Jelek és jelfeldolgozás (BMEVIHVBB01)
3-4. gyakorlat

Szerkesztette: Dr. Horváth Bálint Péter, BME-HVT

2022.03.11.

Összefoglalás

Folytonos idejű rendszerekben az gerjesztés-válasz (GV) stabilitásának kritériuma:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt < \infty$$

Egy FI rendszer válasza meghatározható, ha imerjük impulzusválaszát $h(t)-t$ konvolúció révén:

$$y(t) = h(t) * u(t) = \int_{-\infty}^{\infty} h(t-\tau) \cdot u(\tau)\, d\tau$$

1. FI rendszerek GV stabilitása

1.1. Feladat

Egy FI rendszer impulzusválasza $h(t) = \delta(t) + \varepsilon(t)e^{-0,5t}$. GV stabilis-e a rendszer?

Megoldás

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt &= \int_{-\infty}^{\infty} |\delta(t) + \varepsilon(t)e^{-0,5t}|\, dt \le \int_{-\infty}^{\infty} |\delta(t)|\, dt + \int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon(t)e^{-0,5t}|\, dt = \\
1 + \int_{0}^{\infty} |e^{-0,5t}|\, dt &= 1 + \int_{0}^{\infty} e^{-0,5t}\, dt = 1 + \int_{0}^{\infty} e^{-0,5t}\, dt \\
&= 1 + \left[\frac{e^{-0,5t}}{-0,5}\right]_0^{\infty} = 1 - \frac{1}{0,5}[0-1] = \underline{\underline{3}} < \infty,
\end{aligned}$$

tehát GV stabilis a rendszer.

1.2. Feladat

Egy FI rendszer impulzusválasza $h(t) = \varepsilon(t)\cos(3t)e^{-0,5t}$. GV stabilis-e a rendszer?

Megoldás

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\, dt &= \int_{-\infty}^{\infty} \left|\varepsilon(t)\cos(3t)e^{-0,5t}\right|\, dt \le \int_{0}^{\infty} \left|\cos(3t)e^{-0,5t}\right|\, dt = \\
\int_{0}^{\infty} |\cos(3t)|\, e^{-0,5t}\, dt &\le \int_{0}^{\infty} 1e^{-0,5t}\, dt = \left[\frac{e^{-0,5t}}{-0,5}\right]_0^{\infty} = -\frac{1}{0,5}[0-1] = \underline{\underline{2}} < \infty,
\end{aligned}$$

tehát GV stabilis a rendszer.

1.3. Feladat

Egy FI rendszer impulzusválasza $h(t) = \delta(t) + \varepsilon(t)e^{2t}$. GV stabilis-e a rendszer?

Megoldás

$$\begin{aligned}
\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|\,dt &= \int_{-\infty}^{\infty} |\delta(t) + \varepsilon(t)e^{2t}|\,dt \leq \int_{-\infty}^{\infty} |\delta(t)|\,dt + \int_{-\infty}^{\infty} |\varepsilon(t)e^{2t}|\,dt = \\
1 + \int_{0}^{\infty} |e^{2t}|\,dt &= 1 + \int_{0}^{\infty} e^{2t}\,dt = 1 + \int_{0}^{\infty} e^{2t}\,dt \\
&= 1 + \left[\frac{e^{2t}}{2}\right]_0^{\infty} = 1 + \frac{1}{2}[\infty - 1] \sim \infty,
\end{aligned}$$

tehát NEM GV stabilis a rendszer.

1.4. Rendszerek tulajdonságai

Adott az alábbi rendszerek explicit gerjesztés-válasz kapcsolata:

a) $y(t) = e^{2t}u(t)$

b) $y(t) = 5\,[u(t)]^2$

c) $y(t) = 5u(t + 0,4)$

Jellemezzük a rendszerek, linearitás, invariancia és kauzalitás szempontjából.

Megoldás

a) lineáris, variáns, kauzális

b) nemlineáris, invariáns, kauzális

c) lineáris, invariáns, nem kauzális (akauzális)

1.5. Feladat

Egy FI rendszer ugrásválasza $g(t) = \varepsilon(t)\frac{A}{\alpha}[1 - e^{-\alpha t}]$. Adja meg a rendszer impulzusválaszát.

Megoldás Általánosított derivált segítségével

$$h(t) = g'(t) = ... = \varepsilon(t)Ae^{-\alpha t}$$

1.6. Feladat

Egy FI rendszer impulzusválasza $h(t) = \varepsilon(t)3e^{-2t}$. Adja meg a rendszer ugrásválaszát.

Megoldás Kauzális LTI rendszerek esetén

$$g(t) = \int_0^t h(t)\,dt = \int_0^t 3e^{-2t}\,dt = 3\left[\frac{e^{-2t}}{-2}\right]_0^t = -\frac{3}{2}\left[e^{-2t} - 1\right]\varepsilon(t)$$

Vessük össze az előző feladattal, ha $A = 3, \alpha = 2$

2. FI rendszerek válaszának számítása konvolúcióval

Egy FI rendszer impulzusválasza $h(t) = \varepsilon(t)\,(8e^{-0,5t} - 4e^{-0,1t})$. Adja meg a rendszer válaszát a következő gerjesztésekre:

a) $u(t) = \varepsilon(t)$

b) $u(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon(t-2)$

a) Megoldás

$$
\begin{aligned}
y_a(t) = \int_{-\infty}^{\infty} u(\tau)h(t-\tau)\,d\tau = \int_{-\infty}^{\infty} \varepsilon(\tau)\varepsilon(t-\tau)\left(8e^{-0,5(t-\tau)} - 4e^{-0,1(t-\tau)}\right)\,d\tau = \\
\int_0^t 8e^{-0,5(t-\tau)} - 4e^{-0,1(t-\tau)}\,d\tau = \int_0^t 8e^{-0,5(t-\tau)}\,d\tau - \int_0^t 4e^{-0,1(t-\tau)}\,d\tau = \\
8e^{-0,5t}\int_0^t e^{-0,5\tau}\,d\tau - 4e^{-0,1t}\int_0^{-0,1t} e^{\tau}\,d\tau = 8e^{-0,5t}\left[\frac{e^{-0,5\tau}}{-0,5}\right]_0^t - 4e^{-0,1t}\left[\frac{e^{-0,1\tau}}{-0,1}\right]_0^t d\tau = \\
-\frac{8}{0,5}e^{-0,5t}\left[e^{-0,5t} - 1\right] + \frac{4}{0,1}e^{-0,1t}\left[e^{-0,1t} - 1\right]\,d\tau = -16 + 16e^{-0,5t} - 40 + 40e^{-0,1t} = \\
\underline{\underline{\left(24 + 16e^{-0,5t} + 40e^{-0,1t}\right)\varepsilon(t)}}
\end{aligned}
$$

b) Megoldás Mivel a rendszer lineáris és invariáns, ezért a válasz kifejezhető az előző alfeladat válaszának és annak eltolt változatával

$$
y_b(t) = y_a(t) - y_a(t-2) = \underline{\underline{\left(24 + 16e^{-0,5t} + 40e^{-0,1t}\right)\varepsilon(t) - \left(24 + 16e^{-0,5(t-2)} + 40e^{-0,1(t-2)}\right)\varepsilon(t-2)}}
$$