Villamosmérnök A2 (2017 tavasz) — 3. szigorlat ZH

Minden feladat 12 pontos, tehát összesen 60 pontot lehet összegyűjteni. Minden feladat esetében szükséges a világos indoklás, nem elég a végeredmény és/vagy a válasz.

1. Vannak-e lokális szélsőértékhelyei, és ha igen, milyenek, az $f(x,y) = y \ln x$ függvénynek?

Megoldásvázlat. $f_x(x,y) = \frac{y}{x} = 0 = \ln x = f_y(x,y)$ csak $(1,0)$-ban teljesül, tehát csak itt lehet f-nek lokális szélsőértéke. De nincs, mert f másodrendű parciális deriváltfüggvényei folytonosak $(1,0)$ egy környezetében (valójában az $\{(x,y) \in \mathbb{R}^2, x > 0\}$ halmazon, amelynek $(1,0)$ belső pontja), és $\begin{vmatrix} f_{xx}(1,0) & f_{xy}(1,0) \\ f_{yx}(1,0) & f_{yy}(1,0) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0$. 4 2 6

2. Konvergensek-e a következő sorok? (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n}$ (b) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+3^n}{11^{n/2}}$

Megoldásvázlat. (a) Nem, mert $\frac{\sin 1/n}{1/n} \to 1 > 0$ miatt ebből az következne, hogy $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ is konvergens. 6
(b) Igen, mert $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+3^n}{11^{n/2}} = 2\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{11}}\right)^n + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{\sqrt{11}}\right)^n$, és $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{11}}\right)^n$, $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3}{\sqrt{11}}\right)^n$ konvergens mértani sorok. 6

3. (a) Írja fel $\mathbb{R}^3$ szokásos bázisában az y tengely körüli, az y tengely pozitív fele irányából nézve $\pi/2$ szögű elforgatás $\underline{\underline{A}}$ mátrixát (b) $\underline{\underline{A}}$ inverzét és (c) adja meg $\underline{\underline{A}}$ összes valós sajátértékét és az ezekhez tartozó sajátaltereket!

Megoldásvázlat. (a) $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 4
(b) $\underline{\underline{A}}^{-1}$ a $-\pi/2$ szögű elforgatás mátrixa, azaz $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ 4
(c) $\underline{\underline{A}}$-nak nyilván sajátaltere az y tengely, azaz $\begin{pmatrix} 0 \\ c \\ 0 \end{pmatrix}$, 1 sajátértékkel. Más sajátvektora viszont nincs, mert a forgatás a tengelyén kívül egyetlen más vektort sem visz a skalárszorosába. (Vagy, algebrailag: ha $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sajátvektora A-nak $\lambda \in \mathbb{R}$ sajátértékkel, akkor $\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ y \\ -x \end{pmatrix}$, amiből $\lambda x = z$ és $\lambda z = -x$, következésképp $\lambda^2 x = -x$, vagyis $(\lambda^2 + 1)x = 0$, és így $x = 0$, amiből meg $z = 0$ következik.) 4

4. Adja meg az $\underline{\underline{A}} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ egy sajátvektorokból álló bázisát, és írja fel $\underline{\underline{A}}$-t ebben a bázisban! 6

Megoldásvázlat. $\underline{\underline{A}}$ sajátértékei a $0 = \begin{pmatrix} 1-\lambda & -2 \\ 1 & 4-\lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 5\lambda + 6$ karakterisztikus egyenlet gyökei, azaz 2 és 3. Ha b_2 a 2-höz, b_3 a 3-hoz tartozó egy-egy sajátvektor, akkor $\underline{\underline{A}}_{b_2,b_3} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$. A 2-höz tartozó sajátaltér $\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ miatt $c\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$, a 3-hoz tartozó sajátaltér pedig $\begin{pmatrix} -2 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ miatt $c\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$. 6

5. (a) Mit értünk egy $A : V \to V'$ lineáris leképezés képterén?
(b) Igazak-e a következő állítások?
(b1) Ha $\sum \frac{1}{a_n}$ konvergens, akkor $\sum a_n$ divergens.
(b2) Mi a magtere a derivált-operátornak az $\mathbb{R}$-en deriválható függvények terén?
(b3) Igaz-e, hogy $\mathbb{R}^2$ minden véges részhalmaza zárt?
(b4) Ha W altere a V végesdimenziós térnek, akkor $\dim W \leq \dim V$
(b5) Ha W valódi altere a V végesdimenziós térnek, akkor $\dim W < \dim V$

Megoldásvázlat. (a) $\{Ax : x \in V\}$
(b1) Igen, mert ha $\sum \frac{1}{a_n}$ konvergens, akkor $\frac{1}{a_n} \to 0$, következésképp $|a_n| \to \infty$, és így $a_n \not\to 0$.
(b2) A konstans-függvények.
(b3) Igen, mert nincs torlódási pontja, tehát az összeset tartalmazza.
(b4) Igen, mert W minden X bázisa független vektorrendszer V-ben, ezért $\dim W = |X| \leq \dim V$

(b5) Igen, mert ha $\dim W = \dim V = n$, és X a W egy bázisa, akkor $|X| = n$ miatt X maximálisan független vektorrendszer (és így bázis) V-ben, azaz $W = V$.

IMSc-feladat. Mutassa meg, hogy az $\mathbb{R}$-en deriválható függvények terében az $\{1, x, e^x\}$ halmaz (ahol 1 a konstans 1 függvényt jelöli) lineárisan független!

Megoldásvázlat. Ha nem volna az, akkor volna c_1, c_2, c_3 nem mind 0 úgy, hogy $c_1 + c_2x + c_3e^x = 0$. De akkor (deriválással) $c_2 + c_3e^x = 0$ és $c_3e^x = 0$, vagyis c_1, c_2, c_3 nemtriviális megoldása lenne az ebből a három egyenletből álló lineáris egyenletrendszernek. De ilyen nincs, mert az egyenletrendszer mátrixa, azaz $\begin{pmatrix} 1 & x & e^x \\ 0 & 1 & e^x \\ 0 & 0 & e^x \end{pmatrix}$, oszlopai $\begin{pmatrix} 1 & x & e^x \\ 0 & 1 & e^x \\ 0 & 0 & e^x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & (1-x)e^x \\ 0 & 1 & e^x \\ 0 & 0 & e^x \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ miatt lineárisan függetlenek.