 csökken)

n fiú és n lány $\Rightarrow$ max n ciklusonként nő M mérete
~~n ciklusonként nő~~
n-nel nőhet teljes
$\Rightarrow n^2$ ciklus utána teljes $\Rightarrow$ ~~$O(n^2)$~~
$O(n^2 \cdot m)$
és minden él is ✓
n^3-re le lehet vinni ügyesebbel

PDF → tetszőlegesen

02.10.

kiinduló tábla: mindenki szomszédos, élsúlyok a mx-ban

0. inicializálás → címkék a csúcson

1. piros élek feltérképezése → maximumos élek
   2-t kivesszük

- címkemódosításkor kell a felcímkés $\overset{\nabla}{\circ}$

  csak P-t lehet alternálón elérni $\overset{\nabla}{\circ}$ (ő L_2)

  L_3 pozitív, de nem érhető el alternálón

  $L_1 \cup L_3$-t vonni, folytonos mx. → 1 a minimum

⇒ címkecsökkentés

Példa:

1. nem.	2. nem.
4 fej	1 fej
2 láb	3 láb
10 \$	5 \$

raktárkészlet:
16 fej, 18 láb
⇒ hogy optimális felhasználás?

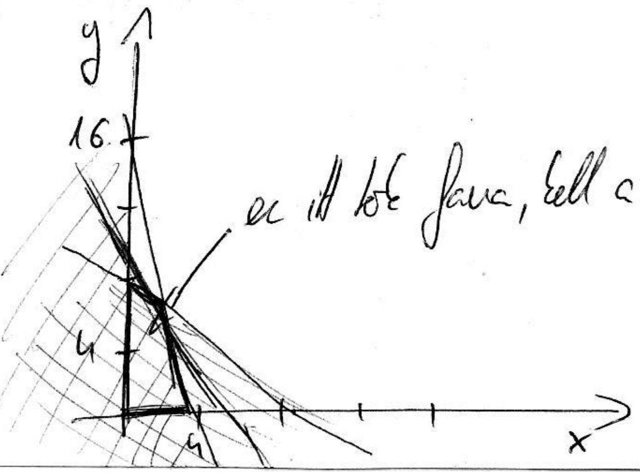
Állítás: $4x + 1y \leq 16$ max: $10x + 5y$

$2x + 3y \leq 18$

$x \geq 0 \quad y \geq 0$

$y \leq 16 - 4x$

$y \leq 6 - \frac{2}{3}x$



ez itt lesz fontos, kell a maximum ott lesz

45 \$ megoldható?

$10x + 5y = 45$

$y = 9 - 2x$ → általában: minden lehetséges rácspont kiadja

→ ilyet p számra csinálni

p\$ lehetséges?

$10x + 5y = p$

$y = \frac{p}{5} \underbrace{- 2x}$

↳ meredekség nem változik!

⇒ párhuzamosan megy az új egyenes!
addig tolom amíg van közös pont a □-el
⇒ rácspont lesz

$x = 3$
$y = 4$ $p = 50$ \$

Lineáris programozás

$x_1 x_2 \dots x_n$

$a_1 x_1 + a_{12} x_2 + \dots + a_{1n} x_n \;\; \leq / \geq / = \;\; b_1$ ← ez itt egy lineáris feltételrendszer

↓

még <, > nincsen!

$a_2 x_1 \dots \; a_{2n} x_n \dots$

$a_{k1} x_1 \dots \; a_{kn} x_n \dots$

Sz 14-17
S 9-11 / $\boxed{14\text{-}16{:}30}$
$\boxed{P \;\; 14\text{-}17}$

Lehet ezeket a sorokat alakítgatni

$a_1 x_1 \dots \geq b_i \to \times(-1) \quad -a_{i1} x_1 - \dots - a_{in} x_n \leq -b_i$

$$a_{j1} x_1 \dots = b_j \quad \begin{cases} a_{j1} x_1 \dots + a_{jn} x_n \leq b_j \\ -a_{j1} x_1 \dots - a_{jn} x_n \leq -b_j \end{cases}$$

$\Uparrow$

elég $\leq$ ezeket nézni, mert mindent át tudunk így alakítani

minimalizálni $c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$ célfüggvényt

→ maximalizáló algoritmusunk van, hogy kell maximalizálni?

→ célfüggvény ellentettjét kell maxolni! → $-c_1 x_1 - c_2 x_2 \dots - c_n x_n$

$$\begin{matrix} a_{11} x_1 \dots & = b_1 \\ \vdots & \\ & = b_k \end{matrix} \qquad A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots \\ & & \\ & & a_{kn} \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{bmatrix} = \underline{b}$$

$c = [\quad]$

$A \cdot x = b$

$A \cdot x \leq b$?? → fontos

Def: $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^n$

$\underline{u} \leq \underline{v}$ → tagonként $\leq$

$u_1 \leq v_1 \dots$

$\forall i$-re $u_i \leq v_i$

max: $\{ \underline{c} \cdot \underline{x} : A \cdot x \leq \underline{b}$

max $10x_1 + 5x_2$

$$4x_1 + x_2 \le 16$$
$$2x_1 + 3x_2 \le 18$$
$$x_1, x_2 \ge 0$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 16 \\ 18 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} b$$

$$c = (10\ 5)$$

(1.) $Ax = b$ megoldható?

(2.) Ha igen ->

mi van ha nem felülről korlátos a célfüggvény

$x_1 \ge 0$ $x_2 \ge 0$ max: $x_1 + x_2$?

$\{cx : Ax \le b\}$ -> ez mego a cccc

Ha nem -> azt hogyan kell, pl:

$$x_1 + 2x_2 \le 2 \xrightarrow{\cdot 3} 3x_1 + 6x_2 \le 6$$
$$x_1 + x_2 \le 3 \xrightarrow{\cdot 0}$$
$$-x_1 + 2x_2 \le 1 \xrightarrow{\cdot 1} -x_1 + 2x_2 \le 1$$
$$-x_1 - 4x_2 \le -5 \xrightarrow{\cdot 2} -2x_1 - 8x_2 \le -10$$
$$\overline{\quad 0x_1 + 0x_2 \le -3 \quad} \ ↯$$

a tétel minden nem megoldható esetben ez a tétel működik ....

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \\ -1 & 2 \\ -1 & -4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} = b \qquad yb = -3$$

$y = (3\,0\,1\,2)$ $(0\ 0) = yA$

Farkas-lemma:

Adott A, b

$Ax \le b$ akkor és csak akkor megoldható, ha $\nexists y$: $yA = 0$, $yb < 0$, $y \ge 0$

Az alábbiak közül pontosan az egyik megoldható:

1. $Ax \le b$
2. $yA = 0$, $yb < 0$, $y \ge 0$

Legfeljebb 1 oldható meg 1 és 2 közül, ezt beláttuk.
→ legalább 1 megoldható → ezt nem kell bizonyítani

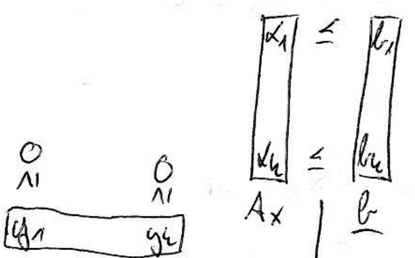
Bizonyítás:

T.f.h. x, y egy-egy megoldás (indirekt)

$$0 = 0 \cdot x = \underbrace{(yA)}_{\text{feld.}} x = \underbrace{y(Ax)}_{\text{Tétel!}} \overset{?}{\le} yb < 0 \quad \lightning$$

$\le b$, $y \ge 0$

? → mert ez vektorra kell, de mindenhol....



$y(Ax) = y_1 \alpha_1 + y_2 \cdot \alpha_2 \dots y_k \alpha_k$

$yb = y_1 b_1 \dots y_k b_k$

y_1 nem negatív!

$y_1 \alpha_1 \le y_1 b_1$

$\forall k$-ra igaz! juppi!

Ropi
02.16

Fourier - Motzkin elimináció

(lin. egyenlőtlenségrendszer megoldása)

$Ax \leq b$

E
L
I
M
I
N
Á
C
I
Ó

$\underbrace{(A}_{n} | b)$ ← kibővített mx

átalakítjuk, hogy kevesebb oldopa legyen, és a megoldhatóság ne változzon

$(\underbrace{A^*}_{n-1} | b^*)$

i. sor helyettesítése $\lambda \cdot i$-vel? → ugyanaz, de megszorításokkal ok: $\lambda > 0$

sorcsere : i. sort a j. sorral → okés

Pl: $-1 \leq x \leq 1$ $\quad -1 \leq x$

$$\left(\begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{array}\right) \rightsquigarrow \left(\begin{array}{c|c} 0 & 2 \\ -1 & 1 \end{array}\right) \longrightarrow$$

Ha ez így nem oké
(egyenlőtlenség összeadása)
összeadni oké! kivonni nem

A gauss-elimináció egy lépése most nem játszik

Példa:

$x+y+z \leq 1$

$2x-y+z \geq 1$

$x+4y-z \geq 2$

$x \geq, y \geq 0, z \geq 0$

$$0,\ 2-4y+z,\ \frac{1+y-z}{2} \leq x \leq 1-y-z$$

$$y \geq 0,\ z \geq 0$$

például: $y = 0 = z$ → keressünk egy random értékpárt

$2, \frac{1}{2} \leq x \leq 1$ ↯

például: $y = 1 = z$ megint nem lett jó

$0, u, w \leq x \leq -1$ ↯

$y, z \ge 0$

$$\frac{1+y-z}{2} \le 1-y-z$$

$$2-4y+z \le 1-y-z$$

$$0 \le 1-y-z$$

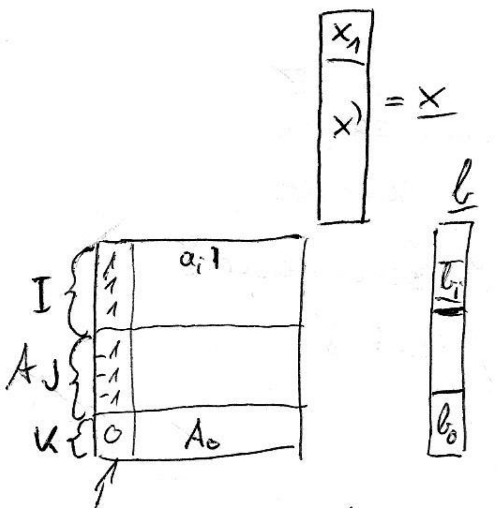
olyan számpár kell, ami ezeket a feltételeket teljesíti, így nem lesz olyan mint az előbb

· ha ennek nincs megoldása, akkor az előző rendszernek sincs! (ott x, y, z kéne, ...)

=> ez két lépéses visszavezetés lett!

-> ezt kell most általánosítani!

-> n-1 lépés után lesz egyváltozós a rendszer, aminek egyszerű a mo-a



-1, +1, 0 -k ből áll az oszlop (mennyiség) (fenti 2 lépés)

I : 1-el kezdődik
J : -1-el kezdődik
K : 0-val kezdődik
a_i' : első elem kihagyása után kapott sor

$(A_0|b_0)$ rendszernek olyan x' mo-a kell, ami alkalmas x_1-el kiegészíthető

$A_0 x' \le b_0$

$\forall i \in I : x_1 + a_i' x' \le b_i \Rightarrow x_1 \le b_i - a_i' \cdot x'$

$\forall i \in J : -x_1 + a_j' x' \le b_j \Rightarrow x_1 \ge a_j' x' - b_j$

$\forall i \in I, j \in J : b_i - a_i' x' \ge a_j' x' - b_j$

Átrendezni érdemes:

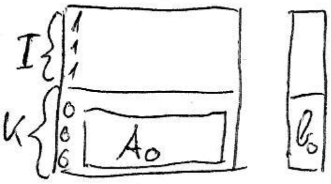
$$\left.\begin{aligned}(a_i' + a_j')x' &\le b_i + b_j \\ A_0 x' &\le b_0\end{aligned}\right\}$$ ez így az $(A^* | b^*)$ rendszer

Tulajdonképpen I-t és J sorokat összeadtuk → 0 lesz az a változó...

A 0-val kezdődő sorokat ezt csak át kell másolni

Mi van akkor, ha nincs I vagy J? (Eddig általános esetről volt szó)

II. eset: $I \ne \emptyset$, $J = \emptyset$



$\forall\, i \in I : x_1 \le b_i - a_i' x'$

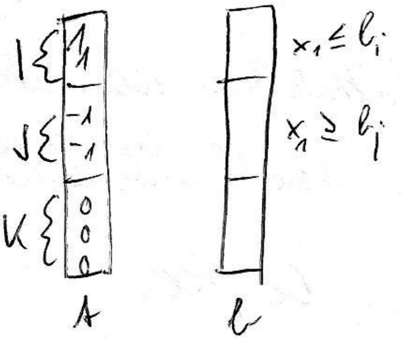
$\Rightarrow$ ezek felső becslések csak ∇

x' kiegészíthető-e?

$(A^* | b^*) = (A_0 | b_0)$ $\Rightarrow$ ezt a 0-val kezdődő sorok maradnak

$n = 1$ eset:

$x_1 = \underline{x}$



nem megoldható, ha:

- $\exists\, k \in K$ amire $b_k < 0$
- $\exists\, i \in I, j \in J$ $b_i < -b_j$
- más esetben megoldható a rendszer ∇

Egyenletrendszer megoldása (előzőleg felírt) — őt hagyjuk el

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -4 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -1 & -4 & -1 & -2 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & \frac{3}{2} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -3 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

$$\underset{\text{szélezés}}{\rightsquigarrow}\quad \begin{array}{c} \\ 3. \\ 2. \\ \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{3} & \big| & \frac{1}{3} \\ 1 & 1 & \big| & 1 \\ -1 & \frac{2}{3} & \big| & \frac{1}{3} \\ -1 & 0 & \big| & 0 \\ 0 & -1 & \big| & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{array}{c} 1,3 \\ 1,4 \\ 2,3 \\ 2,4 \\ \\ \end{array} \begin{pmatrix} \cancel{0} & 1 & \big| & 0 \\ \cancel{0} & \frac{1}{3} & \big| & \frac{1}{3} \\ \cancel{0} & \frac{5}{3} & \big| & \frac{2}{3} \\ \cancel{0} & 1 & \big| & 1 \\ \cancel{0} & -1 & \big| & 0 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & \big| & 0 \\ 1 & \big| & 1 \\ 1 & \big| & \frac{2}{5} \\ 1 & \big| & 1 \\ \hline -1 & \big| & 0 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \text{felső becslés} \\ \\ \\ \\ \text{alsó becslés} \end{array}$$

$\boxed{\text{Kombinálni}}$ az 1, -1 -eset: itt 4 sor lesz belőlük!

$$\underset{\substack{-1\\ \text{eset}}}{0} \le z \le \underbrace{0, 1, \frac{2}{3}, 1}_{\substack{1\\ \text{esetek}}} \Rightarrow \underline{\underline{z = 0}}$$

megoldható a rendszer

innen jönnek az y becslések

$$0, \frac{1}{3} \le y \le \frac{1}{3}, \cancel{1} \Rightarrow \underline{\underline{y = \frac{1}{3}}}$$

ugyanúgy vagyunk x-re is: wow. so much fun.

$$0, 1, \frac{2}{3} \le x \le \frac{2}{3} \Rightarrow \underline{\underline{\frac{2}{3} = x}}$$

Nem tipikus → mert egyetlen megoldás van. (általában intervallum van z-re)
⇒ minden z-hez van mo, más-más intervallumok lesznek

Mennyire hatékony? → Itt 2 volt, de mi van, ha 100 egyenlőtlenségem van?
⇒ ha a fele -1, fele 1, 50 · 50 = 2500 sor van a köv. mx. ban → ..... ha itt is a fele, gáz van

<u>Exponenciális algoritmus</u>! (bizonyítható)

4? : mert egyszerű :) (a hatékonyabbak sokkal bonyolultabbak)
mert bizonyítani jól lehet vele: pl. a Farkas-lemmát :)

Farkas-lemma:

1. $Ax \le b$
2. $yA = 0,\ y \ge 0,\ yb < 0$

$\Big\}$ Ebből ≤ 1 megoldható

≥ 1 megoldható

$\Rightarrow$ be kell még látni, hogy legalább az egyik mo. ható

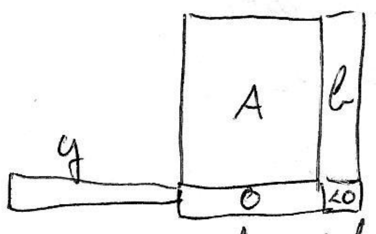
(1) Ha az 1. nem mo. ható, akkor a 2. igen. Ebben lesz jó az elimin.

0. lépés: kis módosítás az eliminációban: nem baj, ha a csupa 0 oszlopokat viszem magammal $\rightarrow$ ezt mindig az n. oszlopon kell rendezni

$\rightarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \cdots & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & -1 & & \\ 0 & 0 & -1 & & \\ 0 & 0 & 0 & & \end{pmatrix}$ $\rightarrow$ így fog kinézni, más probléma nem lesz vele

a vége: $\left(\begin{array}{c|c|c} & 1 & \vdots \\ & 1 & \vdots \\ 0 & -1 & \vdots \\ & -1 & \vdots \\ & 0 & \vdots \end{array}\right)$ ... a lényeget nem érinti

Probléma megfogalmazása a kibővített el. mx-al.



$\exists\, y \ge 0,\ y(A|b) = (0, \dots 0, \dots < 0)$

$\uparrow$ van ilyen sorvektor (az utolsó eleme −)

$C = \{ z \in \mathbb{R}^{n+1} : z = y \cdot (A|b),\ y \ge 0 \}$ cél: ebben a C halmazban találni $(0, \dots 0, <0) \in C$ vektort

$\uparrow$ minden sorvektor ami ilyen

Ab mxot minden nem-sorvektorral beszorzom (a sorok súlya, jöhető ebből vektor...)

Lemma: $z_1, z_2 \in C$, $\lambda > 0$

(1.) $z_1 + z_2 \in C$ (az összeadás és skalár ×. nem vezet ki C halmazból)

(2.) $\lambda \cdot z_1 \in C$

(1.) $z_1 = y_1 (A|b)$, $y_1 \geq 0$

$z_2 = y_2 (A|b)$, $y_2 \geq 0$

2 nem negatív sorvektor összege nem negatív

$z_1 + z_2 = (y_1 + y_2) \cdot (A|b)$, $y_1 + y_2 \geq 0$ sorvektor ✓

(2.) $\cdot \lambda \to \underbrace{(\lambda \cdot y_1)}_{\geq 0} \cdot (A|b) = \lambda \cdot z_1$

Lemma: $(A|b)$ ∀ sora $\in C$

egységmátrix soraival való szorzással előáll a sor

.. 0 0 1 0 0 ... i. sor

~~Bizonyítás~~ Következmény:

$\boxed{\forall \text{sor} \in C}$ ⇝ 2. mx. -ra is ∀ sor $\in C$ ⇝ minden művelet után igaz ez

$\boxed{\text{FM során } \forall \text{ mx } \forall \text{ sora } \in C}$

Biz:

most egy nem mo. ható rendszerből beszélünk → be kell látni, hogy a másik fele igaz

A végső rendszer nem mo. ható

utolsó mx: található C-ben egy rossz sor: $0\,0\,0\,0\,0 < 0$

2. eset: 2 ellentmondó sor $\begin{matrix} 1 \,|\, b_i & \in C \\ -1 \,|\, b_j & \in C \end{matrix}$ összeadva is $\in C$ ✓ $0\,0\,0\,0\,(b_i - b_j) < 0$

Ellentmondás az utolsó mtx-ban: csupa 0 a végén – dologgal
⇒ eljutunk a célhoz.

A Biz. illusztrálása egy példán (amelyet beli rendszerrel a F. lemmás példán)

$$
\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \\ -1 & -4 & -5 \end{pmatrix}
\begin{array}{c} 1010 \\ 1001 \\ \sim 0110 \\ 0101 \end{array}
\begin{pmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 0 & -2 & -3 \\ 0 & 3 & 4 \\ 0 & -3 & -2 \end{pmatrix}
\begin{array}{c} 1. \\ 2. \\ \sim 3. \\ 4. \end{array}
\begin{pmatrix} 0 & 1 & 3/4 \\ 0 & -1 & -3/2 \\ 0 & 1 & 4/3 \\ 0 & -1 & -2/3 \end{pmatrix}
\begin{array}{c} \to 3 \\ \to 3 \\ \\ \\ \end{array}
$$

$$\frac{2}{3}, \boxed{\frac{3}{2}} \le x_2 \le \boxed{\frac{3}{4}}, \frac{4}{3}$$

$$
\begin{array}{cc|c}
0 & -1 & -3/2 \\
0 & 1 & 3/4 \\
\hline
0 & 0 & -3/4
\end{array}
$$

itt az ellentmondás

Most megnézzük a c-lehetőséget
(ezt meg lehet kapni ugyanilyen szerkezetes módszerrel)

(1 0 0 0) → ezzel lehet sorra megkapni (A|b) adott sorát (ezt tanuljuk)
(0 1 0 0)
(0 0 1 0) → összegét is tanuli!
(0 0 0 1)

(1 0 1 0) is tanuli, meg a többi is ...

→ 3. mtx-hez a tanulók:

1/4	0	1/4	0	1.
1/2	0	0	1/2	2.
0	1/3	1/3	0	3.
0	1/3	0	1/3	4.

a rangos miatt ez megtehető!

$y = \begin{pmatrix} 3/4 & 0 & 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$ ez egy C-ben lévő vektor

$4y = (3\ 0\ 1\ 2)$ (2): ~~Ak~~ $yA = 0,\ y \ge 0,\ yb \le 0$

$y \to \lambda y$ tot mindegy!

A F-lemmánál vagy az 1. vagy a 2. esetre ad megoldást a Fourier-elimináció!

---

02. 17.

$$x + 2y = 3$$
$$3y - z = 5$$
$$x, y, z \geq 0$$

→ itt más mo. ☹

Bizonyítékos mo.:

$1. \cdot 3 \to 3x + 6y = 9$

$2. \cdot (-2) \to -6y + 2z = -10$

$3x + 2z = -1$

⇒ x, z nem lehet mind +

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = b$$

$$y = (3, -2) \quad (3\ 0\ 2) = yA \qquad yb = (-1)$$

így is kijön. juppi!

① $Ax = b,\ x \geq 0$

② $yA \geq 0 \quad yb < 0$

Nincs olyan feltétel, hogy y csupa nem-negatívból álljon ☹

Szokásos tévedés ☹

Tétel: $\forall A, b$ esetén
pontosan egy megoldható az állítások közül.
(fontos lehet… !!)

(Farkas-lemma II. alakja)

Bizonyítás:

1. Legfeljebb 1 állítható meg

$$0 \leq (yA)x \underset{①}{=} y(Ax) \underset{②}{=} yb < 0$$

② → majdnem megértél érdekődő… következtetés, hogy a st. nemcsak sem –

1\. mo. ható, akkor: 1. nem mo. ható $\Rightarrow$ 2. igen

Ezt a speciális egyenlőtlenségrendszert kell belepréselni valahogy a F. 1.-be

$(\underset{①}{Ax \leq b} \quad \underset{②}{yA = 0,\ y \geq 0,\ yb < 0})$: F. 1.

$$A' = \begin{bmatrix} A \\ -A \\ -E \end{bmatrix} \quad \boxed{x} \qquad \begin{bmatrix} b \\ -b \\ 0 \end{bmatrix} = b'$$

$\leftarrow$ x koordinátái ≥ 0 -nál, a itt azt mondja

1\. rendszer nem mo. ható $\rightarrow$ $A'x \leq b'$ nem mo. ható
(átfogalmaztuk)

$\Rightarrow \exists\, y' : \quad y'A' = 0 \quad y' \geq 0 \quad y'b' < 0$

$\rightarrow$ ha ezt nézem a 3 emeletnél, 0-kapok, meg $y'b$-t

$$y' : \boxed{\ y_1 \ \mid \ y_2 \ \mid \ y_3 \ }$$

$A \qquad -A \qquad -E$ - hez tartozó részei (vö. hossz)

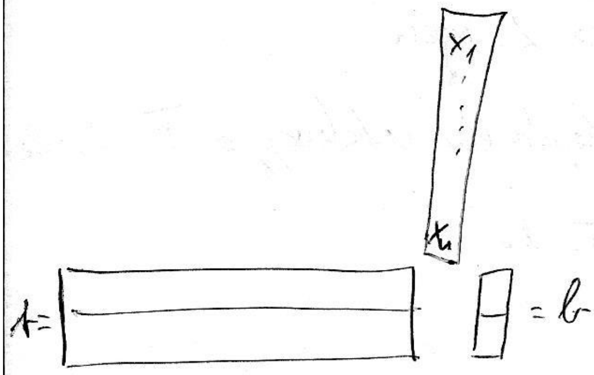
$\exists\, y_1, y_2, y_3 \geq 0$

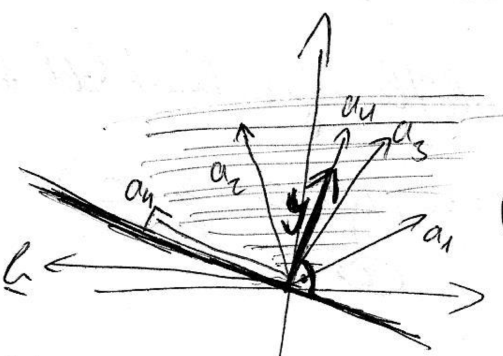
ezt. negyes miatt elég ezekkel dolgozni, kiadják y'-t, a nemes ~~ö~~ va... $-y_3$

$$y_1 A + y_2(-A) + \overbrace{y_3(-E)}^{-y_3} = 0 \rightarrow (y_1 - y_2)A = y_3 \geq 0$$

$$y_1 b + y_2(-b) + \underbrace{y_3\, 0}_{0} < 0 \rightarrow (y_1 - y_2) b < 0$$

$$y := y_1 - y_2$$





el lehet így képzelni

↖ végtelen kúp

$Ax = b$

$x \geq 0$

↓

Ax lineáris kombinációja A alaposzlopainak ▽ → 2 nem pl. vektorból előállítható a sík

mivel lehet célt kifejezni, ha nem lehet negatívval szorozni?

=> egy végtelen kúpot lehet létrehozni belőle...

3D: végtelen kúptest

1. rendben mo. lét: $\underline{b}$ a ~~a~~ generált kúpba esik

2. rendben? $y \cdot a_i \geq 0$ $\quad y\underline{b} < 0$

↓

ez itt skaláris szorzat

skaláris szorzatnak előjele? => ha ⊥ akkor = 0

+ : hegyesszög esetén

− : tompaszög esetén

y: a_i-vel hegyesszöget, b-vel tompaszöget kell bezárnia

Kell egy egyenes ami b és az a-k között van: ennek a normálvektora

a normálvektorral b tompaszög, bármelyik a-val hegyes

az elképzelhető térben is.

Tavalyi pótzh feladata:

$$7x_1 + 2x_3 - 21x_4 = 6$$
$$7x_2 + x_3 - 14x_5 = 1$$
$$3x_1 - 5x_2 - 9x_4 + 10x_5 = 2$$

Biz. be, hogy nem lehet mind az x változó ≥ 0 (az er. nem mo. ható)

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 & -21 & 0 \\ 0 & 7 & 1 & 0 & -14 \\ 3 & -5 & 0 & -9 & 10 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = b$$

$y = (y_1\ y_2\ y_3)$ Keresünk: $yA \geq 0 \qquad yb < 0$

$yA \geq 0$: I $7y_1 + 3y_3 \geq 0$

II $7y_2 - 5y_3 \geq 0$

III. $2y_1 + y_2 \geq 0$

IV $-21y_1 - 9y_3 \geq 0$

V $-14y_2 + 10y_3 \geq 0$

I. + IV. $= \quad 7y_1 + 3y_3 = 0$

II + V. $= \quad 7y_2 - 5y_3 = 0$

$$y = \left(\alpha \quad -\tfrac{5}{3}\alpha \quad -\tfrac{7}{3}\alpha\right)$$

$\rightarrow 2\alpha - \frac{5}{3}\alpha \geq 0$

$\frac{1}{3}\alpha \geq 0 \Rightarrow \alpha \geq 0$ → ilyen alfára minden ilyen alakú y vektor kielégíti az $yA \geq 0$ feltételt

$yb < 0$

$6\alpha - \frac{5}{3}\alpha - \frac{14}{3}\alpha < 0$

$-\frac{1}{3}\alpha < 0 \Rightarrow \alpha > 0$ → szigorúbb

$y=(3,-5,-7)$ → előállítottuk egy sorként így

$yA=(0\,0\,1\,0\,0)$ $\quad yb=-1$

ez bizonyítja a rendszer megoldhatatlanságát

Tfh. $Ax \leq b$ mo. ható

$\{cx : Ax \leq b\}$ felülről korlátos-e?

max: $6x_1 + 11x_2$

$$2x_1 + 5x_2 \leq 4 \xrightarrow{2\times} 4x_1 + 10x_2 \leq 8$$
$$3x_1 + x_2 \leq 3 \xrightarrow{\times 0}$$
$$4x_1 + 2x_2 \leq 1 \xrightarrow{\times 1/2} 2x_1 + x_2 \leq 1/2$$

$$6x_1 + 11x_2 \leq 8{,}5$$ jé, ez a célfüggvény...

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = b$$

$y=(2\;0\;\frac{1}{2})$ $\quad y \cdot A = (6\;\;11)$

$c=(6\;11)$ $\quad yb = 8{,}5$

$\exists y: \; yA = c \;\; y \geq 0 \implies \{cx : Ax \leq b\}$ felülről korlátos

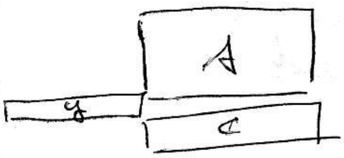
Bizonyítás:

$y: yA = c \quad , y \geq 0$

x: tetszőleges mo.-a $Ax \leq b$-nek

~~yAx~~ $\quad cx = (yA)x = y(Ax) \leq \boxed{yb}$ ← ő a felső korlát

$Ax \leq b$
$y \geq 0$



$yA = c$ → ez egy lineáris egy. rendszer lehet

⇒ tehát lin. egy. megoldhatóságáról van szó nem - változókkal ⇒ F2 jó ide!

(F2: $Ax = b \quad x \geq 0 \;/\; yA \geq 0, yb < 0$ egyik mo.-ható) (help)

$\exists y: \; yA = c \quad y \geq 0 \iff \exists y: A^T y^T = c^T \quad y \geq 0$

(mx. tulajdonságok, lsd 1 !)

F2	itt
A	A^T
b	c^T
x	y^T
y	z^T

→ fordítás

Farkas II.
körbe ér...

$\Updownarrow$ F2

~~nincs mo-a~~

$\nexists z^T: \; z^T A^T \geq 0$
$\qquad z^T c^T < 0$

$\Updownarrow$

$\nexists z: Az \leq 0$
$\qquad cz > 0$
$\iff$
$\nexists z: Az \geq 0$
$\qquad zc < 0$

itt z-t
-z-re váltottuk le... ha az
egyik nincs, a másik sincs !

$\{cx : Ax \leq b\}$ $\Longrightarrow$ $\nexists z : Az \leq 0 \quad cz > 0$
felülről korl.

Ekvivalensek az állítások: ehhez ☼ kell belátni, y vagy z
a tanúk

„ez is egyszerű, csak némi útitársat igényel az u diam. tétele..."

☼ Biz:
indirekt: Tfh $\exists z : \begin{array}{l} Az \leq 0 \\ cz > 0 \end{array}$ $\quad x_0$ lehetséges mo-a $Ax \leq b$-nek

z-be irányba haladunk, x_0 mo-ból indulunk ki

$$x_\lambda := x_0 + \lambda z \quad , \lambda \geq 0$$

Állítás: x_λ mo-a $Ax \leq b$-nek ($\forall \lambda > 0$-ra)

$$Ax_\lambda = A(x_0 + \lambda z) = \underbrace{Ax_0}_{\leq b} + \lambda \underbrace{(Az)}_{\leq 0} \leq b$$

$$cx_\lambda = c(x_0 + \lambda z) = \underbrace{cx_0}_{\in \mathbb{R}} + \lambda \cdot \underbrace{(cz)}_{> 0}$$ $\Rightarrow$ bármekkorát kaphatunk ebből lehetségesen nagy lehet ↯
ellentmondás: feltétel h. felülről korlátos

Ez a tétel: lehomogenizálás tétel
(de melyik volt az a 3 ?!?!?!)

x mo. $\quad$ $y : yA = c$
$Ax \leq b$ $\quad$ $y \geq 0$

$cx \leq \quad \leq yb$

2 mo: $y_1, y_2 \quad y_1 b = 10 \quad y_2 b = 13$
melyik jobb nekem?
a legkisebb yb ☺

gtkr40

$\min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ → ő a Duális feladat

ez is lin egyenlőtlenség... yb: lineáris célfv.

ezt kell minimalizálni...

minden eredeti feladatnak van duálisa!

Primál feladat

$\max\{cx : Ax \leq b\}$ → $\min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$

Ez itt egy definíció volt.....

Tfh: $Ax \leq b$ mo.ható, $\{cx : Ax \leq b\}$ felülről korlátos

Ekkor: a duális mo-ható? → 3 állításos tétel ⇒ igeeen!

1. a duális rendben megoldható ($yA = c, y \geq 0$ mo.ható)
2. a duális célfüggvénye alulról korlátos a mo. halmazon (cx volt a korlát!) $\{yb : yA = c, y \geq 0\}$ alulról b.

3. $\max\{cx : Ax \leq b\} \leq \min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$

ezek itt kiegészített állítások.

primál: $\max\{cx : Ax \le b\}$ duál: $\min\{yb : yA = c, y \ge 0\}$ | Oz. 23

Tétel: Tfh. $Ax \le b$ mo. ható, $\{cx : Ax \le b\}$ felülről korlátos.

$\Rightarrow$ ① $yA = c, y \ge 0$ is mo. ható

② $\{yb : yA = c, y \ge 0\}$ alulról korlátos

③ $\max\{cx : Ax \le b\} \le \min\{yb : yA = c, y \ge 0\}$

$x : Ax \le b$

$y : yA = c, y \ge 0$ $\Rightarrow cx \le yb$

24 feladat: 2012. jún. 26. I.

$\max: x_1 + 6x_2 + 4x_3 + 2x_4$

① Írjuk fel a duálist egyenlőtlen alakban

$x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \le 3$

$2x_2 - 1x_4 = 6$ $\rightarrow$ ki kell törölni 2 egyenlőtlenséggel!

$x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 5x_4 \le 8$

$3x_2 - 2x_4 \ge -9$

①

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 5 \\ 0 & -3 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -6 \\ 8 \\ 9 \end{pmatrix} = b$$

$y = (y_1, y_2 \dots y_5)$

$\uparrow$ A-ból tudjuk a dimenziót

$c\,(1 \ 6 \ 4 \ 2)$

$\min: 3y_1 + 6y_2 - 6y_3 + 8y_4 + 9y_5$

min: ...

$\boxed{1.}$ ha: $y_1 + y_4 = 1$

$\boxed{2.}$ $2y_1 + 2y_2 - 2y_3 + 3y_4 - 3y_5 = 6$

$\boxed{3.}$ $3y_1 + 2y_4 = 4$

$\boxed{4.}$ $4y_1 - y_2 + y_3 + 5y_4 + 2y_5 = 2$

!!! még mindig ez kell!!! → nehéz hiba

$y_1 \geq 0$; $y_2 \geq 0$; $y_3 \geq 0$; $y_4 \geq 0$; $y_5 \geq 0$ → ez fontos!

2.) Döntsük el, hogy a primál feladat célfüggvénye felülről korlátos-e

(ehhez kell kelni, hogy egyáltalán megoldható-e)

($x_4 = -6$ $\quad x_1 = x_2 = x_3 = 0$ → meo. határ, példa rá)

3 határos tételhez kell a meo. határság!

$\boxed{1.}$ $\boxed{3.}$ → $y_1 = 2$
$y_4 = -1$ ⇒ ↯ nincs mo. a duálisnak

⇓

nem felülről korlátos a primál

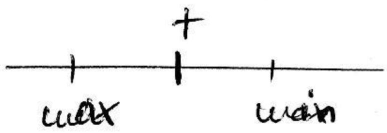
<u>Lineáris programozás dualitás tétele:</u>

(óra elején felírva ...) max = min a változás benne

<u>Biz:</u> 1.) 2.) → ✓

3.) -ból: $\leq$

Indirekt: t.f.h. van közötte érték



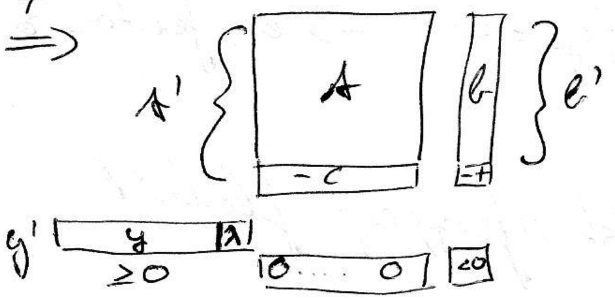
$\max_{LP} < t < \min_{DLP}$

$\boxed{\text{innen a köv}}$

$\max_{LP} < t \Rightarrow \nexists x : Ax \le b \;;\; cx \ge t$ (triv)

→ ez is lin. er., állítjuk hogy nem mo. ható
→ F-lemma használható rá!

$\overset{F}{\Longrightarrow}$



← beletettük a t-s feltételt

$$\frac{F:\; Ax \le b}{yA = 0,\; y \ge 0,\; yb < 0} \quad V. \quad \begin{matrix} 1. \\ 2. \end{matrix}$$

∃ ilyen sorvektor $(y + \lambda)$

F_1: $\left.\begin{matrix} \exists\, y \ge 0,\; \lambda \ge 0 \\ yA - \lambda c = 0 \\ yb - \lambda t < 0 \end{matrix}\right\}$

innentől képletátalakítás módja van...

$\exists\, y \ge 0,\; \lambda \ge 0$
$yA = \lambda c$
$yb < \lambda t$

(λ lehet 0, nem osztunk le!)

1. eset: $\lambda = 0$
$\exists\, y \ge 0$
$yA = 0$
$yb < 0$

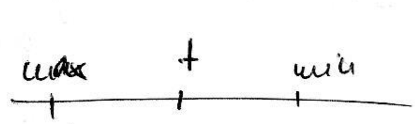
F 2. alakult ki! → mind mo.! → $Ax \le b$ nem mo. ható!

de feltettük hogy van!!
↯↯↯

II. $\lambda > 0 \rightarrow$ leoszthatunk

$y^* = \frac{1}{\lambda} \cdot y$

$\exists\, y^* \geq 0$
$y^* A = c$
$y^* b < t$ } itt kaptunk egy $<t$ megoldást ↯



$y^* b < \min D_{lp}$

Feladatmegoldás sorrendje:

1. mo. lehet?
2. korlátos?
3. maximum?

milyen egyenlőtlenségekre nem erős a dolog ↯

$\max: x_1 + x_2$
$x_1 < 1$
$x_2 < 1$
} ha ez nem ↯ LP

$(-\infty, 2) \rightarrow \nexists$

Dualitás tételhez:

(2.5.) állítás: $\exists \max\{cx : Ax \leq b\}$
$\exists \min\{yb : yA = c, y \geq 0\}$

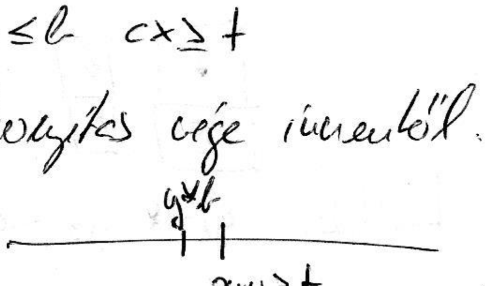
Bizonyítás: (elég a maximumot)
indirekt.

(supremum: legkisebb felső korlát, ez mindig létezik (duál))

$t := \sup\{cx : Ax \leq b\}$ t nem maximum

$\Rightarrow \nexists x : Ax \leq b \;\; cx \geq t$

előző bizonyítás vége innentől. □



$y^* b$ t-nél kisebb felső korlátja $cx : Ax \leq b$ -nek ↯

Olyp rebe a tételeket: fel lehet írni max-ként
max $\{ yb : yA \le c$ ...... tök ua. mint a primál
$\Rightarrow$ felvesi a maximumát, stb...

$\max: 10x_1 + 5x_2$

$4x_1 + x_2 \le 16$

$2x + 3x_2 \le 18$

$x_1 \ge 0 \quad x_2 \ge 0$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \\ \boxed{\begin{matrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{matrix}} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 16 \\ 18 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = b$$

$c = (10 \quad 5)$ $\qquad y = (y_1, y_2\ y_3\ y_4)$

<u>Duális:</u>

$\min: \boxed{16y_1 + 18y_2}$ $\qquad$ $\min: 16y_1 + 18y_2$

$4y_1 + 2y_2 - y_3 = 10 \quad \rightarrow \quad 4y_1 + 2y_2 \ge 10$

$y_1 + 3y_2 - y_4 = 5 \qquad y_1 + 3y_2 \ge 5$

$y_1, y_2, y_3, y_4 \ge 0 \qquad y_1, y_2 \ge 0$

ekvivalens a 2 feladat

nincs benne a célfv-ben
y_3, y_4 + az A alja olyan amilyen $\Rightarrow$ emiatt lehet
ezt megtenni
ha fel van sorolva a primálban az elv-ek ≥ 0-ja,
a duálist át lehet így alakítani, ami tök jó.

$\max \{ cx : Ax \le b, x \ge 0 \}$
$\rightsquigarrow$
$\min \{ yb : yA \ge c, y \ge 0 \}$

$$\begin{matrix} \boxed{A} & \boxed{b} \\ \boxed{-E} & \boxed{0} \end{matrix}$$

$\boxed{y_1 | y_2}$ $\quad y_1 A - y_2 = c \rightsquigarrow y_1 A \ge c$

Nem összekeverni a $\geq$ = ! (min/max def.-nél) !
(Dualitás tétel II. alakja ez a speciális eset)

2h feladat: 2011. máj. 03. pZH
a, duálist felírni
max: $nx_1+(n-1)x_2+\dots+2x_{n-1}+x_n$

$$x_1\leq 1$$
$$x_1+x_2\leq 2$$
$$x_1+x_2+x_3\leq 3$$
$$\vdots$$
$$x_1+x_2\dots+x_n\leq n$$
$$x_1,x_2\dots x_n\geq 0$$

$$A=\begin{pmatrix}1&0&0&\dots&0\\1&1&0&\dots&0\\1&1&1&\dots&0\\ \\ 1&1&\dots&1&1\end{pmatrix}\qquad\begin{pmatrix}1\\2\\3\\\vdots\\n\end{pmatrix}=b$$

$\uparrow$

ebben még nincs ≥ 0 feltétel !

$c=(n\cdot n+\dots\ 1)$

$y=(y_1\dots y_n)$

min: $y_1+2y_2+3y_3+\dots n\cdot y_n$

$$y_1+y_2+\dots+y_n\geq n$$
$$y_2+\dots+y_n\geq n-1$$
$$\vdots$$
$$y_n\geq 1$$
$$y_1,y_2,\dots y_n\geq 0$$

b, igaz-e, hogy maximumhely:

$x_1=x_2=\dots x_n=1$

$cx=1+\_\_+n=\dfrac{(n+1)\cdot n}{2}$

$\Rightarrow$ ellenőrizni, hogy kielégíti-e mo-t adott-e meg $\rightarrow$ ✓

$$\frac{(n+1)\cdot n}{2}\leq \max_{Lp}=\min_{Dlp}\boxed{\leq\frac{(n+1)\cdot n}{2}}$$

ez kéne jó most

$y_1 = y_2 \cdots = y_n = 1$ → duális megoldás (lehetséges)
→ egyen. unal. (a mo. max ≤ min -re is tét, jó)

Lp: $\max\{cx : Ax \le b\}$: ez lesz nekem döntési problémaként

Input: $A, b, c, t \in \mathbb{R}$

?: van-e olyan x, ~~amire~~ $(Ax \le b,\ cx \ge t)$

NP-beli? tanú: x

coNP-beli? → ha ez már nem elé... dualitással működik
tanú: $yA = c,\ y \ge 0\quad yb < t$

⟹ vele polinom időben megoldható....

Ez itt nem kell, szerz

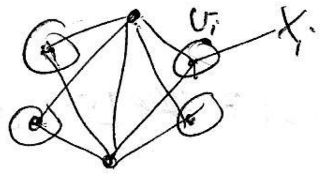
szimplex módszer: Dantzig, 1947
→ bonyolult és nem polinom módszer

1979: Hacsijan: ellipszoid módszer
→ polinomiális algoritmus Lp-re

02.24

Egészértékű programozás (IP)

$$\max \{cx : Ax \leq b ;\ x \text{ egész vektor}\}$$



Probléma: Adott gráffal → ez az input

Cél: független ponthalmaz

minden v csúcshoz x_i változó → leírja, hogy bevesszük-e

1, ha bevesszük, 0, ha nem

$\forall i: 0 \leq x_i \leq 1 \quad x_i$: egész

$\forall e: \{v_i v_j\} \quad x_i + x_j \leq 1$

$$\max: \sum_{i=1}^{n} x_i$$

NP-nehéz feladat

IP: Input: A, b, c, t

Kérdés: $\exists$-e x, ami $Ax \leq b$, x egész, $cx \geq t$

↑ eldöntési feladatot csinálunk

Tétel:

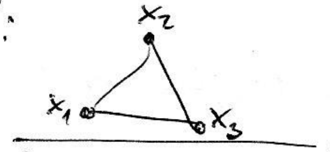
IP NP-teljes

Biz: NP-beli + NP-nehéz

Zöfasz :3

Zoofasz

Pl:



LP	IP
$x_1 = 1/2$	1
$x_2 = 1/2$	0
$x_3 = 1/2$	0
$\Sigma = 3/2$	1

IP: max $\{cx : Ax \le b,\ x \text{ egész}\}$ DIP: min $\{yb : yA = c,\ y \ge 0,\ y \text{ egész}\}$

LP: max $\{cx : Ax \le b\}$ DLP: min $\{yb : yA = c,\ y \ge 0\}$

IP → LP ~~max~~ LP relaxáció $\max_{IP} \le \max_{LP} = \min_{DLP} \le \min_{DIP}$

LP megoldáshalmaza csak egy részhalmaza jár vele (egészek)... mivel a célfüggvényértékek halmaza → nyilván a maximuma sem lehet nagyobb ő. IP megoldáshalmaza <u>RÉSZHALMAZA</u> LP-nek

$$\max_{IP} \le \max_{LP} = \min_{DLP} \le \min_{DIP}$$

Ezek között összefüggés? → nem triviális
⇒ IP LP között ált. szigorú < van, úh. nem lehet egyenlő... más dualitás kell itt !??

<u>Branch & Bound</u>

IP: max: $\{cx : Ax \le b,\ f \le x \le g,\ x \text{ egész}\}$

↳ korlátok a célkorlátra. mi van, ha ∞? (nem lefolyással....)

↳ LP - relaxációt megoldani → kapunk optimumhelyet + maxot
mások egészet kapni

$\max_{LP} \to x_{opt},\ cx_{opt}$

x_j: elágazási változó → f_j — t — g_j $f_j \le t \le g_j$

Kettévágja a feladatot, x_j új korlátokat kap

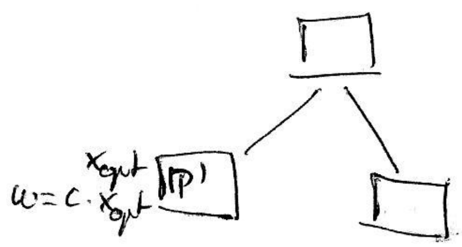
IP': $f' = f$ $g' = (\ )$ ← j. poz: $g_j = t$, minden más marad

IP'': $f' = \begin{pmatrix} \vdots \\ f_i \end{pmatrix}$ $f_i = t$, f többi tagja változatlan, $g' = g$

→ erre is megoldani → exponenciálisan megsokszorozódnak a feladatok

Ez volt eddig a branch rész. Lehet ez jobb is.

A megoldások csak ennél rosszabbak → a szülő feladat mo. határa lesz → felső becslést ad a gyerekeknek



← B&B fa

ágai véges leágazódók

B&B <u>Input:</u> A, b, c, f, g

<u>Karbantartani:</u> lista: $\alpha = \{(IP)_i = (f_i, g_i, w_i \in \mathbb{R})\}$

↑ előre ismert felső becslés

x^*: eddigi legjobb egész mo

$cx^* := z^*$

0. lépés: $z^* = -\infty$

1. lépés: $(IP)_i$ választása + törlése a listából

(Ha üres a lista → vége)

2. lépés: Ha $w_i \le z^*$ → 1. lépés (nem érdemes vele fogl.)

3. lépés: Ha $w_i > z^*$: $(LP)_i$ relaxált megoldása (pl. szimplex módsz.)

ha ~~nin~~ nincs mo. → 1. lépés

ha van mo → x_i, $cx_i = z_i$

4. lépés: Ha $z_i \le z^*$ → 1. lépés

Ha $z_i > z^*$ és x_i egész: $z^* = z_i$, $x^* = x_i$, 1. lépés

Ha $z_i > z^*$ és x_i nem egész: x_j elágazási változó ......

x_j-t választani

$x_i = \left(\; \right) \to x_i$. tartalékra 1/2-hez legközelebb legyen

Lifo: / w_i legyen maximális

~~LP~~	LP	$\vee$	IP
alkalmazható	☹		☺
hatékonyság	☺		☹

$\max: \{ cx : Ax \leq b \}$

Definíció: A Totálisan Unimoduláris, ha $\forall$ $\square$-es részmátrix determinánsa 1/-1/0.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow TU$$

Feltétel: 1x1-es részm. is igaz legyen!
$\Rightarrow$ 1/-1/0 van benne csak

Tétel: adott LP feladat
Tfh ~~Ab~~ $Ax \leq b$ megoldható
$cx : Ax \leq b$ felülről korl.
+ : A TU, b egész
Ekkor: $\max \{ cx : Ax \leq b \}$ maxhelyei között van egész vektor

$\hookrightarrow \max\limits_{LP} = \max\limits_{IP}$

$\emptyset$ Bizonyítás, jippi

$$\underset{IP}{\max} \le \underset{LP}{\max} = \underset{DLP}{\min} \le \underset{DIP}{\min}$$

$\Downarrow$ $=$ ha b egész, A TU

$\downarrow$? → ha ebből mit lehet kihozni?

$\min \{ yb : yA = c,\ y \ge 0 \}$

TU-tétel marad ebből mit?

$$\max : \left\{ by^T : \begin{array}{l} A^T y^T \le c^T \\ (-A^T) y^T \le -c^T \\ (-E) y^T \le 0 \end{array} \right\}$$ → átalakítottuk

A TU ⇒ $\underbrace{\begin{bmatrix} A^T \\ -A^T \\ -E \end{bmatrix}}_{\text{TU? } \checkmark}$ $\begin{bmatrix} c^T \\ -c^T \\ 0 \end{bmatrix}$

↓ miért?

↓ egész? → nope, sehol nem törtek

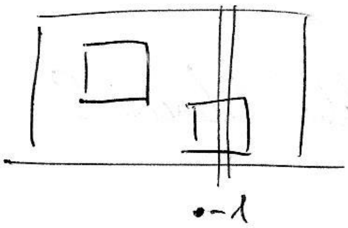
→ ha egész, akkor =

Lemma: egy mx TU marad, ha:

1. sort/oszlopot −1-el szorzunk
2. sort/oszlopot megismételünk
3. egy (0 0 ... 1 ... 0 ... 0) sort/oszlopot hozzáveszünk
4. mx transzponálása

Bizonyítás:

1.

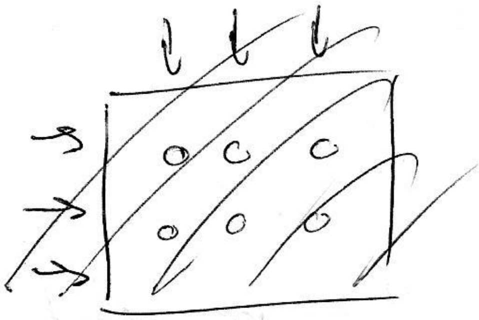


→ ha beszorzom: a -1-el szorzás a det értékét -1-el szorozza.....

ha nem esik bele a szorzott sorba → det nem változik

4. A négyzetes mátrixok transzponáltja is négyzetes mátrix.... a transzponálás meg még mindig nem változtat a determinánson..

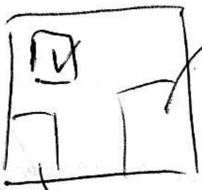
03.02



Lemma:

① - - ④
✓ ✓

②



det = 0

→ det = (±1)det régi
mátrix

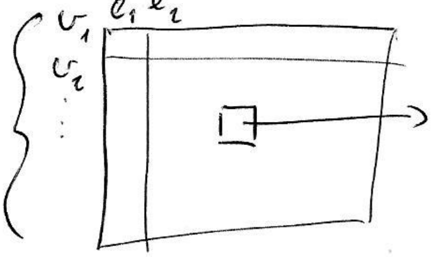
③

→ itt? : det (±1) ~~[illegible]~~

→ 0 oszlop → det = 0

Def: $\vec{G}$ ir. gráf (hurokmentes) : illeszkedési mx. $B(\vec{G})$

élek

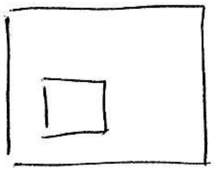


csúcsok $v_1, v_2, \ldots$; $e_1, e_2, \ldots$

$$= \begin{cases} 1, \text{ ha } v_i \xrightarrow{e_j} \\ -1, \text{ ha } v_i \xleftarrow{e_j} \\ 0, \text{ ha } \emptyset \text{ semmi} \end{cases}$$

Tétel: $\forall$ ir. gráfra $B(\vec{G})$ TU

Biz:



M $k \times k$ részmátrix

Teljes indukció

$k=1$ ✓

$k-1$-re ok, k-ra?

I. eset: M-nek van ≤ 1 db $\neq 0$ elemet tartalmazó oszlopa

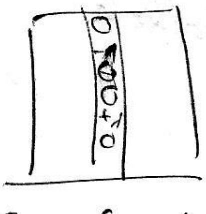
(ha ez 0 => csupa 0 oszlop => $\det M = 0$

ha ez 1 => kifejt

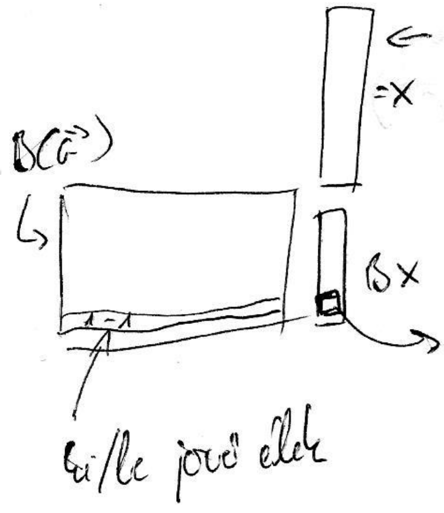
$\det M = (\pm 1)(\pm 1) \det$ □

$k-1 \to \det \in \{\pm 1, 0\}$

II. eset: M $\forall$ oszlopában 1 db 1-es, 1 db -1-es, $k-2$ 0 van



Σ sorok: tök 0 $\to = \underline{0} \to$ lin. öf. sorok => $\det = 0$



$$\sum_{v_i \xrightarrow{e}} x(e) - \sum_{\xrightarrow{e} v_i} x(e)$$

→ ez lesz jó folyamos feladatokhoz

Max. folyam: $\vec{G}$

$s \quad f(e) \quad T$

Input: $\vec{G}$ ir. gráf, $s, t \in V(G)$

$$c: E(G) \to \mathbb{R}^+$$

Output: folyam: $x: E(G) \to \mathbb{R}^+$

$$\forall e: 0 \leq x(e) \leq c(e)$$

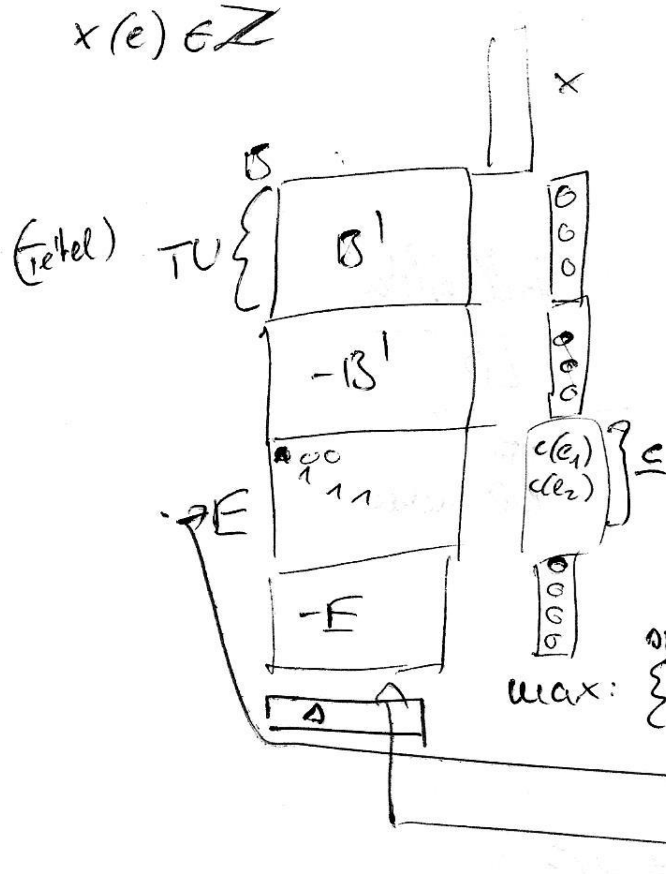
$$\forall v \neq s,t: \sum_{v \xrightarrow{e}} x(e) - \sum_{\xrightarrow{e} v} x(e) = 0$$

$$\max: \sum_{s \to} x(e) - \sum_{\to s} x(e)$$

↑ ez egy lin. prog. feladat. hatékonyan megoldható

Ugyanez IP-ként

$x(e) \in \mathbb{Z}$



max folyam:

max { $B' \cdot x = \underline{0}$

↳ B-ből elhagyjuk s és t-t

max$\{cx : Ax \le b\}$ alak kell mert erre van cucc

ok:

max: $\{ B'x = \underline{0},\ x \le c,\ x \ge \underline{0} \}$

A nagy mx is TU? → Lemma, TU az egész

⇒ a max. folyam feladat

~~Ha ∀ él kapacitása~~

Ha $\forall e : c(e) \in \mathbb{Z}$ ⇒ max folyam egész értékekkel is felvehető.

Minimális költségű folyam

(vállalások az áruházhoz képest)

inputban: k költség $k : E(G) \to \mathbb{R}^+$

1 egység átjuttatásának költsége

M: elvállalandó mennyiség

$$\sum_{s \to} x(e) - \sum_{\to s} x(e) \ge M$$

min: $\sum_e k(e) \cdot x(e)$

Min. cost flow - IP

$\min\{cx : \ldots\ldots va.\}$ $Ax \geq M$

~~max fol~~

	max f.	min. k. f.	több eléri
KP $\mathbb{R}$	LP	LP	LD
KP $\mathbb{Z}$	IP: TU	IP ~~...~~ TU	IP NP-nehéz

Több-termékes folyam:

Input: $\vec{G}$ irányított gráf, több csúcspár....

$(s_1\, t_1),\ (s_2\, t_2)\ (s_k\, t_k) \in V(\vec{G})$

$c: E(\vec{G}) \to \mathbb{R}^+$

Output: $x_1, x_2, \ldots x_k : E(\vec{G}) \to \mathbb{R}^+$

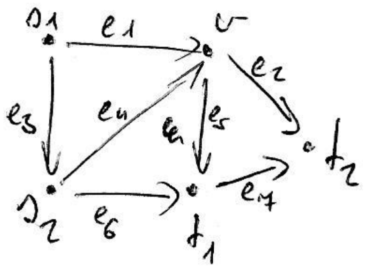
$$\left.\begin{array}{l}\forall i = 1 \ldots k \\ \forall v \in V(\vec{G}) \setminus \{s_i, t_i\}\end{array}\right\} \sum_{v \overset{\bullet}{\vec{e}}} x_i(e) - \sum_{\vec{e} \overset{\bullet}{v}} x_i(e) = 0$$

$$\forall e: x_1(e) + x_2(e) \ldots + x_k(e) \leq c(e)$$

$$\forall i, \forall e: x_i(e) \geq 0$$

$$\max: \sum_{i=1}^{k} \left(\sum_{\overset{\bullet}{s}\to} x_i(e) - \sum_{\to \overset{\bullet}{s}} x_i(e) \right)$$

ZH-feladat: felírni a többes ccc egyenleteit



$e_1, e_5, e_6 \to c(e) = 2$

többi $\to c(e) = 1$)

$x_1(e)_1, \dots, x_1(e)_7$ $s_1 \to t_1$ 1. ter

mind ≥ 0

$y(e)_1 \dots y(e)$ 2. ter

1. $x(e)_1 + y(e_2) \leq 2$
2. $x(e)_2 + y(e)_2 \leq 1$

⋮

7. $x(e)_7 + y(e_7) \leq 1$

← kapacitásokból felírt egyenletek

v: $x(e_1) + x(e_4) - x(e_2) - x(e_5) = 0$

$y(e_1) + y(e_4) - y(e_2) - y(e_5) = 0$

t_1: $y(e_5) + y(e_6) - y(e_7) = 0$

s_2: $x(e_3) - x(e_4) - x(e_6) = 0$

s_1: ....

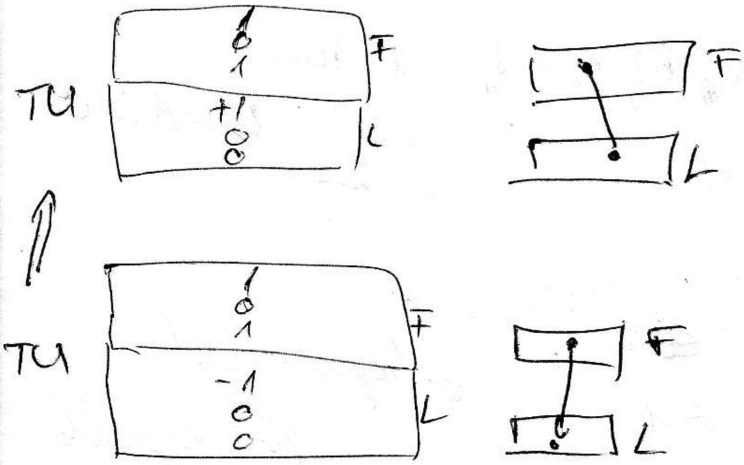
t_2: ....

max: $x(e_1) + x(e_3) + y(e_4) + y(e_6) - y(e_3)$

03.03.

$B(G)$

Tétel: G páros $\Rightarrow B(G)$ TU



irányítottá teendő

⇐ a lány részen −1-el lennék, amitoda megy az él

Input: G $(F\cup L, E)$

$w : \underline{E}(G) \to \mathbb{R}$

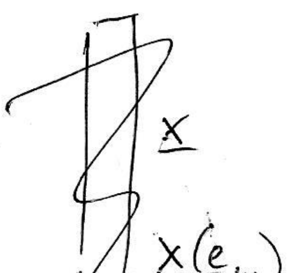
Output: max súlyú párosítás (M)

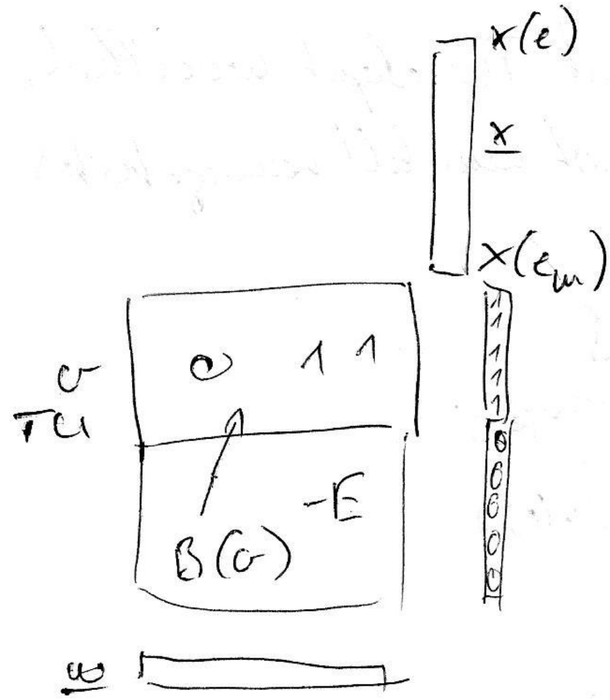
$$e \to x(e) \begin{cases} 1, \text{ ha } e \in M \\ 0, \text{ ha } e \notin M \end{cases}$$

$$\forall e : 0 \leq x(e) \leq 1, \quad x(e) \text{ egész}$$

$$\forall v \in F \cup L : \sum_{v \sim e} x(e) \leq 1$$

maximum: $\sum w(e) \cdot x(e)$





⇐ az előbb felírt feltételek mx-es megfogalmazása

→ az egész mátrix TU
(jól egészítettük ki...)

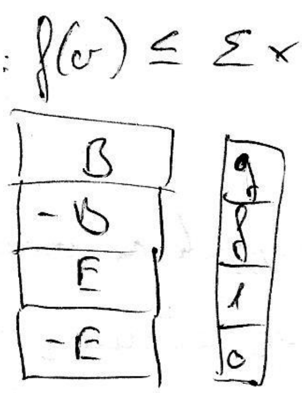
→ működik a TU alaptétel
nem kell egésznek lennie, kielégíthetőek ezek a feltételek, akkor is meglesz az optimum

(Az Egerváry kalibrációs algoritmus ?)

Általánosabb feladat: korlátok a fokszámra

$$0 \le x \le 1$$

$$\forall v: f(v) \le \sum x(e) \le g(v)$$



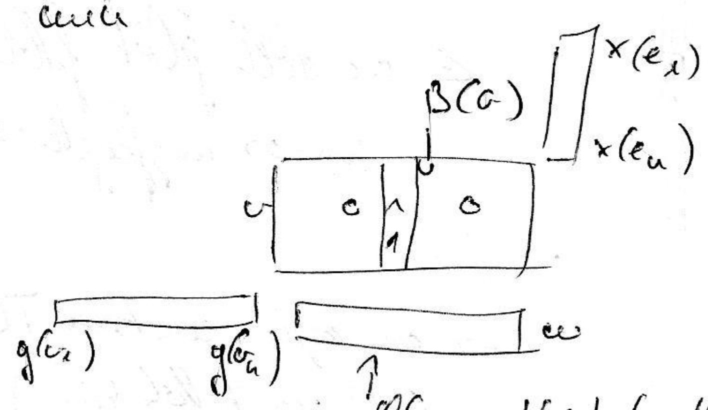
→ pl. szállítási feladatok megoldhatóak így. (itt Egerv. nem működik)

$$\text{max súlyú pár.} = \max_{IP} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{TU} \\ \text{alaptétel}}}{=} \max_{LP} = \min_{DLP}$$

Eddig kellett a $-E$ az éli. mx.-ba, mert TU alapot használtunk,
Most: vissza a dualitáshoz, innentől ezt nem kell nemnegativitás.

Duális:

$$\max \{cx : Ax \leq b,\ x \geq 0\}$$
$$\min$$



élre inputként kapott súlyfv

$$y(F \cup L) \to \mathbb{R}$$

$$\forall e = \{u,v\} : y(u) + y(v) \geq w(e)$$

→ címkézés volt E. címkénél

$$\forall v : y(v) \geq 0$$

$$\min : \sum_{v \in F \cup L} y(v)$$

Tétel: Egerváry

G páros: max. súlyú pár. összsúlya megegyezik ~~az összes címke~~ ~~összegével~~ minimális címkézés az összes ≥ 0 élsúly" címkézésre nézve

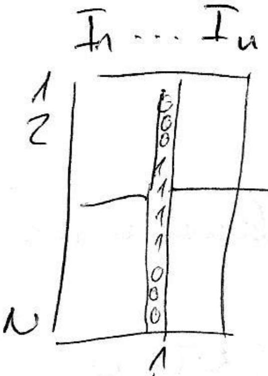
A TU, b egész } ⇒ $Ax \le b$ -nek van egész mo-a is
$Ax \le b$ megoldható }

Biz: $c \equiv 0$ + TU alapj

Pl: processzoros feladat, legyen egyszerűbben időben a kezelés

$\mathcal{I} = \{I_1, I_2 \dots I_n\}$ intervallumrendszer

$I_1 \in [1, N]$ egész értékű → $A(\mathcal{I})$



$$A_{ij} = \begin{cases} 1, \text{ha } i \in I_j \\ 0, \text{ha } i \notin I_j \end{cases}$$

minden oszlop ilyen, 1-ek között nem lehet 0

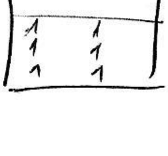
Tétel: $A(\mathcal{I})$: TU

Biz: cél: $\det \in \{\pm 1, 0\}$

indukció: □-ban levő 1-ek száma

ha 0, triv

ha van 0 oszlop, $\det = 0$

1. eset: ha van ilyen:  (egyszerre kezdődnek az 1-ek)

1-ik oszlopból (amiben kell 1-es van) a másikat kivonva

2. eset: már csak olyan ahol egyenlő ... az egyesek → átrendezés: $\boxed{\begin{matrix} 1_1 & 0 \\ 1^{1}1_1 & \end{matrix}}$ → ilyenre

(alsó háromszög ...)
főátló fölött csak 0

$\Longrightarrow \det \in \{\pm 1\}$

<u>Tétel:</u> adott az intervallumrendszer

$J = \{I_1, I_2 \dots I_n\}$

$I_n \subseteq [1, N]$ egész végpontok

k: színek száma

$i \in [1, N]$: d_i: i-t tartalmazó intervallumok száma

J megszínezhető k színnel úgy, hogy $\forall i \in [1, N]$, $\forall c$ szín i-t tartalmazó c színű intervallumok száma $\lfloor d_i / k \rfloor$ vagy $\lceil d_i / k \rceil$

<u>Bizonyítás</u>:
elég belátni azt, hogy kiv. az intervallumok egy részhalmaza...

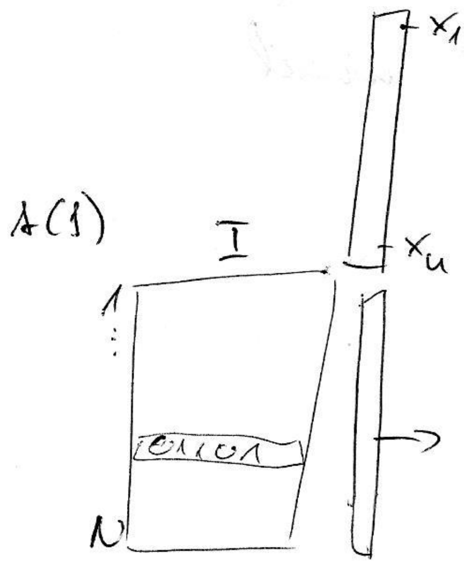
$\exists J_1 \subseteq J$ úgy, hogy $\forall i \in [1, N]$-re az i-t tartalmazó J_1-beliek száma $\lfloor d_i / k \rfloor$ vagy $\lceil d_i / k \rceil$

ekkor $J \setminus J_1$-re $k-1$-el lehet színezni

$I_j \to x_j = \{\begin{matrix} 1 & J_1 \\ 0 & \end{matrix}$

A(1)

I



→ itt az x által kiválasztott intervallumok vannak benn

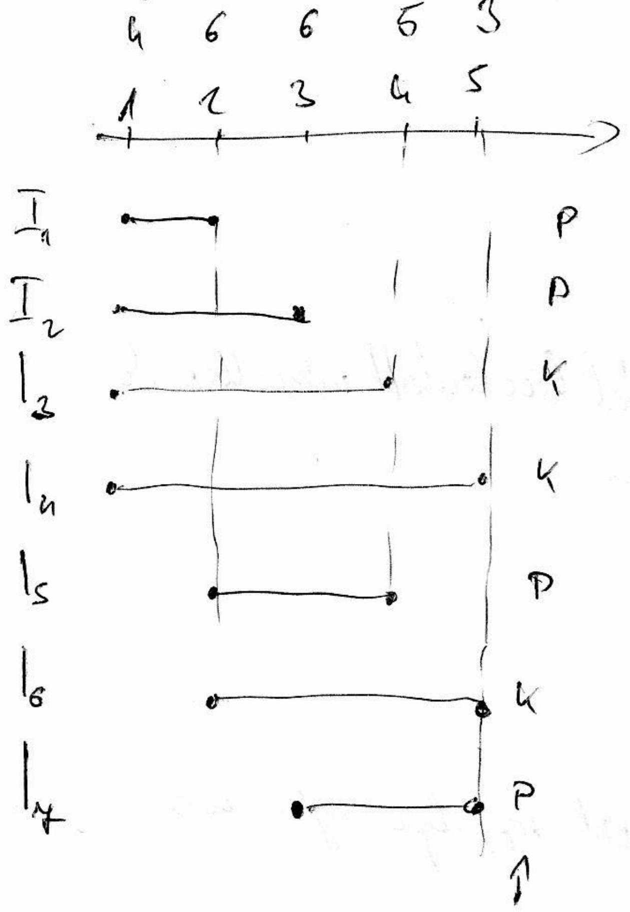
$\forall j:\ 0 \le x_j \le 1$ és x_j egész

$$\left\lfloor \frac{d_i}{\varepsilon} \right\rfloor \le Ax \le \left\lceil \frac{d_i}{\varepsilon} \right\rceil$$ → cél egy ilyen egész mo.

$$\begin{bmatrix} A(1) \\ -A(1) \\ E \\ -E \end{bmatrix} x \le \begin{bmatrix} \lceil d_i/\varepsilon \rceil \\ \lfloor d_i/\varepsilon \rfloor \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$ → TU? → Igen ☺

Intervallumgráfok: [illegible] [illegible] = max. [illegible]

ZH - feladat



$k = 2$ minimal

használhatnánk, de egyedülálló