MÓDOSÍTÁS:

A 3* feladatban a forgástest térfogatát akartuk megkérdezni 10 pontért. A feladatsorba a felszín került, ami nehezebb, ezért a következőképpen módosítottuk a pontozást:

1.* feladat: 24 pont helyett $4 \cdot 7 = 28$ pont

3.* feladat: 10 pont helyett 6 pont a képlet helyes felírására és a behelyettesítésre.

További helyes lépésekért plusz pontot adtunk.

INFO AN1. VIZSGA (3) 2018.01.10. – 1 –

α VARIÁNS

1* a) [7]

$$\int \cos^3 x\,dx = \int \cos x\,(1-\sin^2 x)\,dx = \underline{\underline{\sin x - \frac{\sin^3 x}{3} + C}} \quad (2)\ (2)\ (3)$$

b) [7]

$$x^2-2x-3 = (x-3)(x+1);$$

$$\frac{1}{x^2-2x-3} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x+1} \;(2) \Rightarrow 1 = A(x+1) + B(x-3)$$

$$\left.\begin{array}{l} x=-1: \quad 1=-4B \Rightarrow B=-\frac{1}{4} \\ x=+3: \quad 1=4A \Rightarrow A=\frac{1}{4} \end{array}\right\} (3)$$

$$\int \frac{1}{x^2-2x-3}\,dx = \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x-3} - \frac{1}{4}\int\frac{dx}{x+1} = \underline{\underline{\frac{1}{4}\ln|x-3| - \frac{1}{4}\ln|x+1| + C}} \quad (2)$$

c) [7]

$$x^2-2x+3 = (x-1)^2+2$$

$$\int \frac{1}{(x-1)^2+2}\,dx = \frac{1}{2}\int\frac{1}{1+\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)^2}\,dx \;(4) = \underline{\underline{\frac{1}{2}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x-1}{\sqrt{2}}\right)\cdot\sqrt{2} + C}} \quad (3)$$

d) [7]

$$\int \arcsin x\,dx = \int \underset{u'}{1}\cdot\underset{v}{\arcsin x}\,dx = x\arcsin x - \int\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}\,dx \;(4) =$$

$$u = x \qquad v' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad f'\cdot f^{-1/2} \text{ alak}$$

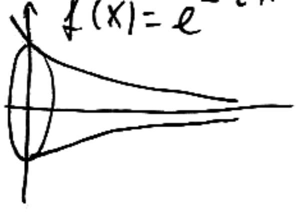
$$= x\arcsin x + \frac{1}{2}\int(-2x)(1-x^2)^{-1/2}\,dx = \underline{\underline{x\arcsin x + \cancel{\tfrac{1}{2}}\cdot\cancel{2}\cdot\sqrt{1-x^2} + C}} \quad (3)$$

2* [6] D: $f\in R[a,b]$; $x\in[a,b]$. f integrálfüggvénye: $F(x)=\int_{t=a}^{x} f(t)\,dt$ (3)

T: Ha f folytonos x_0-ban, akkor $\exists F'(x_0) = f(x_0)$ (3)

(vagy ha f folyt. (a,b)-n, akkor $\forall x\in(a,b)$: $\exists F'(x) = f(x)$)

3* [6] $f(x) = e^{-2x}$



$$A = 2\pi\int_0^\infty f(x)\cdot\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx = \quad (3)$$

$$= 2\pi\int_0^\infty e^{-2x}\sqrt{1+4e^{-4x}}\,dx \quad (3)$$

$f'(x) = -2e^{-2x}$ A további helyes lépésekért extra pont jár.

KIEGÉSZÍTÉS; a felszín kiszámolása extra pontért:

$$A = 2\pi \int_0^{\infty} f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\,dx$$

$$I = \int e^{-2x}\sqrt{1+(-2)^2\cdot\left(e^{-2x}\right)^2}\,dx = \int e^{-2}\sqrt{1+4e^{-4x}}\,dx \Rightarrow$$

$$\operatorname{sh} y = 2e^{-2x}\ ; \quad \operatorname{ch} y\,dy = -4e^{-2x}\,dx$$

$$\Rightarrow \int \operatorname{ch} y\cdot\left(\frac{-1}{4}\right)\operatorname{ch} y\,dy = \frac{-1}{4}\int \operatorname{ch}^2 y\,dy \overset{③}{=} \frac{-1}{4}\int \frac{1+\operatorname{ch}(2y)}{2}\,dy =$$

$$= \frac{-1}{8}\left(y + \frac{\operatorname{sh}(2y)}{2}\right) + C = \frac{-y}{8} - \frac{1}{8}\operatorname{sh} y\operatorname{ch} y + C$$

$$\Rightarrow I = -\frac{1}{8}\operatorname{arsh}\left(2e^{-2x}\right) - \frac{1}{8}\cdot 2e^{-2x}\sqrt{1+4e^{-4x}} + C$$

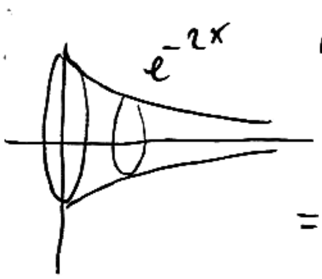
$$A = 2\pi \lim_{\omega\to\infty}\left[\frac{-\operatorname{arsh}\left(2e^{-2x}\right)}{8} - \frac{e^{-2x}\sqrt{1+4e^{-4x}}}{4}\right]_0^{\omega} =$$

$$= \lim_{\omega\to\infty}\Bigg(\underbrace{\frac{-\operatorname{arsh}\big(2\overset{\to 0}{e^{-2\omega}}\big)}{8}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{\overset{\to 0}{e^{-2\omega}}\overset{\to 1}{\sqrt{1+4e^{-4\omega}}}}{4}}_{\to 0} + \frac{\operatorname{arsh} 2}{8} + \frac{\sqrt{5}}{4}\Bigg)\cdot 2\pi$$

$$= \left(\frac{\operatorname{arsh} 2}{8} + \frac{\sqrt{5}}{4}\right)\cdot 2\pi$$

④

A térfogat kiszámolása:



$$A = \pi\int_0^{\infty} x^2 e^{-2x}\,dx = \pi\lim_{\omega\to\infty}\int_0^{\omega} \underset{u}{x^2}\,\underset{v'}{e^{-2x}}\,dx =$$

$$u' = 2x \quad v = \frac{-1}{2}e^{-2x}$$

$$= \pi\underbrace{\lim_{\omega\to\infty}\left[\frac{-x^2}{2}e^{-2x}\right]_0^{\omega}}_{0-0=0} + \pi\lim_{\omega\to\infty}\int_0^{\omega} x e^{-2x}\,dx =$$

$$= \pi\Bigg(\underbrace{\lim_{\omega\to\infty}\left[\frac{-x}{2}e^{-2x}\right]_0^{\omega}}_{0} + \frac{1}{2}\int_0^{\infty} e^{-2x}\,dx\Bigg) = \frac{\pi}{2}\lim_{\omega\to\infty}\left[\frac{-e^{-2x}}{2}\right]_0^{\omega} = \frac{\pi}{4}$$

4, $\boxed{12}$ $z^3 = \frac{-9+3i}{2+i} = \frac{(-9+3i)(2-i)}{2^2+1^2} = \frac{-18+3+i(6+9)}{5} = -3+3i = 3\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{3\pi}{4}}$ ③ ②

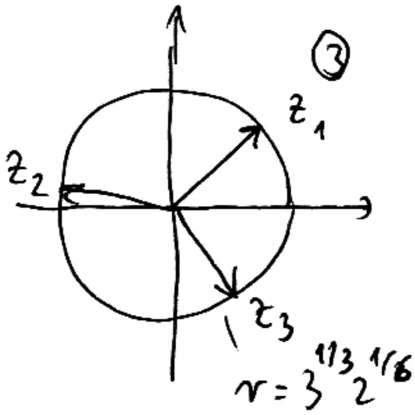
$$z_k = \sqrt[3]{3\sqrt{2}}\cdot e^{i\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}k\right)} \text{③} = 3^{1/3}2^{1/6}\left(\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}k\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{2\pi}{3}k\right)\right) \text{①}$$

$k=0,1,2$

$$z_1 = 3^{1/3}\cdot 2^{1/6}\, e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{3^{1/3}2^{1/6}}{2^{1/2}}(1+i) = \underline{\sqrt[3]{\frac{3}{2}}(1+i)}$$

$$z_2 = 3^{1/3}2^{1/6}\, e^{i\frac{11\pi}{12}} = \underline{3^{1/3}2^{1/6}\left(\cos\frac{11\pi}{12}+i\sin\frac{11\pi}{12}\right)}$$

$$z_3 = 3^{1/3}2^{1/6}\, e^{i\frac{19}{12}\pi} = \underline{3^{1/3}2^{1/6}\left(\cos\frac{19\pi}{12}+i\sin\frac{19\pi}{12}\right)}$$



5, T.: Ha f, g diff.-ható x-ben, akkor szorzatuk is, és $\boxed{4}$

$\boxed{4}$ $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$

B.: $\boxed{8}$

$$(fg)'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)g(x+h)-f(x)g(x)}{h} \text{②} =$$

$$= \lim_{h\to 0}\left(\underbrace{\frac{f(x+h)-f(x)}{h}}_{\to f'(x)\ \text{①}} \underbrace{g(x+h)}_{\to g(x)} + f(x)\underbrace{\frac{g(x+h)-g(x)}{h}}_{\to g'(x)\ \text{①}}\right) \text{③} = f'(x)g(x)+f(x)g'(x)$$

$g(x)$, mert g ① folytonos, mert diff.-ható

6, a, T.: Feltételek: $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ és valamely $\varepsilon>0$-ra $\exists f'(x)$, $\exists g'(x)\neq 0$ $\forall x\in \dot{K}_\varepsilon(x_0)$-ra.
Ekkor $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ $\boxed{4}$

(x_0 lehet $\pm\infty$, $x_0\pm 0$ is, és $\frac{0}{0}$ helyett lehet $\frac{\infty}{\infty}$ is.)

(3)

6, b, Ha $\lim\limits_{x\to 2-0} f(x)$ határérték nem létezik, azt az átviteli elvvel igazoljuk:

[8] $\frac{1}{x-2} = -k\pi \Rightarrow x_k = 2 - \frac{1}{k\pi}$ esetén $f(x_k) = 0$ $\quad (x_k \to 2$ balról$)$

$\frac{1}{x-2} = \frac{\pi}{2} - 2k\pi \Rightarrow x_k = 2 - \frac{1}{k\pi - \frac{\pi}{2}}$ esetén $f(x_k) = x_k \cdot 1 \to 2$ $\quad (x_k \to 2$ balról$)$

A két határérték nem egyezik meg. ✓ (5)

[8] $$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x-2}\right)}{(1/x)} \underset{\frac{0}{0}\text{ alak}}{\overset{L'H}{=}} \lim_{x\to\infty} \frac{\overbrace{\cos\left(\frac{1}{x-2}\right)}^{\to 1\ (1)} \cdot \frac{-1}{(x-2)^2}}{-1/x^2} \ (3) = \lim_{x\to\infty} \frac{x^2}{(x-2)^2} = \underline{1} \ (2)$$

(2)

— o —

7/ [16] $f(x) = (1+3x^2)^{-1/2}$; $D_f = \mathbb{R}$ (1); $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = 0$ (1); f páros fgv.

$$f'(x) = -\frac{1}{2}\cdot 6x \underbrace{(1+3x^2)^{-3/2}}_{>0} \quad (2)$$

x	$x<0$	0	$0<x$
f'	+	0	−
f	↗	lok. max	↘

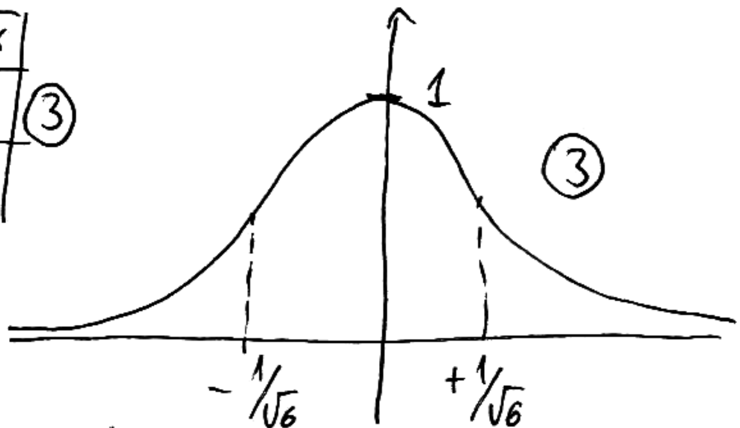
(2)

$$f''(x) = -3(1+3x^2)^{-3/2} - 3x\cdot\left(\frac{-3}{2}\right)\cdot 6x(1+3x^2)^{-5/2} =$$

$$= 3(1+3x^2)^{-5/2}(9x^2-1-3x^2) = 3\,\frac{6x^2-1}{(1+3x^2)^{5/2}} = 0, \text{ ha } x = \pm\frac{1}{\sqrt6} \quad (3)$$

x	$x<-\frac{1}{\sqrt6}$	$-1/\sqrt6$	$-1/\sqrt6<x<1/\sqrt6$	$1/\sqrt6$	$1/\sqrt6<x$
f''	+	0	−	0	+
f	∪	infl. pont	∩	infl. pont	∪

(3)



$R_f = (0, 1]$ (1)

— · —

IMSc [14] $f'(x) \to \infty$, tehát $\forall K>0$ esetén $\exists\, \Omega(K)>0$: $\forall x > \Omega(K)$ esetén $f'(x) > K$ (4). Így ha $x_1 > x_2 > \Omega(K)$, akkor

$$\frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2} \underset{\uparrow}{=} f'(\xi) > K \Rightarrow f(x_1)-f(x_2) > K(x_1-x_2)$$

Lagrange-tétel (6) És $K(x_1-x_2) > 1$, ha $K > \frac{1}{x_1-x_2}$ (4)

β variáns: (Csak végeredmények)

1* a, [7] $\int \sin^3 x \, dx = \int \sin x (1-\cos^2 x)\, dx = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x + c$ 2 2 3

[7] b, $\int \frac{1}{x^2+2x-3}\, dx = \int \left(\frac{A}{x+3} + \frac{B}{x-1} \right) dx = \frac{-1}{4}\int \frac{dx}{x+3} + \frac{1}{4}\int \frac{dx}{x-1} =$ 2 3

$= -\frac{1}{4}\ln|x+3| + \frac{1}{4}\ln|x-1| + c$ 2

[7] c, $\int \frac{1}{x^2+2x+3}\, dx = \frac{1}{2}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right)^2}\, dx = \frac{\sqrt{2}}{2}\, \operatorname{arctg}\left(\frac{x+1}{\sqrt{2}}\right) + c$ 4 3

[7] d, $\int \arccos x \, dx = x \arccos x - \int \frac{-x}{\sqrt{1-x^2}}\, dx = x \arccos x - \cancel{\frac{1}{2}} \cdot \cancel{2} \sqrt{1-x^2} + c$ 4 3

2* – mint α.

3* [6] $A = \pi \int_{-\infty}^{0} f(x)\sqrt{1+f'^2(x)}\, dx = \pi \lim_{\Omega \to -\infty} \int_{\Omega}^{0} e^{3x}\sqrt{1+9e^{6x}}\, dx = \ldots$ 3 3

4, Az egyenlet az α variánsban szereplő egyenlet konjugáltjának (−1)-szerese. A részeredmények és a megoldás az α variánsban szereplő értékek konjugálásával kaphatók meg.

5, – mint α. 6a, mint α,

6b, [8] $\lim_{x \to -3+0} \left(x \sin\left(\frac{1}{x+3}\right) \right)$ nem létezik 3, és az átviteli elvvel igazolható, az α változathoz hasonlóan 5

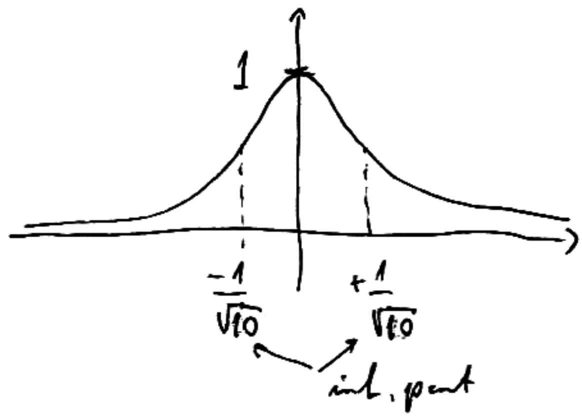
[8] $\lim_{x \to -\infty} \frac{\sin\left(\frac{1}{x+3}\right)}{(1/x)} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to -\infty} \frac{\overbrace{\cos\left(\frac{1}{x+3}\right)}^{\to 1} \frac{-1}{(x+3)^2}}{\left(\frac{-1}{x^2}\right)} = \lim_{x \to -\infty} \frac{x^2}{(x+3)^2} = 1$ [8]

7, [16] $f(x) = (1+5x^2)^{-1/2}$

$f'(x) = -5x(1+5x^2)^{-3/2}$

$f''(x) = -5(1+5x^2)^{-3/2} + 5 \cdot \frac{3}{2} \cdot 10x^2 (1+5x^2)^{-5/2} =$

$= 5(1+5x^2)^{-5/2}(10x^2-1)$



Részletek: mint α-ban.

IMSC: mint α-ban.