An. 2. II. zh. MINTAMEGOLDÁS „β" |-1-| 2014. 04. 17.

1, a $\boxed{7}$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\frac{(3n+1)^n}{n!}}_{a_n} x^n \quad \text{hányados kritériummal}$$

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(3n+4)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{(3n+1)^n} = \left(\frac{3n+4}{3n+1}\right)^n \cdot \frac{3n+4}{n+1} = \quad (2)$$

$$= \frac{\left(1+\frac{4/3}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1/3}{n}\right)^n} \cdot \frac{3n+4}{n+1} \xrightarrow{n\to\infty} \frac{e^{4/3}}{e^{1/3}} \cdot 3 = 3e \quad (2)\ (2)$$

($\left(1+\frac{4/3}{n}\right)^n \to e^{4/3}$, $\left(1+\frac{1/3}{n}\right)^n \to e^{1/3}$, $\frac{3n+4}{n+1} \to 3$)

$$\Longrightarrow R = \frac{1}{3e} \quad (1)$$

b, $\boxed{7}$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-7)^n}{\sqrt[5]{n}} (x-3)^{2n} \underset{y=(x-3)^2}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \underbrace{\frac{(-7)^n}{\sqrt[5]{n}}}_{b_n} y^n \quad \text{gyökkritériummal:}$$

$$\sqrt[n]{|b_n|} = \frac{7}{\sqrt[n]{n^{1/5}}} \xrightarrow{n\to\infty} 7 \Longrightarrow R_y = \frac{1}{7} \ (3) \Longrightarrow R_x = \frac{1}{\sqrt{7}} \quad (2)$$

Végpontok: $x = 3 \pm \frac{1}{\sqrt{7}}$, itt a sor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-7)^n}{\sqrt[5]{n}} \cdot \left(\pm\frac{1}{\sqrt{7}}\right)^{2n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt[5]{n}} \quad \text{konvergens, mert Leibniz}$$

$$\Longrightarrow K.T. = \left[3-\frac{1}{\sqrt{7}},\ 3+\frac{1}{\sqrt{7}}\right] \quad (2)$$

2, a, $x_0 = 5$ $\boxed{6}$

$$f(x) = e^{2x-4} = e^{2(x-5)+6} = e^6 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{2^k}{k!}(x-5)^k \ (5); \quad R = \infty \ (1)$$

b, $\boxed{6}$

$$g(x) = \frac{1}{2+3x} = \frac{1}{3(x-5)+17} = \frac{1}{17} \cdot \frac{1}{1-\left(\frac{-3}{17}\right)(x-5)} = \frac{1}{17} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{-3}{17}\right)^k (x-5)^k \quad (5)$$

ha $\left|\frac{-3}{17}(x-5)\right| < 1$, azaz $|x-5| < \frac{17}{3} = R$ (1)

3, a, [8]

$$f(x)=\frac{1}{\sqrt[7]{5+4x^3}}=(5+4x^3)^{-1/7}=5^{-1/7}\left(1+\frac{4}{5}x^3\right)^{-1/7}=$$

$$=5^{-1/7}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{-1/7}{k}\left(\frac{4}{5}\right)^k x^{3k} \quad (6)$$

, ha $\left|\frac{4}{5}x^3\right|<1$, azaz

$$|x|<\sqrt[3]{\frac{5}{4}}=R \quad (2)$$

b, [6]

$$f^{(9)}(0)=9!\cdot a_9=9!\cdot 5^{-1/7}\cdot\binom{-1/7}{3}\left(\frac{4}{5}\right)^3=$$

x^9 együtthatója; $3k=9$, $k=3$

$$=9!\cdot 5^{-1/7}\cdot\frac{(-1/7)(-8/7)(-15/7)}{3!}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^3 \quad (4)$$

$f^{(10)}=0$, mert x^{10} nem szerepel a Taylor-sorban. (2)

4, [7]

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}9^n=\Bigg(\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n)!}\cdot 3^{2n}}_{a_n}\Bigg)-\Bigg(\underbrace{1-\frac{9}{2}}_{a_0+a_1}\Bigg) \; (5) =\cos(3)-1+\frac{9}{2}=$$

$$=\cos(3)+\frac{7}{2} \quad (2)$$

5, a, Trigonometrikus átalakítással:

[6] $\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta \Longrightarrow \sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)=2\sin\alpha\cos\beta$

$$f(x)=\sin(\underbrace{4x}_{\alpha})\cos(\underbrace{3x}_{\beta})=\frac{1}{2}\sin(7x)+\frac{1}{2}\sin(x)$$ (Véges trig. pol.

b, Dirichlet-tétel:

[5] Ha f 2π-szerint periodikus, (1) és a $[0,2\pi]$ intervallum felosztható véges sok (1) diszjunkt I_n intervallum uniójára úgy, hogy az I_n intervallumokon f monoton, (1) és az I_n intervallumok végpontjaiban léteznek f jobb-, ill. baloldali határértéke, (1) akkor

$$\phi(x)=\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2} \quad \forall x\in\mathbb{R}, \quad (1)$$

ahol ϕ az f Fourier-sorának összege.

6,
$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{2y^3-x^2}{x^2+y^2}, & \text{ha } (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & \text{egyébként}\end{cases}$$

a, f az origón kívül folytonos, 2 mert polinomok hányadosa, s a

[3] nevező nem 0. Az origóban:

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)=\lim_{\rho\to 0+}\frac{2\rho^3\sin^3\varphi-\rho^2\cos^2\varphi}{\rho^2}=\lim_{\rho\to 0+}\left(2\rho\sin^3\varphi-\cos^2\varphi\right)=$$

$=-\cos^2\varphi$ függ φ-től, tehát $\nexists$ f határértéke, így f nem folytonos az origóban. 3

b, Ha $(x,y)\neq(0,0)$

[12]
$$f'_x(x,y)=\frac{-2x(x^2+y^2)-(2y^3-x^2)\cdot 2x}{(x^2+y^2)^2} \qquad 3$$

$$f'_y(x,y)=\frac{6y^2(x^2+y^2)-(2y^3-x^2)\cdot 2y}{(x^2+y^2)^2} \qquad 3$$

Ha $(x,y)=(0,0)$, a definícióval dolgozunk:

$$f'_x(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{-h^2}{h^2}-0\right)=\nexists \qquad 3$$

$$f'_y(0,0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\left(\frac{2h^3}{h^2}-0\right)=2 \qquad 3$$

c, Ha $(x,y)\neq(0,0)$, akkor (x,y) egy $\varepsilon>0$ sugarú környezetében

[3] f'_x és f'_y folytonos, így az origón kívül $\exists$ grad f.

Az origóban $\nexists$ grad f, mert itt f nem folyt.

7, a, $f(x,y)=\sqrt{x^2+2y^4}$; $P(2,1)$

$\boxed{7}$ általában: $f'_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f'_y(x_0,y_0)(y-y_0)=z-f(x_0,y_0)$

$$f(x_0,y_0)=\sqrt{2^2+2\cdot 1^4}=\sqrt{6} \quad ①$$

$$f'_x(x,y)=\frac{2x}{2\sqrt{x^2+2y^4}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+2y^4}}\,;\quad f'_x(2,1)=\frac{2}{\sqrt6} \quad ②$$

$$f'_y(x,y)=\frac{8y^3}{2\sqrt{x^2+2y^4}}=\frac{4y^3}{\sqrt{x^2+2y^4}}\,;\quad f'_y(2,1)=\frac{4}{\sqrt6} \quad ②$$

Érintősík: $\underline{\frac{2}{\sqrt6}(x-2)+\frac{4}{\sqrt6}(y-1)=z-\sqrt6}$ ②

$\boxed{3}$ b, $\frac{df}{d\underline{e}}=\underline{e}\,\mathrm{grad}\,f=0$, ha $\underline{e}\perp\mathrm{grad}\,f(P)=\begin{bmatrix}1\\2\end{bmatrix}\cdot\frac{2}{\sqrt6}\implies \underline{\underline{e}=\pm\begin{bmatrix}2\\-1\end{bmatrix}\cdot\frac{1}{\sqrt5}}$

$\boxed{12}$ 8, $f(x,y)=g(y^2e^{2x+y})$

$$f'_x(x,y)=g'(y^2e^{2x+y})\cdot 2y^2e^{2x+y} \quad ③$$

$$f'_y(x,y)=g'(y^2e^{2x+y})\cdot(2ye^{2x+y}+y^2e^{2x+y}) \quad ③$$

$$f''_{xx}(x,y)=g''(y^2e^{2x+y})\cdot(2y^2e^{2x+y})^2+g'(y^2e^{2x+y})\cdot 4y^2e^{2x+y} \quad ②$$

$$f''_{xy}(x,y)=g''(y^2e^{2x+y})\cdot(2ye^{2x+y}+y^2e^{2x+y})(2y^2e^{2x+y})+$$
$$+g'(y^2e^{2x+y})\cdot(4ye^{2x+y}+2y^2e^{2x+y}) \quad ②$$

$f''_{yx}=f''_{xy}$ (Young-tétel)

$$f''_{yy}(x,y)=g''(y^2e^{2x+y})\cdot(2ye^{2x+y}+y^2e^{2x+y})^2+ \quad ②$$
$$+g'(y^2e^{2x+y})\cdot(2e^{2x+y}+2ye^{2x+y}+2ye^{2x+y}+y^2e^{2x+y})$$