Rendszerelmélet első zárthelyi

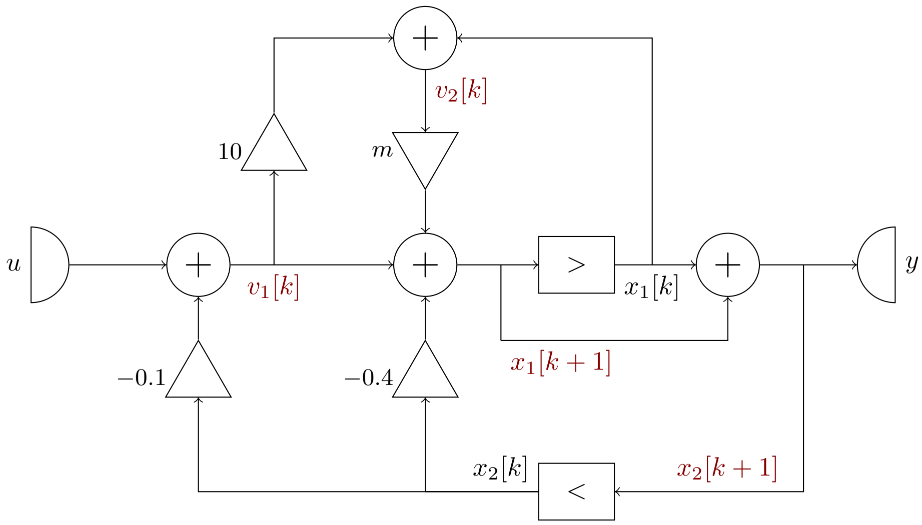
2018 ősz

Javítókulcs	1. feladat:	**20**
	2. feladat:	**20**
	3. feladat:	**10**
	Összesen:	**50**

- *Ha a hallgató által adott megoldás elvi hibás, akkor a feladatrészre nulla pont adható.*
- *Ha a hallgató a feladatrészt elszámolta, de a megoldás menete helyes, akkor a pontszám 50%-60%-a megadható belátás szerint.*

1. feladat (20 pont)

Egy DI LTI rendszer jelfolyam hálózatával adott.



a) Adja meg a rendszer állapotváltozós egyenleteit!

$$\begin{aligned} v_1[k] &= -0.1x_2[k] + u[k] \\ v_2[k] &= x_1[k] + 10v_1[k] \\ x_1[k+1] &= -0.4x_2[k] + v_1[k] + mv_2[k] \\ x_2[k+1] &= x_1[k] + x_1[k+1] \\ y[k] &= x_2[k+1] \end{aligned}$$

A hálózatból helyesen felírt egyenletekért összesen 1 pont adható.

$$\begin{aligned} x_1[k+1] &= mx_1[k] - (m+0.5)\,x_2[k] + (10m+1)\,u[k] \\ x_2[k+1] &= (m+1)\,x_1[k] - (m+0.5)\,x_2[k] + (10m+1)\,u[k] \\ y[k] &= (m+1)\,x_1[k] - (m+0.5)\,x_2[k] + (10m+1)\,u[k] \end{aligned}$$

A megfelelő A, B, C, D együtthatókra 1-1 pont adható.

b) Adja meg, hogy mely m értéktartományra lesz a rendszer aszimptotikusan stabil! *(5 pont)*

A karakterisztikus-polinom az alábbi módon alakul (2 pont):

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 + 0.5\lambda + 0.5 + m$$

Alkalmazva a Jury-kritériumot:

$$0.5 + m < 1 \qquad |0.5| < 1.5 + m$$

A helyes alkalmazásra 1 pont adható.

$$-1 < m < 0.5$$

A két határra 1-1 pont adható

Ha az egyenlőséget is megengedi, akkor a megoldás elvi hibás.

A továbbiakban tételezzük fel, hogy a rendszer állapotváltozós leírása a következő!

$$\begin{aligned} x_1[k+1] &= 0.6x_1[k] - 0.2x_2[k] + 2u[k] \\ x_2[k+1] &= -0.4x_1[k] + 0.4x_2[k] \\ y[k] &= 2x_2[k] - u[k] \end{aligned}$$

c) Vizsgálja meg a rendszer stabilitását! *(2 pont)*

A rendszer karakterisztikus-polinomja az alábbi:

$$\varphi(\lambda) = \lambda^2 - \lambda + 0.16$$

A rendszer sajátértékei az alábbinak adódnak:

$$\lambda_1 = 0.8 \qquad \lambda_2 = 0.2$$

Mivel $\forall|\lambda_{1,2}| < 1$, *ezért a rendszer aszimptotikusan stabil, így gerjesztés-válasz stabil is.*

A két stabilitás 1-1 pont.

d) Adja meg a rendszer impulzusválaszának formuláját! *(3 pont)*

A sajátértékekhez tartozó Lagrange-mátrixok:

$$L_1 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \qquad L_2 = \frac{1}{3}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$$

Az egyes sajátértékekhez tartozó konstansok:

$$h_1 = -\frac{8}{3} \qquad h_2 = \frac{8}{3}$$

A helyes konstansokért összesen 1 pont adható.

Az impulzusválasz zárt alakja:

$$h[k] = \left(-\frac{8}{3}(0.8)^{k-1} + \frac{8}{3}(0.2)^{k-1}\right)\varepsilon[k-1] - \delta[k]$$

A helyes impulzusválaszért 2 pont adható (tetszőlegesen bontható).

A nem belépő impulzusválasz elvi hiba.

e) A rendszer bemeneti jele $u[k] = 5\varepsilon[k]0.5^k$. Számítsa ki a rendszer válaszjelét! *(5 pont)*

A válasz a konvolúció műveletével számítható. (1 pont)

$$y[k] = -\frac{400}{9}(0.8)^k\,\varepsilon[k] - \frac{200}{9}(0.2)^k\,\varepsilon[k] + \frac{645}{9}(0.5)^k\,\varepsilon[k]$$

Helyesen felírt konvolúcióra 1 pont adható.

Helyesen elvégzett konvolúcióra 2 pont adható.

Helyes végeredményre 1 pont adható.

Ha nem csak a (megfelelő) három exponenciális tag szerepel, akkor a megoldás elvi hibás.

Ha a válasz nem belépő, akkor a megoldás elvi hibás.

2. feladat (20 pont)

Egy folytonos idejű, időinvariáns rendszer ugrásválasza $g(t) = \varepsilon(t-1)\left(5 - 3e^{-2t}\right)$.

a) Számítsa ki a rendszer impulzusválaszát! *(4 pont)*

Az impulzusválasz, az ugrásválasz idő szerinti deriváltjaként adódik. (1 pont)

$$h(t) = \dot{g}(t) = 6e^{-2t}\varepsilon(t-1) + \left(5 - 3e^{-2}\right)\delta(t-1)$$
$$h(t) \approx 6e^{-2t}\varepsilon(t-1) + 4.59\delta(t-1)$$

A helyes impulzusválaszra 3 pont adható (tetszés szerint bontható).

b) Számítsa ki a rendszer válaszát $u(t) = 2\delta(t) - 3\varepsilon(t-1)$ gerjesztésre! *(4 pont)*

$$y(t) = 2h(t) - 3g(t-1)$$

A 4 pont tetszés szerint bontható. Természetesen konvolúcióval is tökéletes a megoldás.

Ha indokolatlan tagok is megjelennek, akkor a megoldás elvi hibás.

A továbbiakban tételezzük fel, hogy a rendszer impulzusválasza $h(t) = 4\delta(t) - 2\varepsilon(t)e^{-5t}$!

c) Adja meg a rendszer válaszát az $u(t) = \varepsilon(t)e^{-5t}$ gerjesztésre! *(6 pont)*

A válasz konvolúcióval számítható. (1 pont)

$$y(t) = 2\,(2-t)\,e^{-5t}\varepsilon(t)$$

Helyesen felírt konvolúcióra 1 pont adható.

Helyesen elvégzett konvolúcióra 2 pont adható.

Helyes végeredményre 2 pont adható.

Ha nem jelenik meg a válaszban a rezonancia, akkor a megoldás elvi hibás.

Ha a válaszban oda nem illő tagok is megjelennek, akkor a megoldás elvi hibás.

Ha a válasz nem belépő, akkor a megoldás elvi hibás.

d) Adja meg a rendszer válaszát $u(t) = 5$ gerjesztésre! *(6 pont)*

A válasz konvolúcióval számítható. (1 pont)

$$y(t) = 18$$

Helyesen felírt konvolúcióra 1 pont adható.

Helyesen elvégzett konvolúcióra 2 pont adható.

Helyes végeredményre 2 pont adható.

Ha a válaszban oda nem illő tagok is megjelennek, akkor a megoldás elvi hibás.

Ha a válasz belépő, akkor a megoldás elvi hibás.

3. feladat (10 pont)

Minden válaszra 0,1 vagy 2 pont adható!

a) Mit állíthat egy GV stabilis DI rendszernek a válaszjeléről, ha $u[k]$ bemeneti jelének abszolút értéke minden k-ra kisebb 2-nél? Indokolja válaszát!

A GV stabil rendszer korlátos gerjesztésre korlátos választ ad. Mivel a gerjesztés korlátos, a válasz is az.

(2 pont)

b) Egy DI rendszer impulzusválasza $h[k] = A\delta[k-1] + B\varepsilon[k+2] + C\varepsilon[k-2]1.2^k$. Az A, B, C paraméterek mely értékeire lesz a rendszer kauzális, illetve mely értékeire GV stabil?

$B = 0$ *mellett a rendszer kauzális. (1 pont)*

$B = 0$ *és* $C = 0$ *mellett a rendszer GV stabil. (1 pont)*

c) Egy lineáris, invariáns DI rendszer ugrásválasza $g[k]$. Adja meg a rendszer válaszjelét $u[k] = 3\delta[k-1] + 5\varepsilon[k-2]$ bemeneti jelre!

$y[k] = 3g[k-1] + 2g[k-2]$ *(2 pont)*

d) Egy DI rendszer impulzusválasza $h[k] = \varepsilon[k-1]0.8^k$, gerjesztő jele $u[k] = 5$. Adja meg a válasz értékét $k = -1$, 0 és +1 ütemekben!

A gerjesztés nem belépő, így a válasz a $k = -1, 0, 1$ *ütemekre állandósul. (1 pont)*

$y[-1] = y[0] = y[1] = 20$ *(1 pont)*

e) Egy FI rendszer impulzusválasza: $h(t) = \delta(t) - \delta(t-2)$, gerjesztő jele $u(t) = \varepsilon(t)e^{-2t}$. Adja meg a rendszer válaszjelét!

$y(t) = \varepsilon(t)e^{-2t} - \varepsilon(t-2)e^{-2(t-2)}$ *(2 pont)*