Analízis 1. **1. ZH (α)** **2020.10.16.**

1. feladat — 14 pont

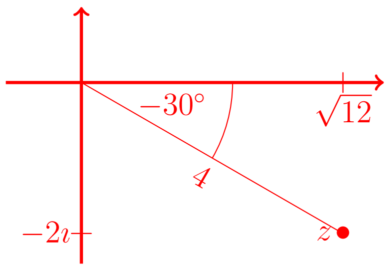
Legyen $z = \sqrt{12} - 2\imath$. Határozza meg a

$$\frac{z-\imath}{\overline{z}-\imath}, \qquad \text{és} \qquad \sqrt{\imath z}$$

komplex számok valós és képzetes részét!

Megoldás: $\dfrac{z-\imath}{\overline{z}-\imath} = \dfrac{\sqrt{12}-3\imath}{\sqrt{12}+\imath} = \dfrac{(\sqrt{12}-3\imath)(\sqrt{12}-\imath)}{(\sqrt{12}+\imath)(\sqrt{12}-\imath)} = \dfrac{12-3-4\sqrt{12}\imath}{13}$

$\operatorname{Re}\left(\dfrac{z-\imath}{\overline{z}-\imath}\right) = \dfrac{9}{13}$ és $\operatorname{Im}\left(\dfrac{z-\imath}{\overline{z}-\imath}\right) = \dfrac{-8\sqrt{3}}{13}$ $\boxed{\textbf{7p.}}$



$|z| = 4$, $\arg z = -30°$,
$z = 4(\cos -30° + \imath \sin -30°)$

$\sqrt{\imath z} = \sqrt{(\cos 90° + \imath \sin 90°) \cdot 4(\cos -30° + \imath \sin -30°)} = \sqrt{4(\cos 60° + \imath \sin 60°)} = 2(\cos(30° + k \cdot 180°) + \imath \sin(30° + k \cdot 180°))$, $k = 0, 1$

$\operatorname{Re}\left(\sqrt{\imath z}\right) = \pm\sqrt{3}$, $\operatorname{Im}\left(\sqrt{\imath z}\right) = \pm 1$. $\boxed{\textbf{7p.}}$

2. feladat — 14 pont

Írja le az algebra alaptételét!

Határozza meg a

$$z^4 + 3\imath z^3 + 4z^2$$

polinom komplex gyökeit, és írja fel a gyöktényezős alakját!

Megoldás: Tétel bármelyik változata jó. $\boxed{\textbf{2p.}}$

$0 = z^4 + 3\imath z^3 + 4z^2 = z^2\left(z^2 + 3\imath z + 4\right)$. $\boxed{\textbf{2p.}}$ A megoldások $z_{1,2} = 0$ $\boxed{\textbf{2p.}}$, és $z_{3,4} = \dfrac{-3\imath + \sqrt{(3\imath)^2 - 4 \cdot 4)}}{2} = \dfrac{-3\imath + \sqrt{-25}}{2} = \dfrac{-3\imath \pm 5\imath}{2}$, $\boxed{\textbf{5p.}}$ azaz $z_3 = \imath$, és $z_4 = -4\imath$.

A gyöktényezős alak $z^4 + 3\imath z^3 + 4z^2 = z^2(z-\imath)(z+4\imath)$. $\boxed{\textbf{3p.}}$

3. feladat — 32 pont

Határozza meg az

- $a_n = \sqrt[n]{\dfrac{n^2+3n}{2n^3-n+1}}$;
- $b_n = \left(\dfrac{n^2+2}{n^2-5}\right)^{2n^2+3}$;

sorozatok határértékét, ha léteznek!

Megoldás: $1 \leftarrow \sqrt[n]{\dfrac{4}{n}} = \sqrt[n]{\dfrac{4n^2}{n^3}} \geq \sqrt[n]{\dfrac{n^2+3n}{2n^3-n+1}} \geq \sqrt[n]{\dfrac{n^2}{2n^3}} = \sqrt[n]{\dfrac{1}{2n}} \to 1$ $\boxed{\textbf{8p.}}$, így a rendőrelv miatt $a_n \to 1$ $\boxed{\textbf{8p.}}$

$$b_n = \left(\frac{1+2/n^2}{1-5/n^2}\right)^{2n^2+3} \overset{\boxed{\textbf{8p.}}}{=\!=} \frac{\left((1+2/n^2)^{n^2}\right)^2}{\left((1-5/n^2)^{n^2}\right)^2} \cdot \frac{(1+2/n^2)^3}{(1-5/n^2)^3} \xrightarrow{\boxed{\textbf{8p.}}} \frac{(e^2)^2}{(e^{-5})^2} \cdot \frac{1}{1} = e^{14}$$

4. feladat **16 pont**

Határozza meg a

- $c_n = \dfrac{(-6)^{n+1} + n^3 \cdot 2^{2n-1}}{3^{n+1} \cdot 2^{n-1} + n}$;

sorozat határértékét, ha létezik!

Megoldás:

$$c_n = \dfrac{-6 \cdot (-6)^n + \dfrac{n^3 4^n}{2}}{\dfrac{3}{2} 6^n + n}$$

$$c_{2n} = \dfrac{-6 \cdot 36^n + 4n^3 16^n}{1.5 \cdot 36^n + 2n} = \dfrac{-6 + 4n^3 \left(\dfrac{4}{9}\right)^n}{1.5 + \dfrac{2n}{36^n}} \to -4$$

$$c_{2n-1} = \dfrac{36^n + \dfrac{(2n-1)^3 16^n}{8}}{0.25 \cdot 36^n + 2n - 1} = \dfrac{1 + \dfrac{(2n-1)^3}{8}\left(\dfrac{4}{9}\right)^n}{0.25 + \dfrac{2n-1}{36^n}} \to 4 \boxed{\textbf{8p.}}$$

Minden elem szerepel valamelyik részsorozatban, így 2 torlódási pont van: ± 4.
$\limsup c_n = 4, \liminf c_n = -4$ határérték nem létezik. $\boxed{\textbf{8p.}}$

5. feladat **24 pont**

Legyen $a_1 = 13$ és $a_{n+1} = \sqrt{\dfrac{a_n^2 + 8}{3}}$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén!

Vizsgálja a rekurzióval adott sorozatot monotonitás, korlátosság és konvergencia szempontjából!

$\inf a_n =?$ $\sup a_n =?$ $\lim a_n =?$

Megoldás: Teljes indukcióval belátjuk, hogy $2 \leq a_n$ minden n-re. $\boxed{\textbf{3p.}}$
$n = 1$ esetén $2 \leq a_1 = 13$ teljesül.

Ha $2 \leq a_n$, akkor $4 \leq a_n^2$, $12 \leq a_n^2 + 8$ és $4 \leq \dfrac{a_n^2+8}{3}$, tehát $2 \leq \sqrt{\dfrac{a_n^2+8}{3}} = a_{n+1}$. $\boxed{\textbf{3p.}}$

Megmutatjuk, hogy $a_n \geq a_{n+1}$ minden n-re. $\boxed{\textbf{3p.}}$

Már beláttuk, hogy $a_n \geq 2$. Innen $2a_n^2 \geq 8$, $3a_n^2 \geq a_n^2 + 8$, $a_n^2 \geq \dfrac{a_n^2+8}{3}$. Mivel a_n pozitív, ezért gyökvonás után kapjuk az állítást. $\boxed{\textbf{3p.}}$

Mivel a_n monoton csökkenő, így felülről korlátos, és $\sup a_n = a_1 = 13$ $\boxed{\textbf{2p.}}$
Megmutattuk, hogy a_n monoton, és korlátos, így a konvergencia elégséges feltétele miatt konvergens. $\boxed{\textbf{3p.}}$
Legyen $A = \lim a_n \in \mathbb{R}$! Felhasználva a részsorozat határértékére és a határérték és műveletek kapcsolatára vonatkozó tételeket, kapjuk az $A = \sqrt{\dfrac{A^2+8}{3}}$ egyenletet. $\boxed{\textbf{3p.}}$
Mivel a_n monoton csökken, ezért $\inf a_n = \lim a_n = 2$. $\boxed{\textbf{4p.}}$

IMSC **feladat** **8 pont**

Írjunk az n tízes számrendszerben felírt alakja elé tizedes pontot, és ez elé egy 0 számjegyet. A kapott véges tizedes tört legyen a_n. (Azaz $a_n = 0.n$)

(a) Adja meg az a_n sorozat olyan részsorozatát, aminek határértéke 1!

(b) Adja meg az a_n sorozat olyan részsorozatát, aminek határértéke 0!

(c) Adja meg az a_n sorozat olyan részsorozatát, aminek határértéke 0.5!

Ha valamelyik nem létezik indokolja!

(d) Adja meg az a_n sorozat torlódási pontjainak halmazát!

Megoldás:

(a) $\varphi(n) = 10^n - 1$ esetén $a_{\varphi(n)} = \dfrac{10^n - 1}{10^n} = 1 - 10^{-n} \to 1$ $\boxed{\textbf{2p.}}$

(b) Ilyen nincs, mert $a_n \geq 0.1$ minden n-re. $\boxed{\textbf{2p.}}$

(c) $\varphi(n) = 5 \cdot 10^{n-1}$ esetén $a_{\varphi(n)} = 0.5 \to 0.5$ $\boxed{\textbf{1p.}}$

(d) Mivel $0.1 \leq a_n \leq 1$ minden n-re, ezért $TP \subset [0.1, 1]$.

$A \in [0.1, 1[$ esetén legyen $\varphi(n) = \lfloor A \cdot 10^n \rfloor$. Ekkor $a_{\varphi(n)} \to A$.

(a) miatt $TP = [0.1, 1]$ $\boxed{\textbf{3p.}}$