ANALÍZIS(2)
Mérnök Informatikus szak

VIZSGADOLGOZAT

2011. jún. 16.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (20 pont)

a) Írja fel az n-edrendű állandó együtthatós homogén lineáris differenciálegyenlet általános alakját és a hozzá tartozó karakterisztikus egyenletet!
Hogyan kapunk valós megoldásokat konjugált komplex gyökök esetén? (Levezetés.)

b) Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y''' - 4y'' + 4y' = 8 + 64\,\mathrm{e}^{-2x}$$

a) (D) n-edrendű állandó együtthatós hom. lin. de.:

10

$$y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \dots + a_1 y' + a_0 y = 0, \quad a_i \in \mathbb{R}, \ i = 0, 1, \dots, n-1$$ (2)

(D) Karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \dots + a_1\lambda + a_0 = 0$$ (2)

$$\lambda_{1,2} = \alpha \pm j\beta$$

$Y_1 = \mathrm{e}^{\lambda_1 x} = \mathrm{e}^{(\alpha+j\beta)x} = \mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{e}^{j\beta x} = \mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x + j\sin\beta x)$

$Y_2 = \mathrm{e}^{\lambda_2 x} = \mathrm{e}^{(\alpha-j\beta)x} = \mathrm{e}^{\alpha x}\mathrm{e}^{j(-\beta)x} = \mathrm{e}^{\alpha x}(\cos\beta x - j\sin\beta x)$

Mint tudjuk Y_1 és Y_2 tetszőleges lineáris kombinációja is megoldás.

$Y_1^* := \frac{Y_1+Y_2}{2} = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x \ (= \mathrm{Re}\,\mathrm{e}^{\lambda_1 x})$

$Y_2^* := \frac{Y_1-Y_2}{2j} = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x \ (= \mathrm{Im}\,\mathrm{e}^{\lambda_1 x})$

Ezek is lineárisan függetlenek. Ezekre cseréljük le Y_1, Y_2-t.

Tehát látjuk, hogy Y_1^*, illetve Y_2^* az Y_1 valós és képzetes része.

(6)

b) (H):

10

$$\lambda^3 - 4\lambda^2 + 4\lambda = \lambda(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = \lambda(\lambda-2)^2 = 0$$

$$\lambda_1 = 0; \quad \lambda_{2,3} = 2$$

$$y_H = C_1 + C_2 e^{2x} + C_3 x e^{2x}$$ (5)

$$y_{ip} = Ax + Be^{-2x}$$ (külső rez.)

$4 \cdot \ \ y_{ip}' = A - 2Be^{-2x}$

$-4 \cdot \ \ y_{ip}'' = 4Be^{-2x}$

$1 \cdot \ \ y_{ip}''' = -8Be^{-2x}$

$$4A + e^{-2x}(-8B - 16B - 8B) = 8 + 64e^{-2x}$$

$$4A = 8 \Rightarrow A = 2; \quad -32B = 64 \Rightarrow B = -2$$

$$y_{ip} = 2x - 2e^{-2x}$$ (4)

$$y_{id} = y_H + y_{ip} = \dots$$ (1)

an2v110616/1.

2. feladat (14 pont)

a) A tanult módon bizonyítsa be, hogy

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

Mi a sor konvergenciasugara!

b) Írja fel az

$$f(x) = \ln\left(1 + \frac{x^4}{4}\right)$$

függvény $x_0 = 0$ bázispontú Taylor sorát és adja meg annak konvergenciasugarát!

a) $\boxed{8}$ $f'(x) = \frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots$ (3) $|x|<1 \Rightarrow R = 1$ (1)

$$\int_0^x f'(t)\,dt = \ln(1+t)\Big|_0^x = \ln(1+x) = \int_0^x (1 - t + t^2 - t^3 + \dots)\,dt =$$

$$= t - \frac{t^2}{2} + \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} + \dots \Big|_0^x = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (3)$$

$R = 1$ (változatlan) (1)

b.) $\boxed{6}$

$$\ln\left(1 + \frac{x^4}{4}\right) = \frac{x^4}{4} - \frac{1}{2}\left(\frac{x^4}{4}\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\frac{x^4}{4}\right)^3 - \frac{1}{4}\left(\frac{x^4}{4}\right)^4 + \dots =$$

$$= \frac{x^4}{4} - \frac{1}{32}x^8 + \frac{1}{3\cdot 4^3}x^{12} - \frac{1}{4^5}x^{16} + \dots \quad (4)$$

$$= \left|\frac{x^4}{4}\right| = \frac{|x|^4}{4} < 1 \Rightarrow |x| < \sqrt[4]{4} \Rightarrow R = \sqrt[4]{4} \quad (2)$$

3. feladat (11 pont)

$$f(x,y) = (2x-y)^4 + 4x^2 - 8y$$

a) $f'_x(x,y) = ?\,;\quad f'_y(x,y) = ?$

b) Hol deriválható (totálisan) a függvény? (Indokoljon!)

c) Írja fel a függvény $P_0(1,2)$ pontjabeli érintősíkjának egyenletét!

a) $f_x' = 4(2x-y)^3 \cdot 2 + 8x$ (2)

$f_y' = 4(2x-y)^3(-1) - 8$ (2)

b) f_x', f_y' mindenütt létezik és folytonos $\Rightarrow$ f tot. deriválható mindenü (2)

c.) Az érintősík egyenlete:

$$f_x'(1,2)(x-1) + f_y'(1,2)(y-2) - (z - f(1,2)) = 0 \quad (3)$$

$$8(x-1) + (-8)(y-2) - (z - (-12)) = 0 \quad (2)$$

an20110616/2.

4. feladat (8 pont)

Az f m-változós függvény totálisan deriválható az $\underline{a}$-ban. Mit állíthatunk a parciális deriváltakról?
Mondja ki és bizonyítsa be a tanult tételt!

(T) Ha f $\underline{a} \in \text{int}\, D_f$-ben totálisan deriválható, akkor minden egyik változója szerinti parciális deriváltja létezik. (2)

(B) Speciális $\underline{h}$-ra felírjuk a tot. deriválhatóság definíciójá:t: $\underline{h} := (0, 0, .., 0, h_k, 0, .., 0)$

$$\Delta f = f(\underline{a}+\underline{h}) - f(\underline{a}) = f(a_1, .., a_{k-1}, a_k+h_k, a_{k+1}, .., a_m) - f(a_1, .., a_m) =$$

$$= \underbrace{A_k \cdot h_k}_{\underline{A} \cdot \underline{h}} + \underbrace{\varepsilon_k(\underline{h}) \cdot h_k}_{\underline{\varepsilon} \cdot \underline{h}}$$

$$\Longrightarrow \frac{f(a_1, .., a_k+h_k, .., a_m) - f(a_1, .., a_m)}{h_k} = A_k + \varepsilon_k(\underline{h})$$

Ha $\underline{h} \to \underline{0}$, tehát $h_k \to 0$: $A_k \to A_k$ (független $\underline{h}$-tól) és $\varepsilon_k \to 0$ (a deriválhatóság miatt):

$$\underbrace{\lim_{h_k \to 0} \frac{f(a_1, .., a_k+h_k, .., a_m) - f(a_1, .., a_m)}{h_k}}_{f'_{x_k}(\underline{a})} = A_k$$

(6)

És ez minden k-ra fennáll.

5. feladat (6 pont)*

A $g \in C^2_{\mathbb{R}}$ egyváltozós függvény változója helyébe írjuk az $e^{3x^2+4y^2}$ kifejezést!
Legyen az így kapott kétváltozós függvény $f(x,y) = g(e^{3x^2+4y^2})$!

$$f'_x = ? \qquad f''_{xy} = ?$$

$$f'_x = g'(e^{3x^2+4y^2}) \cdot e^{3x^2+4y^2} \cdot 6x$$ (2)

$$f''_{xy} = 6x \cdot \Big(\big(g''(e^{3x^2+4y^2}) \cdot e^{3x^2+4y^2} \cdot 8y\big) e^{3x^2+4y^2} +$$
$$+ g'(e^{3x^2+4y^2}) \big(e^{3x^2+4y^2} \cdot 8y\big)\Big)$$ (4)

an2v110616/3.

6. feladat (16 pont)*

a) Cserélje meg az integrálás sorrendjét!

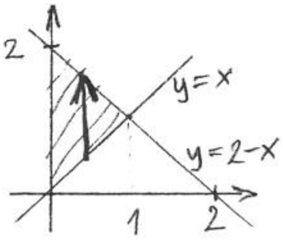
$$\int_0^1 \int_x^{2-x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

b) $\iint_T (x^2+y^2-1)^5\ \mathrm{d}T\ = ?$ $\qquad T:\ x^2+y^2 \le 4,\ y \ge 0$

a.) $\boxed{6}$

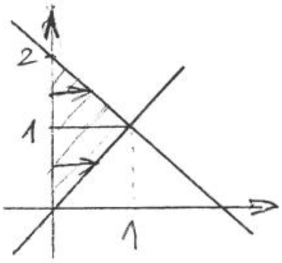
$x \le y \le 2-x$

$0 \le x \le 1$



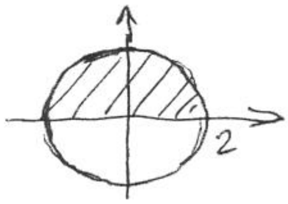
$$I_a = \int_0^1 \int_{x=0}^{x=y} f(x,y)\,dx\,dy \; +$$

$$+ \int_1^2 \int_{x=0}^{x=2-y} f(x,y)\,dx\,dy$$



b.) $\boxed{10}$

$x = r\cos\varphi$
$y = r\sin\varphi$ (2) $\qquad 0 \le r \le 2$, $0 \le \varphi \le \pi$ (2)



$$I_b = \int_{r=0}^{2} \int_{\varphi=0}^{\pi} \underbrace{(r^2-1)^5\, r}_{\varphi\text{-től független}}\, d\varphi\, dr =$$ (2)

$$= (\pi - 0)\ \frac{1}{2}\int_0^2 \underbrace{2r}_{f'}\ \underbrace{(r^2-1)^5}_{f^5}\, dr = \frac{\pi}{2}\ \frac{(r^2-1)^6}{6}\Bigg|_0^2 =$$ (1)

$$= \frac{\pi}{12}\left(3^6 - 1\right)$$ (3)

7. feladat (10 pont)*

Hol differenciálható és hol reguláris az alábbi függvény?

$$f(z) = (x^3 + 2xy) + j\,(3x^2y + 6y)$$

Ahol differenciálható, ott írja fel az $f'(z)$ deriváltat!

$u(x,y) = x^3 + 2xy \qquad v(x,y) = 3x^2y + 6y$

$u'_x = 3x^2 + 2y \qquad v'_y = 3x^2 + 6$

$u'_y = 2x \qquad v'_x = 6xy$

} mindenütt léteznek és folytonosak $\Rightarrow$ u, v tot. deriválható

(4)

an2v-110616/4.

$u'_x = v'_y$: $\quad 3x^2 + 2y = 3x^2 + 6 \Rightarrow y = 3$

és $u'_y = -v'_x$ $\quad 2x = -6xy$ és $y = 3 \Rightarrow x = 0$

$0 + j3$ pontban deriválható : (3)

$f'(j3) = u'_x(0,3) + j\,v'_x(0,3) = 6 + j \cdot 0$ (2)

Sehol sem reguláris (1)

8. feladat (15 pont)*

Adja meg az alábbi integrálok valós és képzetes részét!

a) $I_1 = \int\limits_L (2z + \cos(3z))\, dz = ?$

L: az $A = j$ és $B = 5j$ pontokat összekötő szakasz A-ból B-be irányítva.

b) $I_2 = \oint\limits_{|z-3j|=2} \dfrac{\ln z}{z^2 + 16}\, dz = ?$ (Készítsen ábrát!)

a) $\boxed{6}$ $I_1 = z^2 + \dfrac{\sin 3z}{3} \Big|_{A=j}^{B=5j} = 25j^2 + \frac{1}{3}\sin 15j - \left(j^2 + \frac{1}{3}\sin 3j\right) =$ (4)

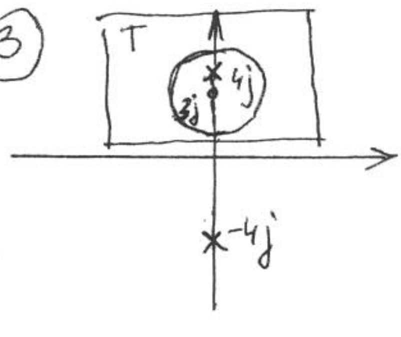
$= -25 + j\frac{1}{3}\,\mathrm{sh}\,15 + 1 - \frac{1}{3}j\,\mathrm{sh}\,3$; $\mathrm{Re}\, I_1 = -24$;

$\mathrm{Im}\, I_1 = \frac{1}{3}(\mathrm{sh}\,15 - \mathrm{sh}\,3)$ (2)

b) $\boxed{9}$ Szinguláris pontok: $z = 0$ ($\ln z$ miatt)

$z = \pm 4j$ (z^2+16-tal való osztás miatt)

(3)



$\oint\limits_L \dfrac{\frac{\ln z}{z+4j}}{z-4j}\, dz =$ reg. T-n (1)

$= 2\pi j \, \dfrac{\ln z}{z+4j} \Big|_{z=4j}$ (2) $= \frac{\pi}{4} \ln 4j =$

$= \frac{\pi}{4}\left(\ln 4 + j\frac{\pi}{2}\right)$

$\mathrm{Re}\, I_2 = \frac{\pi}{4}\ln 4$; $\mathrm{Im}\, I_2 = \frac{\pi}{4} \cdot \frac{\pi}{2}$ (3)

an2v-110616/5.

A *-os feladatokból legalább 15 pontot kell elérni!

Pótfeladatok. Csak az elégséges és a közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki.

9. feladat (9 pont)

Oldja meg az alábbi differenciálegyenletet!

$$y' = \frac{(2y+5)^4\ x}{3+x^2}$$

$$\frac{dy}{dx} = (2y+5)^4\ \frac{x}{3+x^2} \qquad y \equiv -\frac{5}{2} \text{ megoldás } 2$$

$$y \neq -\frac{5}{2} \qquad \int \frac{1}{(2y+5)^4}\,dy = \int \frac{x}{3+x^2}\,dx \quad 2$$

$$\cancel{\frac{1}{2}} \int 2\,(2y+5)^{-4}\,dy = \cancel{\frac{1}{2}} \int \frac{2x}{3+x^2}\,dx$$

$$f' f^{\alpha} \qquad\qquad f'/f$$

$$\frac{(2y+5)^{-3}}{-3} \; 2 = \ln(3+x^2) \; 2 + C \; 1$$

10. feladat (11 pont)

Írja fel az alábbi függvények $x_0 = 0$ pontra támaszkodó Taylor sorfejtését és adja meg annak konvergencia tartományát!

$$f(x) = \cos(5\,x^2)\,, \qquad g(x) = \frac{1}{2+6x^2}$$

$$f(x) = 1 - \frac{u^2}{2!} + \frac{u^4}{4!} - \frac{u^6}{6!} + \dots \Big|_{u=5x^2} = 1 - \frac{5^2}{2!}x^4 + \frac{5^4}{4!}x^8 - \frac{5^6}{6!}x^{12} + \dots \quad 3$$

$$K.T.: (-\infty, \infty) \quad 2$$

$$g(x) = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-(-3x^2)} = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(-3x^2)^n = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}(-3)^n x^{2n} \quad 4$$

$$|-3x^2| = 3|x|^2 < 1 \implies |x| < \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$K.T.: \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \quad 2$$

an2o11061616.