ANALÍZIS(1) **VIZSGADOLGOZAT** **2011. december 22.**

Mérnök Informatikus szak — Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (3+9=12 pont)

a) Mit értünk azon, hogy $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$? ($A \in \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, $a_n \in \mathbb{R}$)

b) Igazolja, hogy egy valós számsorozat határértéke egyértelmű!

a) (D)

Azt mondjuk, hogy (a_n) konvergens és határértéke (limesze) $A \in \mathbb{R}$, jelben

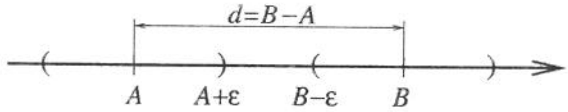
$$\lim_{n\to\infty} a_n = A\,,$$

ha $\forall\, \varepsilon > 0$-hoz ($\varepsilon \in \mathbb{R}$) $\exists\, N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$, hogy

$$|a_n - A| < \varepsilon, \quad \text{ha } n > N(\varepsilon).$$

b) (T) *Ha* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = A$ *és* $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = B$, *akkor* $A = B$.

(B) Indirekt módon bizonyítunk[3]. Tehát feltesszük, hogy $A \neq B$, például $A < B$.
Legyen $d = B - A > 0$ és $\varepsilon = \dfrac{d}{3} > 0$!



A számsorozat konvergenciája miatt létezik $N_1(\varepsilon)$ és $N_2(\varepsilon)$, hogy

$$A - \varepsilon < a_n < A + \varepsilon, \quad \text{ha } n > N_1(\varepsilon),$$
$$B - \varepsilon < a_n < B + \varepsilon, \quad \text{ha } n > N_2(\varepsilon).$$

De ekkor $\forall\, n > \max\{N_1(\varepsilon), N_2(\varepsilon)\}$ esetén:

$$a_n < A + \varepsilon < B - \varepsilon < a_n$$

Ez pedig ellentmodás, tehát nem igaz, hogy $A \neq B$, vagyis $A = B$. ■

2. feladat (5+7+5=17 pont)

Vizsgálja meg, hogy a következő sorok divergensek, feltételesen konvergensek vagy abszolút konvergensek-e!

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^{3n}}{3^{2n+1} + 2 \cdot 5^n}$, *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$, *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \cdot \frac{1}{\sqrt[n]{3n} + 2}$.

a.) $\sum\limits^{\infty} a_n$

$$|a_n| = \frac{8^n}{3 \cdot 9^n + 2 \cdot 5^n} \leq \frac{8^n}{3 \cdot 9^n + 0} = \frac{1}{3}\left(\frac{8}{9}\right)^n$$

$\frac{1}{3} \sum\limits^{\infty} \left(\frac{8}{9}\right)^n$ konv. geom. sor ($q = \frac{8}{9}$, $|q| < 1$)

$\Rightarrow \sum\limits^{\infty} a_n$ abszolút konv. an1v-111222/1.

maj. kr.

b.) $\sum^{\infty} b_n$

$$|b_n| = \frac{1}{\sqrt{2n+1}} \geq \frac{1}{\sqrt{2n+n}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad ; \quad \frac{1}{\sqrt{3}} \sum^{\infty} \frac{1}{n^{1/2}} \text{ div. } (\alpha = \tfrac{1}{2} \not> 1)$$

$\Rightarrow \sum^{\infty} |b_n|$ div., tehát a sor nem abszolút konv. (4)

min. kr.

A sor feltételesen konvergens, mert Leibniz sor, mivel váltakozó előjelű és $|b_n| \searrow 0$. (3)

c.) $\sum^{\infty} c_n$

$$|c_n| = \frac{1}{\sqrt[n]{3n}+2} = \frac{1}{\sqrt[n]{3}\sqrt[n]{n}+2} \longrightarrow \frac{1}{1 \cdot 1 + 2} = \frac{1}{3} \neq 0$$

$\Rightarrow c_n \not\to 0 \Rightarrow \sum^{\infty} c_n$ divergens, mert nem teljesül a konvergencia szükséges feltétele.

3. feladat (12+3=15 pont)

a) Hol és milyen jellegű szakadásai vannak a következő függvénynek?

$$f(x) = \frac{x^2 - 5x + 6}{|x^2 - 2x|}$$

(A szakadási helyeken határozza meg a függvény bal és jobb oldali határértékét!)

b) Mondja ki a (folytonos függvényekkel kapcsolatban tanult) Bolzano tételt!

a.) $f(x) = \frac{1}{|x|} \frac{x-2}{|x-2|} (x-3)$ Szakadási helyek: 0, 2 (2)

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} \frac{1}{\underbrace{|x|}_{\to +0}} \underbrace{\left(\frac{x-2}{|x-2|}(x-3)\right)}_{\to 3} = \infty$$: másodfajú szakadás (4)

(6)

$$\lim_{x \to 2+0} \underbrace{\frac{x-2}{x-2}}_{=1} \underbrace{\frac{1}{|x|}(x-3)}_{\to -\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x \to 2-0} \underbrace{\frac{x-2}{-(x-2)}}_{=-1} \underbrace{\frac{x-3}{|x|}}_{\to -\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$$

véges ugrás van $x = 2$-ben (elsőfajú sz.)

b.) (T) Bolzano tétel:

Ha f folytonos $[a,b]$-ben, akkor minden $f(a)$ és $f(b)$ közé eső c értéket felvesz $[a,b]$-ben.

an1v 111222/2.

4. feladat (8+8=16 pont)

a) Legyen x_0 az f valós függvény értelmezési tartományának belső pontja. Milyen kapcsolat van a következő két állítás között:

i) Az f függvény folytonos x_0-ban. *ii)* Az f függvény differenciálható x_0-ban.

A tanult tételt mondja ki és bizonyítsa be!

b) A definíció segítségével határozza meg az $f(x) = \sqrt{x}$ függvény deriváltját $x > 0$ esetén!

a.) T Ha f differenciálható x_0-ban, akkor ott f folytonos 2

B A differenciálhatóság szükséges és elégséges feltétele alapján:

$$\Delta f = f(x_0+h) - f(x_0) = A \cdot h + \varepsilon(h) \cdot h,$$

ahol A független h-tól és $\lim_{h \to 0} \varepsilon(h) = 0$. 3

$$\Rightarrow f(x_0+h) = f(x_0) + A \cdot h + \varepsilon(h) \cdot h$$

$h \to 0$-ra mindkét oldal határértékét véve:

$$\underbrace{\lim_{h\to 0} f(x_0+h)}_{} = \lim_{h \to 0} (f(x_0) + \underbrace{A \cdot h}_{\downarrow 0} + \underbrace{\varepsilon(h)}_{\downarrow 0} \cdot \underbrace{h}_{\downarrow 0})$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$$: határérték = helyettesítési érték

Tehát f folyt. x_0-ban. 3

b)
$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \text{ (2) } = \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} = \text{ (1) }$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sqrt{x+h} - \sqrt{x}}{h} \cdot \frac{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} \text{ (2) } = \lim_{h\to 0} \frac{x + h - x}{h(\sqrt{x+h} + \sqrt{x})} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \underbrace{\frac{h}{h}}_{=1} \frac{1}{\sqrt{x+h} + \sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{(3)}$$

5. feladat (8 pont)*

Az $y = f(x)$ függvény folytonosan deriválható, áthalad az $x_0 = 0$, $y_0 = 1$ koordinátájú ponton, és kielégíti az

$$\ln(x+y) = y \sin(\pi x)$$

implicit egyenletet. Van-e lokális szélsőértéke az f függvénynek x_0-ban?

an1v111222/3.

Mindkét oldalt x szerint deriválva:

$$\frac{1}{x+y}(1+y') = y' \cdot \sin(\pi x) + y \cdot \cos(\pi x) \cdot \pi$$ (4)

Behelyettesítve $x=0$-t $(y(0)=1)$:

$$\frac{1}{0+1}(1+y'(0)) = y'(0) \cdot \underbrace{\sin 0}_{=0} + 1 \cdot \underbrace{\cos 0}_{=1} \cdot \pi$$

$$\Rightarrow \quad y'(0) = f'(0) = \pi - 1$$ (2)

Mivel $f'(0) \neq 0 \Rightarrow f$-nek nincs lokális szélsőértéke $x=0$-ban, mert nem teljesül a szükséges feltétel. (2)

6. feladat (8+7=15 pont)*

$$a) \quad \int x \cdot \operatorname{arctg}(2x)\, dx = ?, \qquad b) \quad \int_{x=0}^{\pi/2} \sin(2x)\, \cos(3x)\, dx = ?$$

a.) $$I_a = \int x \cdot \operatorname{arctg} 2x \, dx = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} 2x - \int \frac{x^2}{1+4x^2}\, dx$$ (4)

$u' = x \qquad v = \operatorname{arctg} 2x$

$u = \frac{x^2}{2} \qquad v' = \frac{1}{1+4x^2} \cdot 2$

$$\frac{x^2}{1+4x^2} = \frac{1}{4} \frac{(4x^2+1)-1}{1+4x^2} = \frac{1}{4}\left(1 - \frac{1}{1+(2x)^2}\right)$$ (1)

$$I_a = \frac{x^2}{2} \operatorname{arctg} 2x - \frac{1}{4}\left(x - \frac{\operatorname{arctg} 2x}{2}\right) + C$$ (3)

b.) $$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2}\left(\sin(a+b)x + \sin(a-b)x\right)$$

$$I_b = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{2}\left(\sin 5x + \underbrace{\sin(-x)}_{=-\sin x}\right) dx =$$ (3)

$$= \frac{1}{2}\left(\frac{-\cos 5x}{5} + \cos x\right)\Big|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2}\left(-\frac{\cos 5\frac{\pi}{2}}{5} + \cos\frac{\pi}{2} - \right.$$ (3)

$$\left. - \left(\frac{-\cos 0}{5} + \cos 0\right)\right) = \frac{1}{2}\left(0 + 0 - \left(-\frac{1}{5} + 1\right)\right) \left(= -\frac{4}{10}\right)$$ (1)

an1v111222/4.

7. feladat (7+10=17 pont)*

$$a)\quad \int_0^1 \sqrt[3]{2x+1}\,dx = ? \qquad\qquad b)\quad \int \frac{x-1}{x^3+x}\,dx = ?$$

a.) $\frac{1}{2}\int_0^1 2\,(2x+1)^{1/3}\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{(2x+1)^{4/3}}{\frac{4}{3}}\Big|_0^1 =$

$f'\ f^{1/3}$

$= \frac{3}{8}\left(3^{\frac{4}{3}}-1\right)$

b.) $\frac{x-1}{x^3+x} = \frac{x-1}{x(x^2+1)} = \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1}$ 2

$x-1 = A(x^2+1) + (Bx+C)x$

$x-1 = (A+B)x^2 + Cx + A$

$\Rightarrow A=-1,\ C=1,\ A+B=0 \ \therefore\ B=1$ 3

$I_b = \int\left(-\frac{1}{x} + \underbrace{\frac{x+1}{x^2+1}}_{\frac{1}{2}\frac{2x}{x^2+1}+\frac{1}{1+x^2}}\right)dx =$

$= -\ln|x| + \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + \operatorname{arctg} x + C$

1 2 1 1

Pótfeladatok (csak az elégséges és közepes vizsgajegy eléréséhez javítjuk ki):

8. feladat (10 pont)

$$f(x) = (9x^2+2)\,e^{2x}$$

a) Vizsgálja meg az f függvényt monotonitás szempontjából, és határozza meg lokális szélsőérték helyeit és azok jellegét!

b) Írja föl a függvény grafikonját az $x_0 = 0$ pontban érintő egyenes egyenletét!

$f'(x) = 18x\,e^{2x} + (9x^2+2)e^{2x}\cdot 2$ 2 $x \in \mathbb{R}$

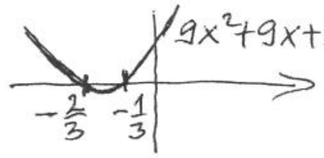
an1v-111222/5.

6

$f(x) = 2 \underbrace{e^{2x}}_{>0} (9x + 9x^2 + 2) = 0 \Rightarrow 9x^2 + 9x + 2 = 0$:

... $x = -\frac{1}{3}$, $x = -\frac{2}{3}$

x:	$(-\infty, -\frac{2}{3})$	$-\frac{2}{3}$	$(-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3})$	$-\frac{1}{3}$	$(-\frac{1}{3}, \infty)$
f'	$+$	0	$-$	0	$+$
f	$\nearrow$	lok. max	$\searrow$	lok. min.	$\nearrow$



b.) $y_é = f(0) + f'(0)(x - 0) = 2 + 4x$ 2

9. feladat (10 pont)

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin(3x^2)}{\sin(2x^2)} = ?$, b) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{e^{3x} - e^{x} + e^{-5x}}{2e^{3x} + e^{2x} + e^{-3x}} = ?$

a.) $\boxed{}$ $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\arcsin 3x^2}{\sin 2x^2} \underset{\frac{0}{0}}{\overset{L'H}{=}} \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\overbrace{\frac{1}{\sqrt{1-9x^4}}}^{\to 1}}{\underbrace{\cos 2x^2}_{1}} \cdot \underbrace{\dfrac{6x}{4x}}_{=\frac{3}{2}} = \dfrac{3}{2}$

b) $\boxed{5}$ $\lim\limits_{x\to\infty} \underbrace{\dfrac{e^{3x}}{e^{3x}}}_{=1} \dfrac{1 - e^{-2x} + e^{-8x}}{2 + e^{-x} + e^{-6x}} = \dfrac{1 - 0 + 0}{2 + 0 + 0} = \dfrac{1}{2}$