VIK, Műszaki Informatika

ANALÍZIS (2)

Komplex függvénytan

$\boxed{\text{Feladatok}}$

Oktatási segédanyag

A Villamosmérnöki és Informatikai Kar
műszaki informatikus hallgatóinak tartott előadásai alapján
összeállította:

Fritz Józsefné

Kónya Ilona

2002. április

Szerkesztette: Győri Sándor

1.) Vizsgálja meg a derivált definíciója alapján, hogy differenciálhatók-e az alábbi függvények!

a.) $w = z^3$

b.) $w = \overline{z}^2$

2.) A Cauchy–Riemann féle parciális differenciálegyenletekkel vizsgálja meg a következő függvények differenciálhatóságát!

a.) $w = z^3$

b.) $w = \overline{z}^2$

c.) $w = \dfrac{1}{\overline{z}^2}$

d.) $w = z \cdot \operatorname{Im} z$

3.) Határozza meg a

$$w = \frac{z - j}{z + 1}$$

függvény által létesített leképezésnél a nyújtási együtthatót ill. az elforgatási szöget a $z_0 = 1$ pontban! Létezik-e olyan z_0 hely, ahol az elforgatási szög 0 és a nyújtási együttható 1?

4.) Hol differenciálható, illetve hol reguláris a

$$w = \overline{z}z^2$$

függvény?

5.) Hol differenciálható, illetve hol reguláris a

$$w = (x^2 - y^2) + j(y^2 + x^2)$$

függvény?

6.) Válassza meg a c számot úgy, hogy a

$$cx^2 + 2xy - 2y^2$$

függvény egy, az egész komplex számsíkon reguláris $w = f(z)$ függvény képzetes része legyen! $\left.\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}z}\right|_{z=-j} = ?$

7.) a.) Határozza meg M értékét úgy, hogy a

$$v(x, y) = M(x^2y + xy) - 4y^3 - 3$$

kétváltozós függvény egy reguláris komplex változós függvény képzetes része legyen!

b.) Határozza meg a komplex változós függvény deriváltját a $z_0 = 1 + 2j$ helyen!

8.) Van-e olyan reguláris $w = f(z)$ függvény, amelynek valós része:

$$e^{x^2-y^2} \cos 2xy$$

Ha igen, akkor számítsa ki $f'(j)$ értékét, lehetőleg w képzetes részének meghatározása nélkül!

9.) Igazolja, hogy az alábbi függvények harmonikusak, azaz szóba jöhetnek reguláris komplex változós függvény valós ill. képzetes részeként! Határozza meg ezen függvények harmonikus társát és írja fel a $w = u + jv$ módon képzett reguláris függvényt!

a.) $u(x, y) = \operatorname{ch} 2x \cdot \sin 2y$

b.) $u(x, y) = 3x^2y - y^3$

c.) $u(x, y) = x^3 - 3xy^2 + 3x^2 - 3y^2 + 1$

d.) $v(x, y) = x^2 - y^2 + 2y$

10.) Mutassa meg, hogy a $w = az + b$ leképezés egy nyújtás–zsugorítás, egy forgatás és egy eltolás szuperpozíciója! Számítsa ki a leképezés helyben maradó pontját!

11.) Mutassa meg, hogy a $w = jz + j$ függvény által létesített leképezés az $\operatorname{Im} z > 0$ félsíknak a $\operatorname{Re} w < 0$ félsíkot felelteti meg!

12.) Határozza meg a w síknak azt a tartományát, amelyet a következő függvények által létesített leképezés feleltet meg a z sík adott tartományának!

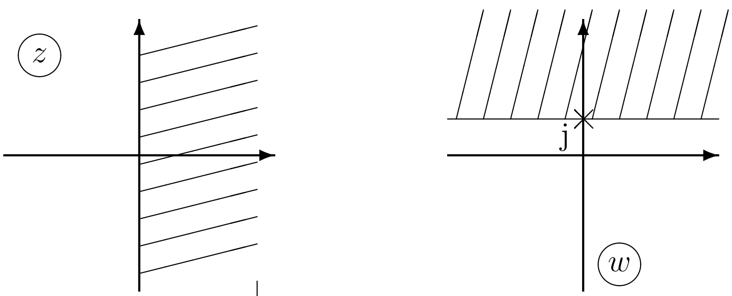
a.) $w = (1 + j)z$ $\qquad \operatorname{Im} z > 0$

b.) $w = 1 + jz$ $\qquad \operatorname{Re} z > 0$ és $0 < \operatorname{Im} z < 2$

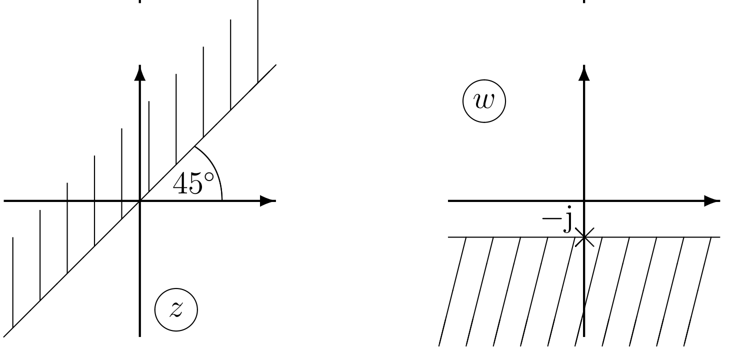
c.) $w = -jz - 1$ $\qquad |z| < 1$

13.) Adjon meg egy olyan $w = az + b$ alakú lineáris függvényt, amely a z sík adott tartományának a w sík adott tartományát felelteti meg!

a.)



b.)

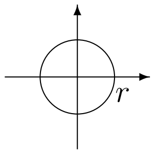


c.) $|z| < 3$ $\qquad$ $|w - 1 + j| < 1$

d.) $|z + j| > 2$ $\qquad$ $|w + 1 - j| > 4$

14.) Mutassa meg, hogy a $\dfrac{1}{z}$ leképezés a z sík köreit ill. egyeneseit a w sík köreibe vagy egyeneseibe viszi át!

15.) A $w = \dfrac{1}{z}$ leképezés mibe viszi át a következő görbéket?

a.) 

$|z| = r$

b.) Az origón átmenő köröket $(z\overline{z} - z_0\overline{z} - \overline{z_0}z = 0)$.

c.) Az $y = mx$ egyeneseket.

d.) Az $y = mx + b$ egyeneseket.

16.) Mibe viszi át a $w = \dfrac{1}{z}$ leképezés a következő görbéket?

a.) $x^2 + y^2 - 4y = 0$

b.) $x^2 + 6x + y^2 = 4$

c.) $y = 6x$

d.) $y = -x + 2$

17.) Mutassa meg, hogy a

$$w = \frac{az + b}{cz + d} \qquad (ad - bc \neq 0)$$

körtartó leképezés!

18.) Mibe viszi át a

$$w = \frac{2z - j}{z + j}$$

leképezés az $y = x$, $y = 2x - 1$ egyeneseket ill. az $x^2 + y^2 = 1$ kört?

19.) Mibe viszi át a

$$w = j\frac{1 - z}{1 + z}$$

leképezés az $x = 0$, $y = 0$ egyeneseket és az $x^2 + y^2 = 1$ kört?

20.) Mibe viszi át a

$$w = \frac{2z-4}{z}$$

függvény a $\operatorname{Re} z > 0$, $\operatorname{Im} z > 0$ tartományt?

21.) Határozza meg a

$$w = \frac{z-1}{z+a}$$

függvényben az a konstans értékét úgy, hogy a függvény a

$$|z-j| = 1$$

kört egyenesbe képezze le!

22.) Mibe viszi át az adott $w = f(z)$ függvény az adott tartományt?

a.) $w = jz + 1 \qquad |z-1| < 2$

b.) $w = 2z + j + 1 \qquad \operatorname{Re} z > \operatorname{Im} z$

c.) $w = (1+j)z \qquad |z+2| > 3$

d.) $w = \dfrac{j}{z} \qquad |z-j| < 1$

e.) $w = \dfrac{2}{z-1} \qquad \operatorname{Im} z > 0$

f.) $w = \dfrac{z}{z+1} \qquad |z| < 2$

g.) $w = \dfrac{1+j}{2z} \qquad \operatorname{Re} z + 1 < \operatorname{Im} z$

h.) $w = \dfrac{z+1}{z-1} \qquad \operatorname{Im} z > 0$ ill. $|z| < 1$

i.) $w = \dfrac{2z}{z+j} \qquad -1 + \operatorname{Re} z > \operatorname{Im} z$

j.) $w = \dfrac{z-j}{2z+j} \qquad |z| \leq 1$

k.) $w = \dfrac{z-j}{2z+j} \qquad |z| \leq 1$ és $\operatorname{Im} z \geq 0$

23.) Felhasználva az

$$\mathrm{e}^z = \mathrm{e}^x(\cos y + j \sin y)$$

$$\sin z = \frac{\mathrm{e}^{jz} - \mathrm{e}^{-jz}}{2j} \qquad \cos z = \frac{\mathrm{e}^{jz} + \mathrm{e}^{-jz}}{2}$$

$$\operatorname{sh} z = \frac{\mathrm{e}^{z} - \mathrm{e}^{-z}}{2} \qquad \operatorname{ch} z = \frac{\mathrm{e}^{z} + \mathrm{e}^{-z}}{2}$$

definíciókat, bizonyítsa be a következő azonosságokat!

a.) $\mathrm{e}^{z_1} \cdot \mathrm{e}^{z_2} = \mathrm{e}^{z_1+z_2}$

b.) $\mathrm{e}^{z+2\pi j} = \mathrm{e}^z$

c.) $\sin^2 z + \cos^2 z = 1$

d.) $\sin(z_1 \pm z_2) = \sin z_1 \cdot \cos z_2 \pm \cos z_1 \cdot \sin z_2$

e.) $\cos(z_1 \pm z_2) = \cos z_1 \cdot \cos z_2 \mp \sin z_1 \cdot \sin z_2$

f.) $\operatorname{sh}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{sh} z_1 \cdot \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{ch} z_1 \cdot \operatorname{sh} z_2$

g.) $\operatorname{ch}(z_1 \pm z_2) = \operatorname{ch} z_1 \cdot \operatorname{ch} z_2 \pm \operatorname{sh} z_1 \cdot \operatorname{sh} z_2$

24.) Mutassa meg, hogy

a.) $\sin jz = j \operatorname{sh} z$

b.) $\cos jz = \operatorname{ch} z$

c.) $\operatorname{sh} jz = j \sin z$

d.) $\operatorname{ch} jz = \cos z$

25.) Írja fel $w = u(x, y) + jv(x, y)$ alakban az alábbi függvényeket!

a.) $w = \sin z$

b.) $w = \cos z$

c.) $w = \operatorname{sh} z$

d.) $w = \operatorname{ch} z$

26.) A Cauchy–Riemann féle parciális differenciálegyenletek segítségével vizsgálja meg a következő függvényeket differenciálhatóság és regularitás szempontjából!

a.) $w = \mathrm{e}^z$

b.) $w = \sin z$

c.) $w = \cos z$

d.) $w = \operatorname{sh} z$

e.) $w = \operatorname{ch} z$

27.) Oldja meg az alábbi egyenleteket!

a.) $\sin z = 0$

b.) $\cos z = 0$

c.) $\operatorname{sh} z = 0$

d.) $\operatorname{ch} z = 0$

28.) Számolja ki a következő függvényértékeket!

a.) $\mathrm{e}^{j\frac{\pi}{2}}$, $\mathrm{e}^{j\pi}$, $\mathrm{e}^{j2\pi}$, e^{-1-2j}

b.) $\cos(2 - j\pi)$, $\sin \pi j$

c.) $\operatorname{Ln} 4$, $\ln(-6)$, $\operatorname{Ln}(-6)$, $\ln 3j$, $\operatorname{Ln} 3j$

d.) 2^j, 1^{-j}, j^{2j}, $(1 + j)^{1-j}$

29.) Mutassa meg, hogy $\lim\limits_{z \to \infty} \mathrm{e}^z$ nem létezik!

30.)* Vizsgálja az alábbi függvényt a megadott szempontok szerint!

a.) $w = \mathrm{e}^z$ b.) $w = \sin z$

Mutassa meg, hogy periodikus! Határozza meg a periodust! Jelöljön ki a z síkon olyan legbővebb halmazokat, amelyeken a leképezés kölcsönösen egyértelmű! Milyen görbéket feleltet meg a leképezés a z sík $x =$konst., $y =$konst. egyeneseinek?

31.) Hol létesít konform leképezést az

$$f(z) = (z^2 - 2) \cdot 3 \sin z - (z^3 - 6z + 8) \cos z$$

függvény?

32.) Mibe viszi át a $w = \mathrm{e}^{2z}$ leképezés a z sík $A(0,0)$, $B(1,0)$, $C(1,1)$, $D(0,1)$ négyszögtartományát?

33.) Hol differenciálható és hol reguláris a

$$w = \operatorname{sh} 3\overline{z}$$

komplex változós függvény?

34.)

$$f(z) = \operatorname{ch} \overline{2z}$$

a.) Milyen alakzatra képezi le a függvény az $\operatorname{Im} z = \dfrac{\pi}{2}$ egyenest?

b.) Hol differenciálható és hol reguláris a függvény?

35.)

$$f(z) = \overline{\sin 3z}$$

a.) Hol differenciálható és hol reguláris a függvény?

b.) Milyen alakzatra képezi le az alábbi egyeneseket?

α.) $\operatorname{Re} z = \dfrac{\pi}{3}$

β.)* $\operatorname{Im} z = 1$

36.) Milyen alakzatra képezi le a z sík képzetes tengelyét a

$$w = \overline{j \cos z}$$

függvény? Kölcsönösen egyértelmű-e a leképezés?

37.) Oldja meg az alábbi egyenleteket z-re!

a.) $\cos jz = 2j \sin jz$

b.) $\sin jz = j\overline{\cos jz}$

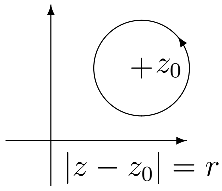
c.) $\sin 3z + 2 = 0$

d.) $\sin 2z + 3j = 0$

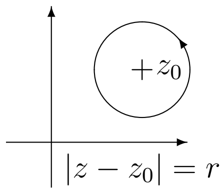
e.) $\sin z = j \cos z \quad (\operatorname{tg} z = j)$

38.) Határozza meg a következő komplex változós függvények kijelölt vonalintegráljait! (Zárt görbe esetén pozitív irányítást vegyen fel!)

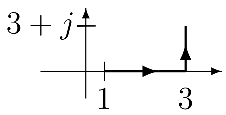
a.) $\displaystyle\oint_L \frac{dz}{z - z_0}$ $\quad L:$



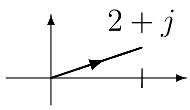
b.) $\displaystyle\oint_L (z - z_0)^n \, dz \qquad n \in \mathbb{Z},\ n \neq -1$ $\quad L:$



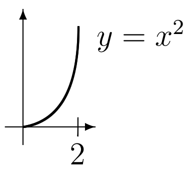
c.) $\displaystyle\int_L e^{2\overline{z}} \, dz$ $\quad L:$



d.) $\displaystyle\int_L e^{j\overline{z}} \, dz$ $\quad L:$

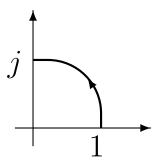


e.) $\displaystyle\int_L \overline{z}^2 \, dz$ $\quad L:$

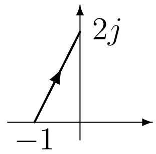


f.) $\displaystyle\int_L 2\overline{z} \, dz$ $\quad L$: a $P_1(0,4)$ és $P_2(5,1)$ pontok közötti egyenes szakasz, P_1-ből P_2-be irányítva

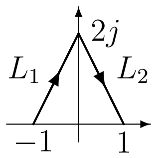
g.) $\displaystyle\int_L \left(\overline{z} + \operatorname{sh} 2z + \cos^2 z\right) \, dz$ $\quad L:$



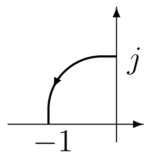
h.) $\displaystyle\int_L \left(\sin 2\overline{z} - \frac{1}{z^2}\right) \mathrm{d}z$ $\qquad L:$



i.) $\displaystyle\int_{L_1 \cup L_2} \frac{z+2}{\mathrm{e}^z} \,\mathrm{d}z$ $\qquad L:$



j.) $\displaystyle\int_L \left(\frac{2}{\mathrm{e}^{3z}} - \frac{1}{\overline{z}}\right) \mathrm{d}z$ $\qquad L:$



k.) $\displaystyle\oint_{|z|=2} \left(\frac{1}{\overline{z}} + z\cos z\right) \mathrm{d}z$

l.) $\displaystyle\oint_L z\left(\mathrm{e}^z + \overline{z}\right) \mathrm{d}z$ $\qquad L:\ |z| = 1$

39.) Felhasználva az

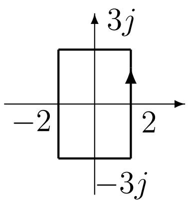
$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi j} \oint_L \frac{f(z)}{z - z_0} \,\mathrm{d}z \qquad \text{és}$$

$$f^{(n)}(z_0) = \frac{n!}{2\pi j} \oint_L \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} \,\mathrm{d}z$$

Cauchy-féle integrálformulákat, határozza meg a következő integrálok értékét!

a.) $\displaystyle\oint_L \frac{\mathrm{e}^z}{z-1} \,\mathrm{d}z$ $\qquad L:$ $\quad \alpha.)\ |z-5| = 1$ $\quad \beta.)\ |z| = 6$

b.) $\displaystyle\oint_L \frac{\operatorname{sh} 3z}{z-j} \,\mathrm{d}z$ $\qquad L:$



c.) $\displaystyle\oint_L \frac{\sin^8 z}{z-\dfrac{\pi}{2}}\,\mathrm{d}z \qquad L: \quad |z-2|=2$

d.) $\displaystyle\oint_L \frac{\mathrm{e}^{z^2}}{z^2-1}\,\mathrm{d}z \qquad L: \quad |z-\frac{1}{2}|=1$

e.) $\displaystyle\oint_L \frac{z^4\mathrm{e}^{\pi z}}{z^2+4}\,\mathrm{d}z \qquad L: \quad \alpha.)\ |z|=1 \quad \beta.)\ |z+j|=2 \quad \gamma.)\ |z|=4$

f.) $\displaystyle\oint_L \frac{\sin z}{z(z^2+4)}\,\mathrm{d}z \qquad L: \quad |z|=6$

g.) $\displaystyle\oint_L \frac{\mathrm{e}^{z}}{(z-3)^5}\,\mathrm{d}z \qquad L: \quad |z|=4$

h.) $\displaystyle\oint_L \frac{\sin z}{(z^2+9)^2}\,\mathrm{d}z \qquad L: \quad |z|=4$

i.) $\displaystyle\oint_L \left(\frac{\operatorname{sh} z}{z+j}+\frac{z}{(z^2-1)^2}\right)\mathrm{d}z \qquad L: \quad |z|=3$

j.) $\displaystyle I=\oint_{|z-3j|=1} \frac{\ln z}{z-3j}\,\mathrm{d}z \qquad \operatorname{Re} I=? \quad \operatorname{Im} I=?$

k.) $\displaystyle I=\oint_{|z+j|=\frac{1}{2}} \frac{\operatorname{ch}(z+2)}{z^2+1}\,\mathrm{d}z \qquad \operatorname{Re} I=? \quad \operatorname{Im} I=?$

l.) $\displaystyle\oint_L \frac{\sin jz+\operatorname{ch} jz}{z}\,\mathrm{d}z \qquad L: \quad \alpha.)\ |z|=2 \quad \beta.)\ |z-2|=1$

m.) $\displaystyle\oint_L \frac{1}{(z^2+2)^2}\,\mathrm{d}z \qquad L: \quad |z+2j|=2$

n.) $\displaystyle\oint_L \frac{\sin z}{z(z-j)^2}\,\mathrm{d}z \qquad L: \quad |z|=2$

40.) Állítsa elő az

$$f(z)=\frac{1}{(z-2)(z-3)}$$

függvénynek az alábbi tartományokon konvergens Laurent sorfejtését!

a.) $|z| < 2$

b.) $2 < |z| < 3$

c.) $3 < |z|$

41.) Írja fel az

$$f(z) = \frac{z}{(z-4)^2(z+2)}$$

függvény $z_0 = 4$ környezetében konvergens Laurent sorát, és állapítsa meg a sor konvergencia tartományát!

42.) Határozza meg az

$$f(z) = \frac{1}{z^2 + 3z - 4}$$

függvény $z_0 = 0$ pont körül vett azon sorfejtését, amely konvergens a $z = 3j$ pontban!

43.) Határozza meg a komplex számsík azon legbővebb tartományait, melyeken az

$$f(z) = \frac{z}{z^2 + z - 12}$$

függvény z hatványai szerint haladó hatványsorba fejthető! Valamelyik tartományon végezze el a sorfejtést!

44.) Adja meg a $w = f(z)$ függvénynek a megadott z_0 hely környezetében konvergens Laurent sorfejtését! Mi a sor konvergencia tartománya?

a.) $f(z) = \sin\dfrac{1}{z} \qquad z_0 = 0$

b.) $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z}{z^3} \qquad z_0 = 0$

c.) $f(z) = \dfrac{1}{(z-1)(z-5)} \qquad z_0 = 1$

d.) $f(z) = \dfrac{1}{z}\,\mathrm{sh}\, z \qquad z_0 = 0$

e.) $f(z) = \dfrac{1}{z^2 + 1} \qquad z_0 = j$

f.) $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)(z+1)^2} \qquad z_0 = -1$

45.) Állapítsa meg, milyen természetűek az alábbi függvények megjelölt szingularitásai!

a.) $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z - 1}{z^\alpha} \qquad z_0 = 0$ és $\alpha = 1$ ill. $\alpha = 2$

b.) $f(z) = \dfrac{\mathrm{ch}\, z}{z^4} \qquad z_0 = 0$

c.) $f(z) = \dfrac{\mathrm{ch}\, z^2 - 1}{z^5} \qquad z_0 = 0$

d.) $f(z) = \dfrac{\sin(z-1)}{(z-1)^2(z+2)^2} \qquad z_0 = 1$ ill. $z_0 = -2$

e.) $f(z) = \dfrac{\sin z^2}{z^3 + z^4} \qquad z_0 = 0$

f.) $f(z) = \mathrm{e}^{1/z^2} \qquad z_0 = 0$

46.) Számítsa ki az alábbi függvények megjelölt izolált szinguláris pontjára vonatkozó residuumát!

a.) $f(z) = \dfrac{\mathrm{e}^z - 1}{z^3} \qquad z_0 = 0$

b.) $f(z) = \dfrac{\operatorname{sh} z^2}{z^\alpha} \qquad z_0 = 0;$

$\alpha = 5$ ill. $\alpha = 6$

c.) $f(z) = \mathrm{e}^{1/z} \qquad z_0 = 0$

d.) $f(z) = \dfrac{\cos z}{\sin z} \qquad z_0 = \pi$

e.) $f(z) = \dfrac{\sin z^2}{z^2 + 2z} \qquad z_0 = 0$

f.) $f(z) = \dfrac{\ln z}{z^2 + 9} \qquad z_0 = 3j$

g.) $f(z) = \dfrac{1}{\operatorname{sh} z} \qquad z_0 = 0$

h.) $f(z) = \dfrac{\cos z^2 - 1}{z^7} \qquad z_0 = 0$

47.) Számítsa ki az alábbi zárt L görbékre a megadott integrálokat a residuum tétel felhasználásával!

a.) $\oint\limits_L \dfrac{\mathrm{e}^z - 1}{z^4}\,\mathrm{d}z \qquad L: \ |z - j| = 3$

b.) $\oint\limits_L \dfrac{\mathrm{e}^{z^2} - 1}{z^5}\,\mathrm{d}z \qquad L: \ |z + 1| = 4$

c.) $\oint\limits_{|z|=1} \operatorname{sh}\dfrac{1}{z^\alpha}\,\mathrm{d}z \qquad \alpha = 1$ ill. $\alpha = 2$

d.) $\oint\limits_L \dfrac{\operatorname{sh} z - z}{z^6}\,\mathrm{d}z \qquad L: \ |z - 1 + j| = 5$

e.) $\oint\limits_L \dfrac{\mathrm{e}^{\pi z}}{z^2 + 1}\,\mathrm{d}z \qquad L: \ |z - j| = 1$

f.) $\oint\limits_L \dfrac{\sin z}{z^3 - 3jz^2}\,\mathrm{d}z \qquad L: \ |z| = 4$

g.) $\oint\limits_L \dfrac{(z + j)(z + 2j)}{z^3 + 4z}\,\mathrm{d}z \qquad L: \ |z + j| =$
2

48.)

$$f(z) = \frac{\mathrm{e}^z}{(z - 2)^3}$$

a.) Írja fel a függvény $z_0 = 2$ körüli Laurent sorát! Vizsgálja meg a szingularitás jellegét, és adja meg a függvény residuumát a szinguláris pontban!

b.) $\oint\limits_{|z-1|=2} f(z)\,\mathrm{d}z = ?$

49.)

$$f(z) = \frac{1}{z(z - 2)^4}$$

a.) Írja fel az f függvény $z_0 = 2$ bázispontú azon Laurent sorfejtését, mely a bázispont közvetlen környezetében konvergens! Adja meg a sor konvergencia tartományát!

b.) $\operatorname*{res}_{z=2} f(z) = ?$ $\qquad \operatorname*{res}_{z=0} f(z) = ?$