ANALIZIS(2) **I.ZÁRTHELYI pótlása** **2007. május 4.**

Mérnök Informatikus szak — Munkaidő: 60 perc

BME, TTK, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

1) Feladat (20 pont).

a) Adja meg az

$$y' = (2y+1)\,\frac{\ln^3 x}{x}, \qquad x > 0$$

differenciálegyenlet összes megoldását!

b) Határozza meg az $y(1) = 3$ kezdeti értékhez tartozó megoldást!

2) Feladat (20 pont).

Írja fel az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y' - \frac{2}{x}\,y = x^2\,e^{3x}, \qquad x > 0$$

3) Feladat (15 pont).

Az $y = y(x)$, $x \in \mathbb{R}$ megoldása a

$$y' + \ln(5y) + 2x - \ln 5 = 0$$

differenciálegyenletnek, akárhányszor differenciálható és átmegy a $(0,1)$ ponton. Van-e ennek a megoldásnak lokális maximuma az $x_0 = 0$ helyen?

4) Feladat (20 pont).

Írja fel az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y'' - 8\,y' + 12\,y = 36\,x^2 - 2$$

5) Feladat (10 pont).

Konvergens-e az alábbi sor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(1 + \frac{-1}{3n}\right)^{n^2}$$

6) Feladat (15 pont).

Határozza meg az alábbi hatványsor konvergencia sugarát és konvergencia tartományát:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\,2^n}{3^{2n}}\;x^n$$

ANALIZIS(2) **I.ZÁRTHELYI** pótlása **2007. május 4.**

Mérnök Informatikus szak Munkaidő: 60 perc

BME, TTK, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

1) Feladat (20 pont).

a) Adja meg az

$$y' = (2y+1)\,\frac{\ln^3 x}{x}, \qquad x > 0$$

differenciálegyenlet összes megoldását!

b) Határozza meg az $y(1) = 3$ kezdeti értékhez tartozó megoldást!

$\boxed{16}$ a, $2y+1=0$; $y \equiv -\frac{1}{2}$ megoldás. 2

Ha $y \neq -\frac{1}{2}$, szeparálható:

$$\int \frac{dy}{2y+1} = \int \frac{\ln^3 x}{x}\,dx \quad 3$$

4 $\frac{1}{2}\ln|2y+1| = \frac{1}{4}\ln^4 x + C$ 4 ; $C \in \mathbb{R}$

$2y+1 = \pm e^{C} \cdot e^{\frac{1}{2}\ln^4 x}$

$y_{ált}(x) = -\frac{1}{2} + K e^{\frac{1}{2}\ln^4 x}$ 3 ; $K \in \mathbb{R}$; $x > 0$

4 b, $y(1) = 3$; $3 = -\frac{1}{2} + K \cdot e^{0}$; $K = \frac{7}{2}$

$y_{part}(x) = \frac{1}{2}\left(-1 + 7 e^{\frac{1}{2}\ln^4 x}\right)$

Írja fel az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y' - \frac{2}{x}\,y = x^2 e^{3x}, \qquad x > 0$$

Inhomogén, lineáris, elsőrendű diff. egy.

I, Homogén egyenlet ált. megoldása:

$y' - \frac{2}{x}y = 0$; $\int \frac{dy}{y} = \int \frac{2}{x}\,dx$

$y \equiv 0$ megoldás $\quad \ln y = 2\ln x + C$

$y_{h,á}(x) = K \cdot x^2$; $K \in \mathbb{R}$

8

II, Az inhomogén egy partikuláris megoldását K variálásával keressük meg:

$y_{i,p}(x) = K(x) \cdot x^2$

$y'_{i,p}(x) = K'(x) \cdot x^2 + 2K(x)\,x$

$x^2 K'(x) + \cancel{2K(x) \cdot x} - \cancel{\frac{2}{x} \cdot K(x) \cdot x^2} = x^2 e^{3x}$

$K'(x) = e^{3x}$; $K(x) = \int e^{3x}\,dx = \frac{1}{3}e^{3x}$

9 ~~8~~ $y_{i,p}(x) = \frac{1}{3}e^{3x} \cdot x^2$

$y_{i,á}(x) = y_{h,á}(x) + y_{i,p}(x) \overset{2}{=} \left(K + \frac{1}{3}e^{3x}\right)x^2$ 1 ; $K \in \mathbb{R}$

Az $y = y(x)$, $x \in \mathbb{R}$ megoldása a

$$y' + \ln(5y) + 2x - \ln 5 = 0$$

differenciálegyenletnek, akárhányszor differenciálható és átmegy a $(0,1)$ ponton. Van-e ennek a megoldásnak lokális maximuma az $x_0 = 0$ helyen?

Legyen $y(x)$ a $(0,1)$ ponton áthaladó megoldás.

$y'(0) = -\ln 5 - 2\cdot 0 + \ln 5 = 0 \Rightarrow$ lehet lok. m. é. (5)

$y'' + \frac{1}{y} y' + 2 = 0$ (5); $y''(0) = -\frac{y'(0)}{y(0)} - 2 = -\frac{0}{1} - 2 = -2 < 0$ (3)

Tehát valóban lokális maximuma van a megoldásnak. (2)

4) Feladat (20 pont).
Írja fel az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y'' - 8y' + 12y = 36x^2 - 2$$

(H): $\lambda^2 - 8\lambda + 12 = 0$; $(\lambda-2)(\lambda-6) = 0$; $\lambda_1 = 2$; $\lambda_2 = 6$ (6)

(7) $y_{h,á}(x) = C_1 e^{2x} + C_2 e^{6x}$ (3)

(I): $y_{i,p}(x) = ax^2 + bx + c$

$y'(x) = 2ax + b$

$y''(x) = 2a$

$2a - 8(2ax + b) + 12(ax^2 + bx + c) = 36x^2 - 2$

$12ax^2 + x(12b - 16a) + 2a - 8b + 12c = 36x^2 - 2$

$12a = 36 \Rightarrow a = 3$

$12b - 16a = 0 \Rightarrow b = \frac{3\cdot 16}{12} = 4$

$2a - 8b + 12c = -2 \Rightarrow c = \frac{-2 - 2\cdot 3 + 8\cdot 4}{12} = \frac{-2-6+32}{12} = 2$

(10) $y_{i,p}(x) = 3x^2 + 4x + 2$

$y_{i,á}(x) = y_{h,á}(x) + y_{i,p}(x)$ (2) $= C_1 e^{2x} + C_2 e^{6x} + 3x^2 + 4x + 2$ (1)

Konvergens-e az alábbi sor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} n\left(1 + \frac{-1}{3n}\right)^{n^2}$$

Pozitív tagú sor; alkalmazzuk a gyökkritériumot:

$\sqrt[n]{n\left(1+\frac{-1}{3n}\right)^{n^2}} = \underbrace{\sqrt[n]{n}}_{\downarrow\, 1} \cdot \underbrace{\left(1 - \frac{1}{3n}\right)^n}_{\downarrow\, e^{-1/3}} \xrightarrow{n\to\infty} e^{-1/3} < 1$, tehát konvergens

(10)

6) Feladat (15 pont).
Határozza meg az alábbi hatványsor konvergencia sugarát és konvergencia tartományát:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)\,2^n}{3^{2n}} x^n$$

2.ZH

$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{(n+2)\,2^{n+1}\cdot 9^n}{9^{n+1}\cdot n\cdot 2^n} = \frac{n+2}{n}\cdot\frac{2}{9} \longrightarrow \frac{2}{9} \Rightarrow R = \frac{9}{2}$ (8)

$x = \frac{9}{2}$ esetén $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)2^n}{3^{2n}}\cdot\left(\frac{9}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(n+1) = \infty$ (3)

$x = -\frac{9}{2}$ esetén $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)2^n}{3^{2n}}(-1)^n\left(\frac{9}{2}\right)^n = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\cdot(n+1)$ divergens (3)

Konv. tart.: $\left(-\frac{9}{2}, +\frac{9}{2}\right)$ (1)