2022 dec 19 vizsga

2023. január 7., szombat 20:24

1) Karácsonyra gyümölcskenyeret sütök, egy szelet sütiben várhatóan 3 meggy lesz, és 5 mazsola. A kettő egymástól független, Poisson eloszlású. Mi a valószínűsége, hogy

a egy szelet sütiben lesz több, mint 5 meggy? (3p)

b két szelet sütiben lesz összesen több mint 4 gyümölcs? (3p)

c ha az előző szelet sütiben nem volt egy mazsola se, akkor a következőben se lesz? (3p)

$X \sim \text{Poisson}(3)$

a.) $P(X>5) = 1 - \sum_{k=0}^{5} e^{-3} \cdot \frac{3^k}{k!}$

b.) $Y \sim \text{Poisson}(3+5)$

$P(Y>4) = 1 - \sum_{k=0}^{4} e^{-2\cdot 8} \frac{(2\cdot 8)^k}{k!}$

c.) A két szelet független, tehát az a kérdés, hogy mi a valószínűsége, hogy egy szeletben nincs:

$Z \sim \text{Poisson}(5)$

$P(Z=0) = e^{-5} \cdot \frac{5^0}{0!}$

2) A boltban sorban állással eltöltött időm [egyenletes eloszlású a (0,1) intervallumon] órában. Kiállom a sort, hogy kristálycukrot vegyek, és már a távozásnál jut eszembe, hogy csirkemellet nem vettem, úgyhogy rögtön visszamegyek.

a Mi lesz így a sorban eltöltött összes várakozásomnak a sűrűségfüggvénye? (6p)

b Tegyük fel, hogy az összes hatósági áras termékért így megyek vissza, összesen 20-szor. Becsüld meg a valószínűségét, hogy ez az erősen szuboptimális vásárlás tovább tart mint 12 óra! (5p)

c Ha nyitásra ott vagyok, hányszor kell visszamennem, hogy 90%-os valószínűséggel ne férjek bele a 15 órás nyitvatartási időbe? (6p)

$\left.\right\}$ CHT

$n = ?$

a.) KONVOLÚCIÓ

$\boxed{X \sim \text{Uni}(0,1)}$ $Y \sim \text{Uni}(0,1)$

A két intervallum hossza egyforma így lesz

$0 < s = x+y < 2$

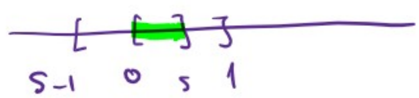
$f_{X+Y}(s) = \int f_1(x) \cdot f_2(s-x)\, dx$

$f_1(x) = 1$

$f_2(y) = 1$

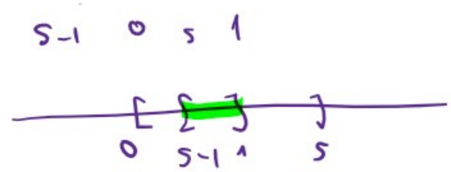
$0 < s-x < 1$

$s-1 < x < s$



$\int^{s} 1 \cdot 1\, dx = s$

$$\int_0^s 1\cdot 1\, dx = s$$



$$\int_{s-1}^{1} 1\cdot 1\, dx = 1-(s-1) = 2-s$$

$$f_{X+Y}(s) = \begin{cases} s & \text{ha } 0<s<1 \\ 2-s & \text{ha } 1<s<2 \\ 0 & \text{egyébként} \end{cases}$$

b.) CHT $\quad S_{20} \sim N\left(20\cdot\mu,\ \sqrt{20}\cdot\sigma\right) \qquad \mu = \frac{0+1}{2} \qquad \sigma = \frac{(1-0)^2}{\sqrt{12}}$

$$P(S_{20} > 12) = P\left(Z > \frac{12-\frac{20}{2}}{\frac{\sqrt{20}}{\sqrt{12}}}\right) = P\left(Z > \frac{2}{\sqrt{\frac{5}{3}}}\right) = 0{,}0606$$

c) $\Phi(x) = 1-\Phi(-x)$

$$\underbrace{0{,}9 = P(S_n > 15)}_{\Phi(1{,}28)} = 1 - \underbrace{P(S_n < 15)}_{0{,}1} \qquad \Phi(-1{,}28)$$

$$\left[\ E(X) = \frac{0+1}{2} = \underbrace{\frac{1}{2}}_{\mu} \qquad D(X) = \frac{1-0}{\sqrt{12}} = \underbrace{\frac{1}{\sqrt{12}}}_{\sigma}\ \right]$$

$$P\left(Z < \frac{15 - \overbrace{n\cdot\frac{1}{2}}^{n\cdot\mu}}{\underbrace{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{12}}}_{\sqrt{n}\cdot\sigma}}\right) = 0{,}1$$

STANDARDIZÁLT $-1{,}28 = \Phi^{-1}(0{,}1)$

$$Z = \frac{S_n - n\cdot\mu}{\sqrt{n}\cdot\sigma}$$

$$15 - \frac{n}{2} = -1{,}28\sqrt{\frac{n}{12}} \iff \frac{n}{2} - \frac{1{,}28}{\sqrt{12}}\cdot\sqrt{n} - 15$$

$\sqrt{x} = y$

$$\frac{y^2}{2} + \frac{1{,}28}{\sqrt{12}}\,y - 15 = 0$$

$y_{1,2} = \ldots \to 5{,}86 \approx \sqrt{n}$

$\sqrt{n} \approx 5{,}86$

$\underline{n \geq 35}$

3) Egy bizonyos ritka betegségre (1:10000-hez, hogy valaki elkapja) tesztelünk. A teszt az esetek 3%-ában mutat fals pozitívat és 2%-ában fals negatívat. (Feltételezzük, hogy az emberek megbetegedése független egymástól.)

a Mi a valószínűsége, hogy 10 ember közül pontosan 2-en kapták el a betegséget? (3p)

b Mi a valószínűsége, hogy 10 ember közül pontosan 2 embernek lesz pozitív a tesztje? (5p)

c A teszt maga nagyon drága (100000FT), ezért Magyarországon inkább megvárják, míg 10 ember összejön, összeöntik a mintáikat és úgy végzik el a tesztet. Ha pozitív, akkor elvégzik egyenként is a tesztelést. Várhatóan mennyibe fog kerülni a 10 ember tesztelése a fenti módszerrel? (6p)

a.) $P(\text{2-en kapták el}) = \binom{10}{2}\cdot\left(\frac{1}{10000}\right)^2\left(\frac{9999}{10000}\right)^8$

b.) $P(\text{pozitív}) = \frac{1}{10000}\cdot 0{,}98 + \frac{9999}{10000}\cdot 0{,}03 \approx 0{,}03$

$$P(\text{2 pozitív}) = \binom{10}{2}\cdot 0{,}03^2\cdot 0{,}97^8$$

c.) $p = 0{,}03\cdot\left(\frac{9999}{10000}\right)^{10} + 0{,}98\cdot\Big(1-\underbrace{\left(\frac{9999}{10000}\right)^{10}}_{\text{legalább}}\Big) \to$ pozitív teszt valószínűsége c.) $p = 0{,}03 \cdot \left(\frac{9999}{10000}\right) + 0{,}98 \cdot \left(1 - \left(\frac{9999}{10000}\right)\right) \Rightarrow p \ldots$

fals pos — mindenki egészséges — valós poz — legalább 1 beteg

$$E(\text{Szállság}) = 100000\,((1-p) + 11\cdot p) = 1100000 \cdot \underset{\text{pos}}{p} + 100000 \cdot \underset{\text{neg}}{(1-p)}$$

4) A következő diszkrét eloszlásunk van: $P(X=1)=\Theta,\ P(X=2)=\frac{1-\Theta}{3},\ P(X=3)=\frac{2-2\Theta}{3}$ Adj Maximum Likelihood becslést Θ-ra ha az 1-es érték 20-szor, a 2-es érték 30-szor és a 3-as érték 50-szer fordult elő! (6p)

$$l(x,\theta) = \theta^{20} \cdot \left(\frac{1-\theta}{3}\right)^{30} \cdot \left(\frac{2-2\theta}{3}\right)^{50}$$

$$L(x,\theta) = 20\ln\theta + 30\ln\left(\frac{1-\theta}{3}\right) + 50\left(\frac{2-2\theta}{3}\right)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = \frac{20}{\theta} - \frac{30}{1-\theta} - \frac{50}{1-\theta} = 0$$

$$20 - 20\theta - 80\theta = 0$$

$$\theta = \frac{1}{5}$$

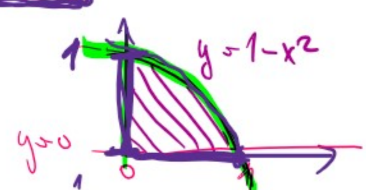
5) Legyen X, Y együttes sűrűségfüggvénye $f(x,y) = c \cdot xy$ a $0 < x < 1, 0 < y < 1 - x^2$ tartományon (és nulla egyébként).

a Számold ki c-t! (3p)

b Számold ki a peremsűrűségeket! (4p)

c Számold ki a várható értékeket $E(X), E(Y)$-t! (6p)

d Független-e X és Y? (Indokolj!) (1p)



a.)
$$1 = \int_0^1\int_0^{1-x^2} cxy\,dy\,dx = \int_0^1 \left[\frac{cxy^2}{2}\right]_0^{1-x^2} dx = \int_0^1 \frac{cx(1+x^4-2x^2)}{2}\,dx = \frac{c}{2}\left[\frac{x^2}{2} + \frac{x^6}{6} - \frac{x^4}{2}\right]_0^1 = \frac{c}{12}$$

$$\Downarrow$$

$$c = 12$$

b.)
$$f_1(x) = \int_0^{1-x^2} 12xy\,dy = 6x(1-x^2)^2 \quad 0<y<1$$

$y = 1-x^2$

$x^2 = 1-y$

$\boxed{x = \sqrt{1-y}}$

$$f_2(y) = \int_0^{\sqrt{1-y}} 12xy\,dx = \left[6x^2y\right]_0^{\sqrt{1-y}} = 6(1-y)\cdot y \qquad 0<x<1$$

c.) $\int^1 \ldots = 16$

c.)

$$E(X) = \int_0^1 6x^2 (1-x^2)^2 \, dx = \frac{16}{35}$$

$$E(Y) = \int_0^1 \overbrace{6(1-y)\cdot y}^{f_2(y)} \cdot y \, dy = \int_0^1 6(y^2 - y^3)\, dy = \left[2y^3 - \frac{3y^4}{2}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}}}$$

d.)

$$\left[\, f(x,y) \neq f_1(x)\cdot f_2(y) \quad \text{tehát } \underline{\text{NEM}} \text{ függetlenek} \,\right]$$