ANALÍZIS(2)
Műszaki Informatika szak

I. ZÁRTHELYI
B kurzus

2003. március 13.
Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (12 pont)

Adja meg az
$$y' = (\operatorname{ctg} y)\ \ln(x-2)$$
differenciálegyenlet $y(3)=\pi/3$ valamint az $y(3)=\frac{\pi}{2}$ kezdeti értékekhez tartozó megoldásait!

$\frac{dy}{dx} = \underbrace{\frac{\cos y}{\sin y}}_{g(y)} \cdot \underbrace{\ln(x-2)}_{f(x)}$ $\qquad y \neq k\pi$ és $x>2$

$y \equiv \frac{\pi}{2}+k\pi$, $x>2$ megoldás 1

Ha $y \neq \frac{\pi}{2}+k\pi$:

$\int \frac{\sin y}{\cos y}\,dy = \int 1\cdot \ln(x-2)\,dx$ 3

$u'=1$, $v=\ln(x-2)$; $u=x$, $v'=\frac{1}{x-2}$

$-\int \underbrace{\frac{-\sin y}{\cos y}}_{f'/f}\,dy = x\cdot\ln(x-2) - \int \underbrace{\frac{x}{x-2}}_{1+2\frac{1}{x-2}}\,dx$

$\boxed{-\ln|\cos y| = x\cdot\ln(x-2) - x - 2\ln(x-2) + C}$ általános megoldás (2, 2, 1)

$y(3)=\frac{\pi}{3}$: $\quad -\ln|\cos\frac{\pi}{3}| = -3 + C$ 1 $\to C=\ln 2+3$

$-\ln|\cos y| = x\ln(x-2) - x - 2\ln(x-2) + \ln 2 + 3$ 1

elhagyható, mert most $\cos y>0$

$y(3)=\frac{\pi}{2}$: $\quad y\equiv \frac{\pi}{2}$, $x>2$ 1

z1 030313/1.

2. feladat (15 pont)

Határozza meg az
$$y'+\frac{3}{x}y = \frac{1}{x^4(x+5)},\qquad x>0$$
differenciálegyenlet összes megoldását!

$y_{iá} = y_H + y_{ip}$ 1 (lineáris elsőrendű d.e.)

H: $y'+\frac{3}{x}y=0$ 1 $\Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{3}{x}y \Rightarrow \int\frac{dy}{y} = \int -\frac{3}{x}\,dx$ 1

$\Rightarrow \ln y = -3\ln x$ 1 $\Rightarrow y=\frac{1}{x^3}$ egy megoldás 1 $\Rightarrow y_H = C\frac{1}{x^3}$, $C\in\mathbb{R}$ 1

I: $y_{ip} = c(x)\frac{1}{x^3}$ 1; $\quad y_{ip}' = c'\frac{1}{x^3} - 3c\frac{1}{x^4}$

Behelyettesítve:

$c'\frac{1}{x^3} - 3c\frac{1}{x^4} + \frac{3}{x}c\frac{1}{x^3} = \frac{1}{x^4(x+5)}$ 2

$c' = \frac{1}{x(x+5)} \Rightarrow c = \int\frac{1}{x(x+5)}\,dx$ 1 $= \int\left(\frac{A}{x}+\frac{B}{x+5}\right)dx = A\ln x + B\ln(x+5)$

$\frac{1}{x(x+5)} = \frac{A}{x}+\frac{B}{x+5}$: $\quad 1 = A(x+5)+Bx$ 1 $\Rightarrow A=\frac{1}{5}$ 1; $B=-\frac{1}{5}$ 1

Tehát $c = \frac{1}{5}\ln x - \frac{1}{5}\ln(x+5) = \frac{1}{5}\ln\frac{x}{x+5}$ 1

$\Rightarrow y_{ip} = \frac{1}{5x^3}\ln\frac{x}{x+5}$ 1; $\quad y_{id} = \frac{C}{x^3}+\frac{1}{5x^3}\ln\frac{x}{x+5}$; $C\in\mathbb{R}$

3. feladat (7 pont)

a) Írja fel az elsörendű, lineáris homogén differenciálegyenlet általános alakját!

b) Vezesse be az
$$u=\frac{1}{y^4}$$
új változót az alábbi differenciálegyenletbe:
$$y'+y\cos x+y^5\sin x=0$$
(Ne oldja meg a kapott egyenletet!)
Lineáris-e az így nyert differenciálegyenlet?

a) $y'+g(x)\,y=0$, g folyt. 1

b) $u' = -4y^{-5}y' = -4\frac{y'}{y^5}$ 2

a differenciálegyenletet beszorozva $\frac{1}{y^5}$-nel:

z1 030313/2.

$$\frac{y'}{y^5} + \frac{1}{y^4}\cos x + \sin x = 0$$

Elvégezve a helyettesítést: (2)

$$-\frac{u'}{4} + u\cos x + \sin x = 0 \Rightarrow u' - 4\cos x \cdot u = 4\sin x \quad (1)$$

Lineáris inhomogén elsőrendű d.e.-et kaptunk. (1)

4. feladat (14 pont)

Tegyük fel, hogy az

$$y' = y^6 - x$$

differenciálegyenletnek minden $y(x_0) = y_0$ kezdeti értékhez létezik akárhányszor differenciálható megoldása! (Nem kell belátnia!)

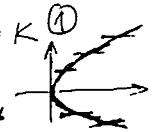
a) Rajzolja fel ennek a differenciálegyenletnek 3 különböző izoklináját és jelölje be az iránymezőt ezen izoklinák pontjaiban!

b) Mutassa meg, hogy az $x_0 = 1$, $y_0 = -1$ ponton áthaladó megoldásnak van legalább egy lokális szélsőértéke!

c) Van-e inflexiója az $x_0 = 1$, $y_0 = 2$ ponton áthaladó megoldásnak az $x = 1$ helyen?

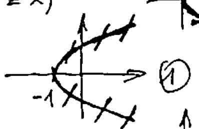
a) Az izoklinák egyenlete: $y^6 - x = K$ (1)

$\boxed{7}$ $K := 0$ $\quad y^6 - x = 0$ (1) $(y^6 = x)$



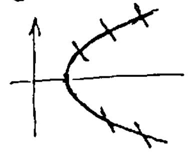
(1)

$K := 1$ $\quad y^6 = x + 1$ (1)



(1)

$K := -1$ $\quad y^6 = x - 1$ (1)



(1)

b.) Csak az (x_0, y_0) pontot tudjuk vizsgálni.

$\boxed{5}$ $y'(1) = (-1)^6 - 1 = 0$ (1), tehát ennek a megoldásnak $(1,-1)$-ben lehet lok. szé-e.

$y'' = 6y^5y' - 1$ (1) (1) $\quad y'(1) = 0$ és $y''(1) \neq 0$ (2)

$y''(1) = 6 \cdot (-1)^5 \cdot 0 - 1 = -1 < 0$, tehát lok. maximuma van az $y(1) = -1$ kezdeti érték problémának az $x = 1$ pontban (értéke: -1). Ettől persze még lehet más lokális szélsőértéke is.

c.) $y(1) = 2$

$\boxed{2}$ Az inflexióhoz szükséges: $y''(1) = 0$ (1). Teljesül-e?

$y'(1) = 2^6 - 1 = 63$

$y''(1) = 6y^5(1)\,y'(1) - 1 = 6 \cdot 2^5 \cdot 63 - 1 \neq 0$

Tehát nincs inflexiója az $x = 1$ helyen az $y(1) = 2$ kezdeti érték problémának. (1)

5. feladat (10 pont)

a) Írja fel az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y'' - 3y' = 0$$

b) Milyen alakban keresheti az alábbi differenciálegyenletek egy-egy partikuláris megoldását a $\beta \in \mathbb{R}$, $\beta \neq 0$ paraméter tetszőleges értéke esetén:

$$y'' - 3y' = 4 + \cos\beta x$$

$$y'' - 3y' = e^{\beta x}$$

(Nem kell megkeresnie!)

a.) $\lambda^2 - 3\lambda = \lambda(\lambda - 3) = 0$ (1) $\Rightarrow \lambda_1 = 0;\ \lambda_2 = 3$ (1)

$e^{0x} = 1;\ e^{3x}$ megoldások (1)+(1)

$y_h = C_1 + C_2 e^{3x}$ (1)

b.) $y'' - 3y' = f(x)$

$f(x) = 4 + \cos\beta x$: $y_{ip} = (Ax) + (B\cos\beta x + C\sin\beta x)$ (1) (1) (1)

(külső rezonancia van)

$f(x) = e^{\beta x}$: $\beta \neq 3$: $y_{ip} = Ae^{\beta x}$ (1)

$\beta = 3$: $y_{ip} = Axe^{3x}$ (1) (külső rez.)

6. feladat (12 pont)

Írja fel a

$$\frac{dx}{dt} = 3x - y\,, \qquad \frac{dy}{dt} = 4x + 3y$$

differenciálegyenlet-rendszer összes valós megoldását!

$$\dot{\underline{x}} = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 4 & 3 \end{bmatrix} \underline{x}$$

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 4 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)^2 + 4 = 0 \quad (2) \implies \lambda_{1,2} = 3 \pm 2j \quad (1)$$

$$(\underline{\underline{A}} - \lambda_1 \underline{\underline{E}})\underline{s}_1 = \underline{0}$$

$$\begin{matrix} -2j & -1 & | & 0 \\ \cancel{4} & \cancel{-2j} & | & \cancel{0} \end{matrix} \quad (2) \implies 2j\, s_{11} + s_{12} = 0 \qquad s_{11} := 1\ ;\ s_{12} = -2j \quad (1)$$

$$\underline{s}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2j \end{pmatrix}$$

$$e^{\lambda_1 t}\underline{s}_1 = e^{(3+2j)t}\begin{pmatrix} 1 \\ -2j \end{pmatrix} = e^{3t}(\cos 2t + j \sin 2t)\begin{pmatrix} 1 \\ -2j \end{pmatrix} = \quad (1)\ (1)$$

$$= \begin{pmatrix} e^{3t}\cos 2t + j e^{3t}\sin 2t \\ 2e^{3t}\sin 2t + j(-2)e^{3t}\cos 2t \end{pmatrix} \ (1) = \begin{pmatrix} e^{3t}\cos 2t \\ 2e^{3t}\sin 2t \end{pmatrix} + j\begin{pmatrix} e^{3t}\sin 2t \\ -2e^{3t}\cos 2t \end{pmatrix}$$

$$\underline{x} = C_1\begin{pmatrix} e^{3t}\cos 2t \\ 2e^{3t}\sin 2t \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} e^{3t}\sin 2t \\ -2e^{3t}\cos 2t \end{pmatrix} \quad (1) \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

(1) (1)

7. feladat (20 pont)

a) Mit nevezünk a H halmazra vonatkozó uniform normának? Mikor mondjuk, hogy f_n uniform normában konvergál f-hez?

b) Legyen

$$f_n(x) = \frac{3e^x + 2x^2n^2}{e^x + x n^2}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = ?$$

c) Mutassa meg, hogy a fenti f_n egyenletesen konvergál az f-hez a $[2,5]$ intervallumon!

d) Adjon meg egy olyan intervallumot, amelyen a fenti f_n nem konvergál egyenletesen az f-hez! Az indokláshoz felhasznált tételt írja le!

21 030313/5.

a.) $\boxed{4}$ (D1) $\|f\| = \sup_{x\in H} |f(x)|$ $\quad f$ korlátos H-n (2)

(D2) $f_n \xrightarrow{u} f$: $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$ (2)

b.) $\boxed{3}$ $f(x) = \lim_{n\to\infty} \dfrac{3e^x + 2x^2n^2}{e^x + xn^2} \underset{x\neq 0}{=} \lim_{n\to\infty} \dfrac{\frac{3e^x}{n^2} + 2x^2}{\frac{e^x}{n^2} + x} = \dfrac{2x^2}{x} = 2x$

És $f_n(0) = 3 \to 3 = f(0)$

$$f(x) = \begin{cases} 3, & \text{ha } x = 0 \quad (1) \\ 2x, & \text{ha } x \neq 0 \quad (2) \end{cases}$$

c.) $\boxed{9}$ $I := [2,5]$

$$0 \le \|f_n - f\|_I = \sup_{x\in I} |f_n(x) - f(x)| = \sup_{x\in I} \left|\frac{3e^x + 2x^2n^2}{e^x + xn^2} - 2x\right| = \quad (1)\ (1)$$

$$= \sup_{x\in I}\left|\frac{(3-2x)e^x}{e^x + xn^2}\right| \ (1) = \sup_{x\in I} \frac{(2x-3)e^x}{e^x + xn^2} \ (1) \le \frac{(10-3)e^5}{e^2 + 2\cdot n^2} \ (2) \to 0 \ (1)$$

$$\underset{\text{rendőrelv}}{\Longrightarrow} \lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_I = 0 \ (1) \Rightarrow f_n \xrightarrow{u} f \ I\text{-n} \Rightarrow f_n \rightrightarrows f \ I\text{-n} \ (1)$$

d.) $\boxed{4}$ pl. $I = [0,2]$ (1) esetén I-n nem egyenletes a konvergencia, mert bár f_n-ek folytonosak (1), de az f határfüggvény nem az. (1)

(T) Ha $f_n \rightrightarrows f$ I-n és $f_n \in C^0_I \Rightarrow f \in C^0_I$ (1)

8. feladat (10 pont)

2. ZH

$$\lim_{x\to 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k x^4 + 4^k} = ?$$

A felhasznált tételeket írja le!

$f_k \in C^0_{\mathbb{R}}$. Ha a sor egyenletesen konvergens $K_{0,\delta}$-ban, akkor az összegfüggvény folytonossága miatt $\lim_{x\to 0}$ és $\sum_{k=1}^{\infty}$ felcserélhető.

21 030313/6.

Jelenleg $\mathbb{R}$-en is fennáll az egyenletes konvergencia, mert $x \in \mathbb{R}$-en:

$$|f_k(x)| \le \frac{1}{0+4^k} \quad 2 \quad \text{és} \quad \sum^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k \text{ konvergens geom. sor} \quad 1$$

$$\Rightarrow \sum_{1}^{\infty} f_k(x) \text{ egyenletesen konvergens } \mathbb{R}\text{-en}.$$

Így

$$\lim_{x\to 0} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{kx^4+4^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{x\to 0} \frac{\cos kx}{kx^4+4^k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{4^k} = \quad 1$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^k = \frac{1/4}{1-1/4} = \frac{1}{3} \quad 2$$

A felhasznált tételek:

T Weierstrass kritérium:

2 Ha $|f_k(x)| \le b_k$ $\forall x \in H$, $k=1,2,\dots$ és $\sum^{\infty} b_k$ konvergens, akkor $\sum_{1}^{\infty} f_k(x)$ egyenletesen konv. H-n

T f_k folytonos x_0-ban és $\sum_{k=1}^{\infty} f_k(x)$ egyenletesen

2 konvergens $K_{x_0,\delta}$-ban, akkor az összegfüggvény folytonos x_0-ban.

Ezért $\lim\limits_{x\to x_0} \sum_{1}^{\infty} f_k(x) = \sum_{1}^{\infty} \lim\limits_{x\to x_0} f_k(x)$

Pótfeladat (csak az elégséges eléréséhez javítjuk ki):

9. feladat (10 pont)

Írja fel az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y'' - 3y' + 2y = 6x^2$$

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda-2)(\lambda-1) = 0 \quad 1 \qquad \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = 2 \quad 1$$

$$y_H = C_1 e^x + C_2 e^{2x} \quad 2$$

$$\begin{array}{r|l} 2. & y_{ip} = Ax^2 + Bx + C \quad 1 \\ -3. & y_{ip}' = 2Ax + B \\ 1. & y_{ip}'' = 2A \end{array}$$

$$x^2(2A) + x(2B-6A) + (2C-3B+2A) = 6x^2 \quad 2$$

$$2A = 6 \Rightarrow A = 3$$

$$2B - 6A = 0 \Rightarrow B = 3A = 9$$

$$2C - 3B + 2A = 0 \Rightarrow C = \frac{1}{2}(3B - 2A) = \frac{1}{2}(27-6) = \frac{21}{2}$$

$$y_{ip} = 3x^2 + 9x + \frac{21}{2} \quad 2$$

$$y_{iá} = y_H + y_{ip} = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + 3x^2 + 9x + \frac{21}{2} \quad 1$$