ANALÍZIS(1) VIZSGADOLGOZAT I. rész 2002. dec. 19.
Műszaki Informatika szak B kurzus Munkaidő: 90 perc
BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (10 pont)

Keresse meg az alábbi sorozatok határértékét!

a) $a_n = \left(\dfrac{3n-2}{3n+1}\right)^{2n}$ b) $b_n = \left(\dfrac{3n-2}{3n+1}\right)^{2n^2}$

$\boxed{5}$ a.) $a_n = \left(\dfrac{\left(1+\frac{-2/3}{n}\right)^n}{\left(1+\frac{1/3}{n}\right)^n}\right)^2$ 2 $\Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} a_n = \left(\dfrac{e^{-2/3}}{e^{1/3}}\right)^2 = e^{-2} = \dfrac{1}{e^2}$ 2 1

$\boxed{5}$ b.) $b_n = a_n^{\,n}$ 1

Sejtés: úgy viselkedik, mint $\left(\frac{1}{e^2}\right)^n \to 0$ 1

$n > N_1$: $0 \leq b_n \leq \left(\frac{1}{4}\right)^n$

$\downarrow$ 1 1 $\downarrow$ $\xrightarrow[\text{rendőrelv}]{} b_n \to 0$ 1

0 0

(Vagy $0 < \frac{1}{e^2} - 0{,}1 < b_n < \frac{1}{e^2} + 0{,}1$, ha $n > N_2 \ldots$)

2. feladat (10 pont)

A β paraméter milyen értékére konvergens és mennyi az összege az alábbi sornak?

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3\beta)^n + (-2)^n}{4^n}$$

Két geom. sor összegéről van szó. 1 A 2. konvergens, így csak úgy lehet konvergens, ha az 1. is konvergens.

$$\sum_1^{\infty} \left(\frac{3\beta}{4}\right)^n + \sum_1^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = s_1 + s_2$$

$\exists\, s_1$, ha $\left|\frac{3\beta}{4}\right| < 1$ 1 $\rightarrow |\beta| < \frac{4}{3}$ $\left(-\frac{4}{3} < \beta < \frac{4}{3}\right)$ 2 és

$s_1 = \dfrac{\frac{3\beta}{4}}{1-\frac{3\beta}{4}} = \dfrac{3\beta}{4-3\beta}$ 1+1

És $s_2 = \dfrac{-\frac{1}{2}}{1-\left(-\frac{1}{2}\right)} = -\dfrac{1}{3}$ 2 ← A konkrét behelyettesítésért

$\underbrace{\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{1}{1-q} \quad 1, \quad \sum_{n=1}^{\infty} q^n = \frac{q}{1-q} \quad 1,}_{\text{A képlet tudásáért.}}$ ha $|q| < 1$

3. feladat (16 pont)

$$f(x) = \arcsin 2x^2$$

a) Határozza meg f értelmezési tartományát!

b) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{f(x)}{x^2} = ?$

c) Differenciálható-e a 0-ban a $g(x) = \sqrt[3]{3x \cdot f(x)}$ függvény?
($g'(0) = ?$ A definícióval dolgozzon!)

d) Írja le a Lagrange-féle középértéktételt!
Teljesülnek-e g-re a Lagrange tétel feltételei $\left[0, \frac{1}{3}\right]$ - ban?

$\boxed{2}$ a.) $-1 \leq 2x^2 \leq 1$ 1 $\rightarrow x^2 \leq \frac{1}{2} \rightarrow |x| \leq \frac{1}{\sqrt{2}}$

$D_f = \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ 1

$\boxed{5}$ b.) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 2x^2}{x^2} \overset{L'H}{=} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\frac{1}{\sqrt{1-4x^4}} \cdot 4x}{2x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{2}{\sqrt{1-4x^4}} = 2$ $\frac{0}{0}$ 1 3 1

$\boxed{5}$ c.) $g'(0) = \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{g(h)-g(0)}{h}$ 1 $= \lim\limits_{h\to 0} \dfrac{\sqrt[3]{3h \cdot \arcsin 2x^2}}{h}$ 1 $=$

$= \lim\limits_{h\to 0} \sqrt[3]{\dfrac{3h \arcsin 2h^2}{h^3}}$ 1 $= \lim\limits_{h\to 0} \sqrt[3]{3\,\underbrace{\frac{h}{h}}_{1}\, 2\, \underbrace{\frac{\arcsin 2h^2}{2h^2}}_{1}}$ 1 $= \sqrt[3]{6}$ 1

$\boxed{4}$ d.) f folytonos $[a,b]$-ben és differenciálható (a,b)-ben, akkor $\exists\, \xi \in (a,b)$: $f'(\xi) = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$ 2 (Lagrange-t.)

g folytonos $\left[0, \frac{1}{3}\right] \subset D_f$-en, mert folytonos függvények összetétele 1

g differenciálható $\left(0, \frac{1}{3}\right)$-on, mert differenciálható függvények összetétele itt. 1

Tehát alkalmazható rá a Lagrange tétel.

4. feladat (11 pont)

Hol konvex, hol konkáv az

$$f(x) = x^2 \cdot \ln\left(e^2 x^2\right)$$

függvény?

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$; f páros függvény, ezért elég $x>0$-ra vizsgálni (1)

$x>0: \quad f(x) = 2x^2 \ln ex$

$f'(x) = 4x \ln ex + 2x^2 \frac{e}{ex} = 4x \ln ex + 2x$ (2)

$f''(x) = 4 \ln ex + 4x \frac{e}{ex} + 2 = 4 \ln ex + 6 = 2(2 \ln ex + 3)$ (2)

$f''(x) = 0$, ha $\ln ex = -\frac{3}{2} \rightarrow x = e^{-5/2}$ (1)

	$(0, e^{-5/2})$	$e^{-5/2}$	$(e^{-5/2}, \infty)$	
f''	$-$	0	$+$	(1)
f	$\cap$	infl. p.	$\cup$	(2)

Konkáv: $(0, e^{-5/2})$ és $(-e^{-5/2}, 0)$ intervallumokon

Konvex: $(e^{-5/2}, \infty)$ és $(-\infty, -e^{-5/2})$ intervallumokon (2)

5. feladat (10 pont)*

$$x(t) = \pi + t^6 + 3t\,; \qquad y(t) = \frac{2}{1+3t} + \mathrm{ch}\,2t$$

a) $\dot{x}(t) = ?$, $\quad \dot{y}(t) = ?$

b) Írja fel a görbe $t_0 = 0$ pontbeli érintőjének egyenletét Descartes koordinátákban!

a.) $\dot{x}(t) = 6t^5 + 3$ (1) ; $\dot{y}(t) = 2 \frac{-1}{(1+3t)^2} \cdot 3 + 2\,\mathrm{sh}\,2t$ (2)

$f'(x_0) = \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}$ $\quad \left(\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}}\right)$ (1)

Az érintő egyenes : $y = y_0 + m(x - x_0)$, $m = f'(x_0)$ (1)

$x_0 = x(t_0) = x(0) = \pi$ (1) ; $y_0 = y(t_0) = y(0) = 2 + 1 = 3$ (1)

$m = f'(x_0) = \frac{\dot{y}(0)}{\dot{x}(0)} = \frac{-6}{3} = -2$

$y_é = 3 - 2(x - \pi)$ (1)

6. feladat (24 pont)*

Számítsa ki az alábbi integrálokat!

a) $\int \cos^3 x \,dx = ?$

b) $\int x \cdot \cos(2x-1)\,dx = ?$

c) $\int \frac{-x^2 - 11x - 30}{(x^2+6x+12)(x-2)}\,dx = ? := I_c$

$\boxed{6}$ a.) $\int \cos x \cos^2 x \,dx = \int \cos x (1 - \sin^2 x)\,dx$ (2) $= \int (\underbrace{\cos x - \cos x \sin^2 x}_{f' f^2})\,dx =$

$= \sin x$ (1) $- \frac{\sin^3 x}{3}$ (2) $+ C$ (1)

$\boxed{7}$ b.) $\int x \cdot \cos(2x-1)\,dx = \frac{x}{2} \cdot \sin(2x-1) - \frac{1}{2}\int \sin(2x-1)\,dx =$ (2)

$u = x \quad v' = \cos(2x-1)$

parc.: (1) $\quad u' = 1 \quad v = \frac{1}{2}\sin(2x-1)$ (2) $\quad = \frac{x}{2}\sin(2x-1) + \frac{1}{4}\cos(2x-1) + C$ (1) (1)

$\boxed{11}$ c.) $\frac{-x^2 - 11x - 30}{\underbrace{(x^2+6x+12)}_{D<0}(x-2)} = \frac{Ax+B}{x^2+6x+12} + \frac{C}{x-2}$ (4)

$-x^2 - 11x - 30 = (Ax+B)(x-2) + C(x^2+6x+12)$ (1)

$x=2: \quad -56 = 28C \rightarrow C = -2$ (1)

$x=0: \quad -30 = -2B + 12C \rightarrow B = 6C + 15 = 3$ (1)

$x=1: \quad -42 = -A - B + 19C \rightarrow A = 1$ (1)

$I_c = \int \left(\underbrace{\frac{x+3}{x^2+6x+2}}_{=\frac{1}{2}\frac{2x+6}{x^2+6x+2} \ \left(\frac{f'}{f}\right)} - \frac{2}{x-2}\right) dx = \frac{1}{2}\ln(x^2+6x+2) - 2\ln|x-2| + C$ (2) (1)

7. feladat (19 pont)

a) Milyen α-ra konvergens ill. divergens az

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,dx$$

integrál? (Bizonyítással!)

b) * Írja le az improprius integrálokra vonatkozó majoráns és minoráns kritériumot!

c) * Konvergens-e az alábbi integrál?

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^4+\sqrt[3]{2x}}\,dx$$

$\boxed{11}$ a.) Ha $\alpha = 1$:

$$\lim_{\omega\to\infty}\int_1^\omega \frac{1}{x}\,dx = \lim_{\omega\to\infty} \ln x\Big|_1^\omega = \lim_{\omega\to\infty}(\ln\omega - \ln 1) = \infty, \qquad \text{tehát divergens}$$

2 1 1 1

Ha $\alpha \neq 1$:

$$\lim_{\omega\to\infty}\int_1^\omega x^{-\alpha}\,dx = \lim_{\omega\to\infty}\left[\frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1}\right]_1^\omega = \lim_{\omega\to\infty}\left[\frac{\omega^{1-\alpha}}{1-\alpha} - \frac{1}{1-\alpha}\right]$$

2 2

Konvergens, ha $1-\alpha<0$, tehát $\alpha>1$. 1

Divergens, ha $1-\alpha>0$, tehát $\alpha<1$. 1

$\boxed{4}$ b.)

Majoráns kritérium: 2

$f\in R_{[a,\omega]}$ $\forall\omega\in(a,\infty)$-re és $|f(x)|\le g(x)$ $x\in[a,\infty)$-re.

Ha $\int_a^\infty g(x)\,dx$ konvergens, akkor $\int_a^\infty |f(x)|\,dx$ is az (az előző tétel miatt $\int_a^\infty f(x)\,dx$ is konvergens) és

$$\left(\left|\int_a^\infty f(x)\,dx\right|\le\right)\int_a^\infty |f(x)|\,dx \le \int_a^\infty g(x)\,dx$$

Minoráns kritérium: 2

Ha $0\le h(x)\le f(x)$ $x\in[a,\infty)$-re és $\int_a^\infty h(x)\,dx=\infty \implies \int_a^\infty f(x)\,dx=\infty$

$\boxed{4}$ c.) $0<\int_1^\infty \frac{1}{x^4+\sqrt[3]{2x}}\,dx < \int_1^\infty \frac{1}{x^4}\,dx = \text{konv.}$ $(\alpha=4>1) \Rightarrow$ az eredeti is konv.

Pótfeladatok (csak az elégséges (indokolt! esetben a közepes) vizsgához javítjuk ki):

8. feladat (10 pont)

a) $\lim_{x\to 0}\frac{\operatorname{arctg} 3x^2}{x\cdot\sin 5x^2} = ?$

b) $\lim_{x\to 2-0}(2-x)\cdot\ln(2-x) = ?$

$\boxed{5}$ a.) $\lim_{x\to 0\pm}\frac{\operatorname{arctg} 3x^2}{x\cdot \sin 5x^2}\ \underset{\frac{0}{0}}{\overset{L'H}{=}}\ \lim_{x\to 0\pm}\frac{\frac{1}{1+9x^4}\cdot 6x}{\sin 5x^2 + x\cdot\cos 5x^2\cdot 10x} =$

$= \lim_{x\to 0\pm}\underbrace{\frac{x}{x^2}}_{=\frac{1}{x}\to\pm\infty}\ \frac{\frac{6}{1+9x^4}}{5\frac{\sin 5x^2}{5x^2}+10\cdot\cos 5x^2} = \pm\infty$

$\frac{\sin 5x^2}{5x^2}\to 1$, $\cos 5x^2 \to 1$, $\to \frac{6}{15}$

Vagy: $\frac{\operatorname{arctg} 3x^2}{x\cdot\sin 5x^2} = \frac{\operatorname{arctg} 3x^2}{5x^3}\ \underbrace{\frac{5x^2}{\sin 5x^2}}_{\to 1}\ \ldots$

$\boxed{5}$ b.) $\lim_{x\to 2-0}\frac{\ln(2-x)}{\frac{1}{2-x}}\ \underset{\frac{\infty}{\infty}}{\overset{L'H}{=}}\ \lim_{x\to 2-0}\frac{\frac{1}{2-x}(-1)}{\frac{-1}{(2-x)^2}(-1)} = \lim_{x\to 2-0} -(2-x) = 0$

9. feladat (10 pont)

Konvergensek-e az alábbi sorok?

a) $\sum_{n=1}^\infty \frac{2n+1}{n^2+6}$ b) $\sum_{n=1}^\infty \frac{3^{2n}}{n^2\,10^{n+1}}$

$\boxed{5}$ a.) $\frac{2n+1}{n^2+6} > \frac{2n}{n^2+6n^2} = \frac{2}{7}\frac{1}{n}$; $\frac{2}{7}\sum^\infty\frac{1}{n}$ div.

$\underset{\text{min. kr.}}{\Longrightarrow} \sum^\infty a_n$ div.

$\boxed{5}$ b.) $\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{9^{n+1}\ n^2\ 10^{n+1}}{(n+1)^2\ 10^{n+2}\ 9^n} = \frac{9}{10}\frac{1}{(1+\frac{1}{n})^2} \to \frac{9}{10}<1$

$\Rightarrow \sum^\infty b_n$ konv.

Vagy: $\sqrt[n]{b_n} = \frac{9}{(\sqrt[n]{n})^2\ 10\cdot\sqrt[n]{10}} \longrightarrow \frac{9}{10}<1 \Rightarrow \sum^\infty b_n$ konv.