

1. feladat (6+7=13 pont)

Adja meg a következő komplex mennyiségeket exponenciális alakban!

$$a) \quad 1 - \sqrt{3}i, \qquad b) \quad \frac{i}{2 + 2i}.$$

2. feladat (12 pont)

Írja föl a komplex síkon annak a szabályos háromszögnek a csúcsait algebrai alakban, amelynek középpontja az origó, és egyik csúcsa a $z_1 = 2 - i$ pont!

3. feladat (5+8=13 pont)

a) Mikor mondjuk, hogy $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \in \mathbb{R}$? (Írja le a definíciót!)

b) A definícióval igazolja, hogy

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{5n^6 + n}{n^6 - 200} = 5.$$

4. feladat (7+7+7+9=30 pont)

Határozza meg a következő sorozatok határértékét!

$$\begin{aligned} a) \quad a_n &= \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2n + 5} - \sqrt{n^2 + 1}}, & b) \quad b_n &= \frac{n^4 + 3^{2n+3}}{10^n + n^3}, \\ c) \quad c_n &= \left(\frac{3n+2}{3+3n} \right)^n, & d) \quad d_n &= \sqrt[n]{\frac{3^n + n^3}{3n^3 + 1}}. \end{aligned}$$

5. feladat (6+6+6=18 pont)

$$a_1 = 4, \qquad a_{n+1} = \frac{21}{10 - a_n}.$$

a) Igazolja, hogy $\forall n \in \mathbb{N}$ esetén $3 < a_n < 7$!

b) Igazolja, hogy az a_n sorozat monoton csökken!

c) Határozza meg az a_n sorozat határértékét!

6. feladat (14 pont)

Határozza meg a következő sorozat limesz superiorját, limesz inferiorját valamint limeszét, ha létezik!

$$a_n = \frac{3^{n+2}}{(-4)^n + 2^{2n} + 3^n}$$

IMSC feladat (8 IMSC pont)

Minden $n \in \mathbb{N}$ esetén definiáljuk az a_n értékét úgy, hogy az n index tizes számrendszerben felírt alakja elé teszünk egy tizedesvesszőt, az elé pedig egy nulla számjegyet, és az így kapott számot a tizes számrendszerben értelmezzük. Tehát például $a_{4523} = 0,4523$ és $a_{100} = 0,100$. Mik az a_n sorozat torlódási pontjai?