

NP teljesség

1. Igazolja, hogy $2SZÍN \prec 3SZÍN$ és hogy $3SZÍN \prec 100SZÍN$! Mit mondanak ezek a Karp-redukciók a 3 nyelv bonyolultságáról?
2. Tudjuk, hogy $L_1 \prec L_2$ és hogy az L_2 komplementere Karp-redukálható a PARTÍCIÓ nyelvre. Igazolja, hogy ekkor $L_1 \in \text{coNP}$!
3. Az L nyelv az olyan G egyszerű gráfokból áll, melyeknél a csúcsok színezéséhez kell legalább 4 szín. Igazolja, hogy a $\text{PRÍM} \prec L$ Karp-redukció létezik!
4. Tegyük fel, hogy $P \neq \text{NP}$ és $L_1 \in P$. Lehetséges-e, hogy
 - (a) egy NP-teljes L_2 nyelvre L_1 Karp-redukálható?
 - (b) egy NP-teljes L_2 nyelv Karp-redukálható L_1 -re?
 - (c) az L_1 nyelv NP-beli?
5. Igazolja, hogy léteznek az alábbi Karp-redukciók!
 - (a) $\text{RH} \prec \text{HAM}$
 - (b) $\text{ÖSSZEFÜGGŐ} \prec 3\text{SAT}$
 - (c) $\text{ÖSSZEFÜGGŐ} \prec \text{PÁROS}$

(ÖSSZEFÜGGŐ az összefüggő gráfok nyelve, PÁROS meg a páros gráfoké)
6. Mutassa meg, hogy az alábbi nyelvek NP-teljesek!
 - (a) az olyan (G, a, b) hármasokból álló nyelv, ahol G egy irányítatlan gráf, $a, b > 0$ egész számok és a G gráfnak van a $K_{a,b}$ teljes páros gráffal izomorf feszített részgráfja.
 - (b) az olyan G irányítatlan gráfokból álló nyelv, amelyekre G -ben van olyan C kör, hogy minden $v \notin C$ csúcs össze van kötve éllel a C valamely csúcsával.
7. Az alábbi problémák mindegyikében a bemenet egy $G(V, E)$ irányítatlan gráf és a gráf pontjainak egy $S \subseteq V$ részhalmaza. Határozza meg melyik esetben kapunk P-beli, mikor NP-teljes problémát!
 - (a) **Kérdés:** Van-e olyan feszítőfa G -ben, melyben S minden eleme levél?
 - (b) **Kérdés:** Van-e olyan feszítőfa G -ben, melynek levelei pontosan az S -beli pontok?
 - (c) **Kérdés:** Van-e olyan feszítőfa G -ben, melynek levelei az S -beli pontok közül valók?
8. P-beli vagy NP-teljes az a feladat, ahol adottak az a_1, \dots, a_n egész számok és az a kérdés, hogy ez a számhalmaz szétosztható-e három részre úgy, hogy mindhárom rész összege ugyanannyi legyen?
9. Tekintsük azt a problémát, hogy egy adott G irányítatlan súlyozott gráfban mekkora a maximális súlyú út súlya! Adja meg, mi lesz az ehhez tartozó nyelv, és lássa be, hogy az NP-teljes!
10. Egy hivatal egy új E emeletes épületbe fog költözni. Az épület minden emeletén ugyanakkora terület használható fel irodák kialakítására. Minden részleg megmondta, hogy összesen mekkora irodaterületre tart igényt. Azt akarjuk eldönteni, hogy megoldható-e a költözés úgy, hogy egyetlen részleg se legyen kettévágva, azaz egy részleg teljes egészében egy emeleten legyen (de egy emeletre kerülhet több részleg is). Mi lesz a problémához tartozó nyelv? Ez a nyelv P-ben van vagy NP-teljes?
11. Egy n emberből álló szervezetben b féle bizottság működik. Bizottsági ülések időpontját akarjuk kitűzni. Két különböző bizottság ülése akkor lehet azonos napon, ha nincs olyan ember, aki mindkét bizottságnak tagja. Legyen adott egy k pozitív egész szám és minden bizottsághoz a tagok névsora. Azt szeretnénk eldönteni, hogy az összes bizottság ülése lebonyolítható-e k napon belül. Vagy adjon egy, a kívánt beosztást megtaláló polinomiális algoritmust vagy mutassa meg, hogy a feladathoz tartozó nyelv NP-teljes.