KÓDOLÁSTECHNIKA PZH

2006. december 18.

1. Hibajavító kódolást tekintünk. Egy lineáris bináris blokk kód generátormátrixa

$$G = \begin{bmatrix} 10110 \\ 01101 \end{bmatrix}$$

a.) Adja meg a kód kódszavait és paramétereit (n, k,d). (3 p)
b.) Perfekt-e a kód? (4 p)
c.) Adja meg a szisztematikus paritásellenőrző mátrixát. (2 p)
d.) Adja meg a szindróma dekódolási táblázatát. (4 p)
e.) Adja meg a dekódolás lépéseit a táblázat használatával. Dekódolja az 11111 vett szót. (3p)
f.) Adjon felső becslést a dekódolási hibavalószínűséget emlékezetnélküli BSC(p) esetére!
(3 p, pontos érték 5 p)

2. Definiálja a következőket:
a.) minimális távolságú dekódolás (1p)
b.) perfekt tulajdonságú hibajavító kód (2 p)
c.) Reed Solomon kód generátorpolinomja (magyarázza el a jelöléseket) (3 p)
d.) szorzatkód, a kétdimenziós bináris paritáskód paraméterei (3 p)

3. RSA kódoló algoritmus esetén a kulcsok előállításához p=7, q=17 prímekből indultunk ki.
a.) Adja meg a lehető legkisebb kódoló kulcsként használható exponenst! (2p)
b.) Számítsa ki az x=11 nyílt szöveghez tartozó y rejtett szöveget! (2 p)
c.) Határozza meg a dekódoló kulcsot! (3p)
d.) Mi az ismételt négyzetre emelés és szorzás módszere? (2p)
e.) Mennyi moduláris szorzás és négyzetremelés szükséges esetünkben. (2p)

4.) Tömören, formálisan fejtse ki :
a.) ütközés-ellenálló hash függvény (2 p)
b.) kulcstanúsítvány lánc (kis példán elmagyarázva) (3 p)
c.) üzenet integritásvédelem célja (CBC-MAC példáján elmagyarázva) (3 p)

5. a.) Legyen X valószínűségi kimenetelei (x_1, x_2, x_3, x_4, x_5), eloszlása (1/3, 1/4, 1/6, 1/6, 1/12). Konstruáljon Huffman kódot ehhez az eloszláshoz. (5 p)
b.) Adja meg a kódszóhossz várható értékét (2p)

6. Tömören, formálisan fejtse ki:
a.) Prefix kód fogalma. Adjon 4 kódszóból álló prefix kódot. (2 p)
b.) Optimális prefix kódok tulajdonságai (3 p)
c.) DPCM kódolás (blokkséma a jelölések magyarázatával) (3 p)

Pontozás: 1: <=21 2:22- 33 3: 32 - 41 4: 42- 51 5: 52– 62

Kódolástechnika PZH eredmények

2006. december 18.

(Ügyeljen a pontos fogalomhasználatra, pontos, formális definíciókra, részletes indoklásokra!)

Név: .....

Neptun kód:
.....

1.

a.) (3p) kódszavak:
n= , k= ,d=

b.) (4p) igen nem indoklás:

c.) (2p) H =

d.) (4p) szindróma dekódolási táblázat (T):

e.) (3p) dekódolás lépései.

11111 dekódolása:

f.) (3/5p) Pe

2. a. b. c. d. (karikázza be, amire válaszolt)

3.
a.) (2p) e=

b.) (2p) y=

c.) (3p) d=

d.) (2p) módszer:

e.) (3p) szorzás db: négyzetremlés db: indoklás:

4. a. b. c. (karikázza be, amire válaszolt)

5. (8p) a.) kódszavak: (x_1: x_2: x_3: x_4: x_5:)
(2p) várható kódszóhossz=

6. a. b. c. (karikázza be, amire válaszolt)

Kódolástechnika PZH megoldások

2006. december 18.

1.

a.) (3p) kódszavak: 00000, 10110, 01101, 11011 n= 5 , k= 2 ,d= 3

b.) (4p) igen nem indoklás: $1+5 < 2^3 = 8$

c.) (2p) $H = \begin{matrix} 11100 \\ 10010 \\ 01001 \end{matrix}$

d.) (4p) szindróma dekódolási táblázat (T):

szindróma	**hibavektor**
000	00000
001	00001
011	00011
100	00100
101	01000
110	10000
111	10001

e.) (3p) dekódolás lépései. $s=Hv^T$, $e'=T(s)$, $c'=v-e'$
11111 dekódolása: $s^T=(100)$, $00100=T(100)$, $11011=11111-00100$

f.) (3/5p) $P_e < 1-((1-p)^5 + 5p(1-p)^4)$, $P_e = 1-((1-p)^5 + 5p(1-p)^4 + 2p^2(1-p)^3)$

3. p=7, q=17
$m = p*q = 7*17 = 119$
$fi(m) = (p-1)*(q-1) = 6*16 = 96$

a.) Az exponenssel kapcsolatos feltétel, hogy relatív prím legyen fi(m)-hez. A legkisebb ilyen szám a 5.
Tehát **e = 5**.

b.) $y = x^e \pmod m$
$11^5 = 161051 = 44 \pmod{119}$
Tehát **y = 44**.

c.) A dekódoló kulcs a kódoló kulcs multiplikatív inverze a modulo fi(m)
$96=19*5+1$, $d= -19 = 77 \pmod{96}$
Tehát **d = 77**.

d.) $x = y^{77} \pmod{119}$, $77= 2^6 + 2^3 + 2^2 + 1$, 3 szorzás, 6 négyzetremelés (összesen 9 szorzás)

5. (8p) két megoldás
a.) kódszavak: (11, 10 , 01, 001, 000), (11, 01, 00, 101, 100),
(2p) várható kódszóhossz= 27/12= 2.25 bit

2. Definiálja a következőket:

a.) minimális távolságú dekódolás (1p)

A vett szót a Hamming távolságra legközelebbi kódszóra dekódoljuk.

b.) perfekt tulajdonságú hibajavító kód (2 p)
Abban az esetben, ha a gömbi dekódolási tartományokkal hézagmentesen le tudjuk fedni a szavak terét perfekt kódról beszelünk.
Bináris egy hibát javító C(n,k,3) perfekt kód esetén: $1+n=2^{n-k}$.

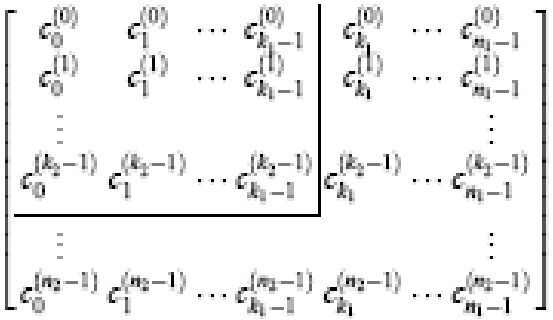
Bináris t hibát javító perfekt kód esetén: $1+n+\binom{n}{2}+\ldots+\binom{n}{t}=2^{n-k}$.

c.) Reed Solomon kód generátorpolinomja (magyarázza el a jelöléseket) (3 p)
Tekintsünk egy GF(q) véges testet, s egy n-edrendű α elemet. C(n, k, d=n-k+1) Reed Solomon kód generátorpolinomja:

2.20. tétel. *A Reed–Solomon-kódok esetén legyen az n kódszóhossz egyenlő az ott szereplő α elem m rendjével. Ekkor a kód ciklikus, és generátorpolinomja*

$$g(x)=\prod_{i=1}^{n-k}(x-\alpha^i),$$

d.) szorzatkód, a kétdimenziós bináris paritáskód paraméterei



2.3. ábra. A szorzat-kódszó képzése

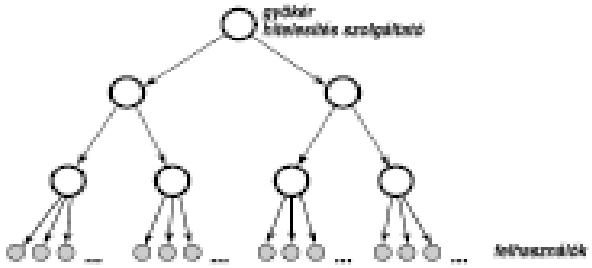
Egy $C_1(n_1,k_1,d_1)$ és egy $C_2(n_2,k_2,d_2)$ lineáris kód (komponenskódok) felhasználásával $C_1\times C_2(n_1\cdot n_2,k_1\cdot k_2,d_1\cdot d_2)$ szorzatkódot készíthetünk, amelynek kódszavai $n_1\times n_2$ dimenziós mátrixok, ahol a mátrix sorai C_1 kódbeli, oszlopai C_2 kódbeli kódszavak. Szisztematikus komponenskódok esetén a szorzatkódbeli mátrix-kódszó bal felső $k_1\times k_2$ dimenziós minorja tartalmazza az üzenetet. A mátrix-kódszavakat soronként kiolvasva kapjuk a szorzatkód — soros — kódszavát. A kapott $C_1\times C_2(n_1\cdot n_2,k_1\cdot k_2)$ kód lineáris.

kétdimenziós bináris paritáskód paraméterei: $n=(k_1+1)*(k_2+1)$, $k=k_1*k_2$, $d=4$

4.) Tömören, formálisan fejtse ki :

a.) ütközés-ellenálló hash függvény (2 p)
Nehéz két olyan elemet olyan ősképtérbeli elemet találni, amelynek hash értéke azonos.
Iterációs hash függvények esetén, ha az iterációs (kompressziós) függvény ütközésellenálló és MD padding-et alkalmazunk, a hash függvény is ütközésellenálló lesz.
Pl. Digitális aláírás csalást hajthatna végre az aláíró, ha nem lenne ütközésellenálló a hash függvény.

b.) kulcstanúsítvány lánc (kis példán elmagyarázva) (3 p)



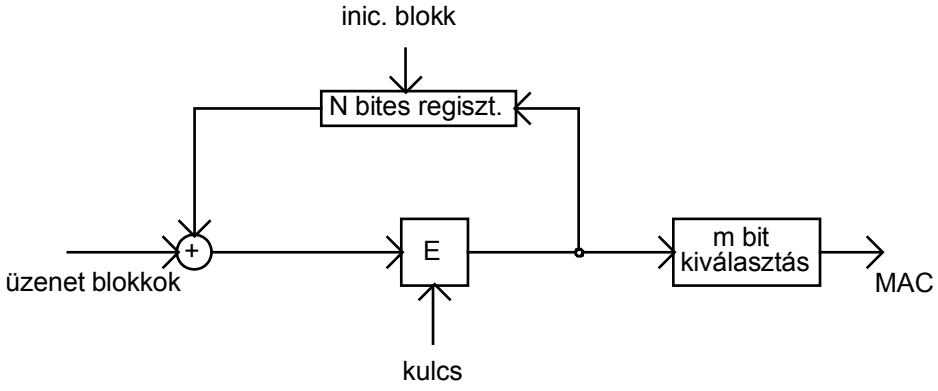
8.1.. ábra. Hitelesítés szolgáltatók tiszta hierarchikus szervezõdésének illusztrációja. Minden nyíl egy kibocsájtott tanúsítványt reprezentál, ahol a nyíl iránya a kibocsájtás irányára utal.

Csakúgy mint az egyetlen hitelesítõ szolgáltatót tartalmazó rendszerben, itt is feltesszük, hogy minden felhasználó ismeri a gyökér szolgáltató hiteles nyilvános kulcsát. Ez azonban még nem elég egy adott felhasználó tanúsítványának ellenõrzéséhez, hiszen a felhasználók tanúsítványait nem a gyökér szolgáltató írja alá. Amire szükség van az egy *tanúsítvány lánc*, mely a következõ tulajdonságokkal rendelkezik:

- A lánc elsõ eleme egy olyan tanúsítvány, amit a gyökér szolgáltató adott ki, és így a benne található nyilvános kulcs hitelessége bárki által ellenõrizhetõ.
- A lánc minden további tanúsítványára igaz, hogy ellenõrizhetõ a láncban õt közvetlenül megelõzõ tanúsítványban található nyilvános kulccsal.
- A lánc utolsó tanúsítványa tartalmazza a kérdéses, hitelesíteni kívánt felhasználói nyilvános kulcsot.

Könnyen látható, hogy egy ilyen tanúsítvány lánc birtokában és a gyökér szolgáltató nyilvános kulcsának ismeretében bármely felhasználó bármely másik felhasználó tanúsítványát ellenõrizni tudja. Ehhez a lánc tanúsítványait kell sorrendben ellenõrizni.

c.) üzenet integritásvédelem célja (CBC-MAC példáján elmagyarázva) (3 p)
$[x_1, ..., x_n, MAC(x_1,...,x_n)]$



MAC generálás

Formálisan MAC = $g(y_n)$, ahol y_n az $y_i=E_k(x_i \oplus y_{i-1})$, i=1,...,n rekurzió n-edik lépésbeli eredménye, továbbá y_0 = I (inicializáló. blokk). A g függvény y_n N bitjébõl valamely m bitet választja ki, s az eredmény a kriptográfiai ellenõrzõ összeg.

6. Tömören, formálisan fejtse ki:
a.) Prefix kód fogalma. Adjon 4 kódszóból álló prefix kódot. (2 p)

4.2. definíció. *Az f kód prefix, ha a lehetséges kódszavak közül egyik sem folytatása a másiknak, vagyis bármely kódszó végéből bármekkora szegmenst levágva nem kapunk egy másik kódszót.*

Pl. {01, 10, 11, 001}

b.) Optimális prefix kódok tulajdonságai (3 p)

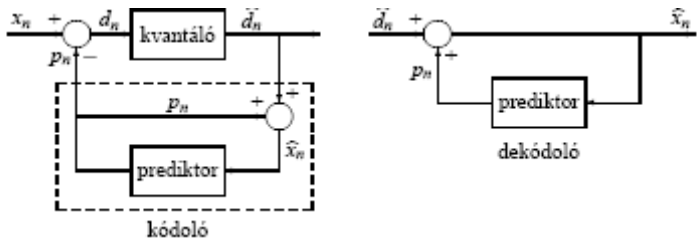
4.4. tétel. *Ha az $f: \mathcal{X} \to \{0,1\}^*$ prefix kód optimális, és $\mathcal{X}$ elemei úgy vannak indexelve, hogy $p(x_1) \geq p(x_2) \geq \cdots \geq p(x_{n-1}) \geq p(x_n) > 0$, akkor feltehető, hogy f-re a következő három tulajdonság teljesül:*

a) $|f(x_1)| \leq |f(x_2)| \leq \cdots \leq |f(x_{n-1})| \leq |f(x_n)|$, *vagyis nagyobb valószínűségekhez kisebb kódszóhosszak tartoznak.*

b) $|f(x_{n-1})| = |f(x_n)|$, *vagyis a két legkisebb valószínűségű forrásbetűhöz tartozó kódszó egyenlő hosszú.*

c) *Az $f(x_{n-1})$ és az $f(x_n)$ kódszavak csak az utolsó bitben különböznek.*

c.) DPCM kódolás (blokkséma a jelölések magyarázatával) (3 p)



5.9. ábra. DPCM

Ezt felhasználva az előző lépéseink így módosulnak:

$$
\begin{aligned}
d_1 &= x_1 - x_0 \\
\hat{d}_1 &= Q(d_1) = d_1 + q_1 \\
\hat{x}_1 &= \hat{x}_0 + \hat{d}_1 = x_0 + d_1 + q_1 = x_1 + q_1 \\
d_2 &= x_2 - \hat{x}_1 \\
\hat{d}_2 &= Q(d_2) = d_2 + q_2 \\
\hat{x}_2 &= \hat{x}_1 + \hat{d}_2 = \hat{x}_1 + d_2 + q_2 = x_2 + q_2.
\end{aligned}
$$

Általánosítva:

$$\hat{x}_n = x_n + q_n,$$

tehát a kvantálási hiba nem akkumulálódik.