Bevezetés a számításelméletbe II.
Zárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2013. március 21.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak *nem célja* a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

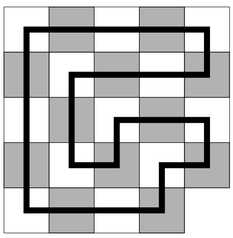
Minden feladat 10 pontot ér. Az elégséges határa 24 pont. A vizsgajegybe a dolgozat pontszáma számít bele, így a dolgozatokra osztályzatot nem adunk.

1. Legyenek a G gráf csúcsai egy 5×5-ös sakktábla mezői és két különböző csúcs akkor legyen összekötve G-ben, ha a megfelelő mezők közös él mentén szomszédosak. A (24 csúcsú) G_1 gráfot úgy nyerjük G-ből, hogy a sakktábla egyik sarkának megfelelő csúcsot (az éleivel együtt) elhagyjuk G-ből. A (23 csúcsú) G_2 gráfot hasonlóan nyerjük G-ből, csak két átellenes sarkot hagyunk el.

a) Van-e G_1-ben Hamilton-kör? b) Van-e G_2-ben Hamilton-kör?

* * * * *

a) G_1-ben van Hamilton-kör, ilyet mutat például az alábbi ábra. (5 pont)



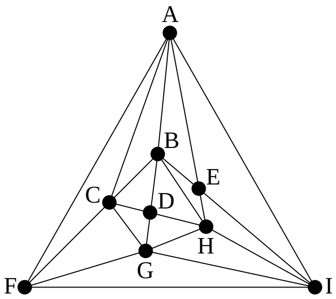
b) A sakktábla szokásos (a fenti ábrán is látható) színezését alapul véve G_2-ben 12 sötét és 11 világos mező van (vagy fordítva) és szomszédság csak különböző színű mezők között fordul elő. (2 pont)
Így a 11 világos mezőt elhagyva a maradék gráfnak 12 komponense lesz (mindegyik egy-egy izolált csúcs), így G_2-ben a tanult tétel miatt nincs Hamilton-kör. (3 pont)
Természetesen nem szükséges a b) feladatban a tanult tételt használni: mondhatjuk azt is, hogy mivel a mezők színei egy feltételezett Hamilton-kör mentén haladva váltakoznak, ezért az 1. és a 23. mező színe azonos, így nem lehetnek szomszédosak. Vagy akár hivatkozhatunk arra is, hogy mivel G_2 páros gráf, ezért nem lehet benne páratlan kör, így Hamilton-kör sem.

2. Létezik-e olyan két sorú A mátrix, amelynek minden eleme az $1, 2, \dots, 30$ számok valamelyike, A bármely két szomszédos oszlopában álló négy elem páronként különböző és bárhogyan választjuk az x_1, x_2, y_1, y_2 páronként különböző, 1 és 30 közötti számokat, A-nak pontosan egy olyan, egymás melletti oszlopokból álló 2×2-es részmátrixa van, amelynek az egyik oszlopában x_1 és x_2, a másikban y_1 és y_2 áll (valamilyen sorrendben)?

* * * * *

Legyen G az a gráf, amelynek csúcsai az $\{1, 2, \ldots, 30\}$ halmaz kételemű részhalmazai és két csúcs akkor szomszédos G-ben, ha a megfelelő részhalmazok diszjunktak. (2 pont)
A feladatbeli A mátrix pontosan akkor létezik, ha G-ben van Euler-út (vagy Euler-kör). Valóban, A minden oszlopa épp G egy-egy csúcsának felel meg (hiszen az oszlopban álló két elem különböző és a sorrendjük közömbös) és az egymás után következő oszlopok diszjunkt részhalmazoknak, vagyis G-beli éleknek felelnek meg. Továbbá a feladat szövege szerint G minden élének megfelelő két diszjunkt részhalmaz pontosan egyszer jelenik meg A-ban, mint szomszédos oszloppár. (4 pont)
G-ben egy tetszőleges csúcs foka $\binom{28}{2} = 378$, hiszen a csúcsnak megfelelő részhalmaz két elemétől különböző 28 elemből ennyiféleképp lehet kételemű részhalmazt kiválasztani. (2 pont)
G összefüggő, hiszen ha két részhalmaz nem diszjunkt (vagyis a megfelelő csúcsok nem szomszédosak), akkor bármely, mindkettőtől diszjunkt, kételemű részhalmazon keresztül vezet köztük 2 élű út.(1 pont)
Mivel G összefüggő és minden csúcsának foka páros, ezért van benne Euler-kör, így a kérdéses A mátrix létezik. (1 pont)

3. Határozzuk meg az alábbi G gráf kromatikus számát, $\chi(G)$-t és adjuk meg G egy jó színezését $\chi(G)$ színnel!



* * * * *

Megmutatjuk, hogy G csúcsai nem színezhetők meg 3 színnel. Tegyük fel ugyanis indirekt, hogy mégis. Ekkor bármely G-beli háromszög csúcsain fel kell használnunk mindhárom színt. Válasszuk például az A, F, I háromszöget: legyen A piros, F kék, I zöld. Ekkor G biztosan piros, hiszen már van kék és zöld szomszédja. Hasonlóan: H kék, mert már van piros és zöld szomszédja. Ekkor viszont E-nek már van mindhárom színű szomszédja, így nem kaphat színt; ellentmondás. (6 pont)
Négy színnel viszont már megszínezhetők G csúcsai, például így: legyen D, E és F piros; A és G kék; B és I zöld; és C és H sárga. (3 pont)
Mivel G 4 színnel megszínezhető, de 3-mal nem, ezért $\chi(G) = 4$. (1 pont)
Ha egy megoldó nem adja meg G egy helyes színezését, hanem ehelyett a négyszíntételre hivatkozik, az az utolsó 4 pontból csak 1-et kaphat meg (a $\chi(G) = 4$ állítás helyes indoklásáért). Megjegyezzük, hogy a három színnel nem színezhetőség indokolható valamivel rövidebben is: például az F, C, B, E, I 5 pontú kör színezéséhez biztosan kell 3 szín, de mivel az A csúcs szomszédos a kör minden csúcsával, ezért mindegyiktől különböző színű kell legyen.

4. A 2013 csúcsú G egyszerű gráfnak van 2009 darab 2011 fokú csúcsa. Mutassuk meg, hogy G perfekt!

* * * * *

$\overline{G}$ (G komplementere) egy 2013 csúcsú egyszerű gráf, amelynek van 2009 darab 1 fokú csúcsa.(2 pont)
Ezért $\overline{G}$ nem tartalmazhat legalább 5 pontú páratlan kört, vagy annak komplementerét feszített részgráfként, hiszen 1 fokú csúcs ilyen feszített részgráfban nyilván nem lehet, 1-nél nagyobb fokú csúcsból pedig csak 4 lehet. (3 pont)
Így a „nagy perfekt gráf tétel” szerint $\overline{G}$ perfekt, (3 pont)
amiből Lovász tétele szerint következik, hogy G is perfekt. (2 pont)
Megjegyezzük, hogy a feladat a „nagy perfekt gráf tételre” való hivatkozás nélkül is megoldható: ehhez csak azt kell megfigyelni, hogy egy 1 fokú csúcs hozzávétele sem $\omega(G)$, sem $\chi(G)$ értékét nem befolyásolja – feltéve, hogy ezek értéke legalább 2.

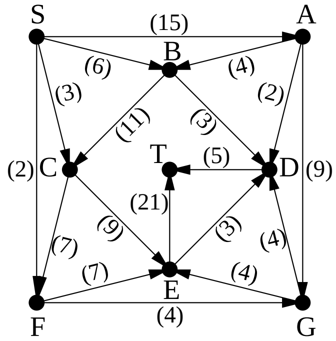
5. A $G(A,B;E)$ egyszerű, páros gráfban $|A| = |B| = n$ (valamely $n \geq 1$ egészre) és bármely nemszomszédos $u \in A$ és $v \in B$ csúcsok esetén $d(u) + d(v) \geq n$ teljesül. Mutassuk meg, hogy G-ben van teljes párosítás!

$*\quad *\quad *\quad *\quad *$

Mivel $|A| = |B| = n$, ezért azt kell megmutatnunk, hogy van (például) A-t lefedő párosítás. (1 pont)
Ehhez a Hall-tétel szerint azt kell belátnunk, hogy bármely $X \subseteq A$ részhalmazra $|N(X)| \geq |X|$. Tegyük fel ezért indirekt, hogy valamely $X \subseteq A$-ra ez nem teljesül: $|X| = k$, de $|N(X)| \leq k-1$. (2 pont)
Válasszuk az $u \in A$ és $v \in B$ csúcsokat úgy, hogy $u \in X$ és $v \notin N(X)$ teljesüljön. (1 pont)
Mivel $v \notin N(X)$, ezért v nemszomszédos X-belivel, így egyrészt u és v nemszomszédos, (1 pont)
másrészt v csak az $n-k$ elemszámú $A \setminus X$ halmaz csúcsaival lehet szomszédos. Ezért $d(v) \leq n-k$ (hiszen G egyszerű gráf). (2 pont)
Hasonlóan, u csak $N(X)$-beliekkel szomszédos, így $d(u) \leq k-1$. (1 pont)
Tehát u és v nemszomszédos és $d(u) + d(v) \leq (k-1) + (n-k) = n-1$, ami ellentmond a feladat feltételének. Ez az ellentmondás bizonyítja a Hall-feltétel teljesülését és ezzel a feladat állítását. (2 pont)

6. a) Határozzuk meg az alábbi hálózatban az $\{S,E,F\}$ csúcshalmaz és a maradék csúcsok között vezető élek alkotta vágás értékét (más néven kapacitását)!

b) Adjunk meg a hálózatban egy maximális folyamot (S-ből T-be)!



$*\quad *\quad *\quad *\quad *$

a) Az $\{S,E,F\}$ halmazból kilépő élek: $\overrightarrow{SA}$, $\overrightarrow{SB}$, $\overrightarrow{SC}$, $\overrightarrow{ED}$, $\overrightarrow{ET}$ és $\overrightarrow{FG}$. Ezeknek az összkapacitása, vagyis a vágás értéke (kapacitása) pedig $15 + 6 + 3 + 3 + 21 + 4 = 52$. (3 pont)

b) Az alábbi ábrán látható folyam értéke 24. (A 0 folyamértékeket nem jelöltük.) (2 pont)
Az ugyancsak az ábrán látható vágás (tehát az $\{S,A,D,G\}$ halmaz és a maradék csúcsok között futó élek halmaza) értéke (tehát az $\{S,A,D,G\}$ halmazból a maradék csúcsok halmazába menő élek összkapacitása) szintén 24. (3 pont)
Mivel tetszőleges folyam értéke legföljebb akkora lehet, mint tetszőleges vágás értéke, (1 pont)
ezért a 24 értékű vágás bizonyítja, hogy a 24 értékű folyam maximális. (1 pont)
Az utolsó 2 pont tehát annak jár, aki (érdemben) indokolja, hogy a megadott folyam maximális. (Például az „a Ford-Fulkerson tétel miatt a folyam maximális” mondat – további kiegészítés híján – *nem* tekintendő (érdemi) indoklásnak.) A folyam maximalitása mellett lehet úgy is érvelni, hogy a 24 értékű folyamhoz tartozó (helyesen felrajzolt) segédgráfban már nincs javító út.