ANALÍZIS(1) — Műszaki Informatika szak

VIZSGADOLGOZAT I. rész

2003. jan. 23. — Munkaidő: 90 perc

BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

---

1. feladat (6 pont)

a) Írja le a hányadoskritérium limeszes alakját!

b) Írja le a Lagrange-féle középértéktételt!

2. feladat (12 pont)

a) Írja le a számsorozatokra tanult rendőrelvet!

b)

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{3n^2+8}\right)^n = ?$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+1}{n^2+8}\right)^{n^2+3} = ?$$

3. feladat (11 pont)

Legyen c az f függvény értelmezési tartományának belső pontja!

a) Mit értünk azon, hogy f-nek lokális maximuma van a c pontban?

b) Melyik állítás igaz?

b1) $f'(c)=0 \quad \Longrightarrow \quad f$-nek lokális szélsőértéke van c-ben

b2) $f'(c)=0 \quad \Longleftarrow \quad f$-nek lokális szélsőértéke van c-ben

Az igaz állítást bizonyítsa be, a hamis állításra adjon ellenpéldát!

4. feladat (18 pont)

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\sin\left(4\sqrt[3]{x^2}\right)}{\sqrt[5]{x}}, & \text{ha } x>0\\ (x+7)\cdot e^{\frac{1}{x+3}}, & \text{ha } x\le 0\end{cases}$$

A szakadási pontokban keresse meg a jobb és bal oldali határértékeket!
Írja fel $f'(x)$ értékét ahol az létezik!

5. feladat (8 pont)

$$f(x)=x^2\cdot e^{-4x}$$

Van-e minimuma, illetve maximuma az f függvénynek a $[0,1]$ intervallumon? (Indokoljon!)
Ha igen, határozza meg!

6. feladat (16 pont)*

a) $\displaystyle\int x e^{-5x^2}\,dx = ?$ b) $\displaystyle\int x e^{-5x}\,dx = ?$ c) $\displaystyle\int_0^\infty x e^{-5x}\,dx = ?$

7. feladat (17 pont)*

a) $\displaystyle\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx = ?$ b) $\displaystyle\int \frac{x^3+5x-1}{x^2+5}\,dx = ?$

8. feladat (12 pont)*

Írja le az integrálkritériumot és alkalmazza a

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n\ln 2n}$$

sor konvergenciájának eldöntésére!

A *-gal jelölt feladatokból legalább 16 pontot el kell érni!

Pótfeladatok (csak az elégséges (indokolt! esetben a közepes) vizsgához javítjuk ki):

9. feladat (10 pont)

Konvergens-e az alábbi numerikus sor?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1+\frac{1}{n}}{2n^2+6+\cos^2 3n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\left(\ln\sqrt[n]{n}\right)^2+1}$

10. feladat (10 pont)

$$f(x)=\arcsin e^x$$

a) Határozza meg f értelmezési tartományát és értékkészletét!

b) Adja meg azt a legbővebb intervallumot, melyben a függvény invertálható! (Indokoljon!)
Írja fel az inverzfüggvényt, és adja meg annak értelmezési tartományát!

ANALIZIS(1) **VIZSGADOLGOZAT I. rész** **2003. jan. 23.**
Műszaki Informatika szak Munkaidő: 90 perc
BME, Természettudományi Kar, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

1. feladat (6 pont)

a) Írja le a hányadoskritérium limeszes alakját!
b) Írja le a Lagrange-féle középértéktételt!

a) (T) Hányados kritérium:
(3)

1. $(a_n > 0, \forall n) \wedge \left(\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c < 1\right) \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konv.

2. $(a_n > 0, \forall n) \wedge \left(\exists \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c > 1\right) \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ div.

b.) (T) Lagrange-féle középértéktétel:
(3) Ha f folytonos $[a,b]$-n, differenciálható (a,b)-n, akkor $\exists\ \xi \in (a,b)$:

$$f'(\xi) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

2. feladat (12 pont)

a) Írja le a számsorozatokra tanult rendőrelvet! (2)

(5) $\lim_{n\to\infty} \left(\frac{n^2+1}{3n^2+8}\right)^n = ?$

b) (5)

$$\lim_{n\to\infty} \underbrace{\left(\frac{n^2+1}{n^2+8}\right)^{n^2+3}}_{:=b_n} = ?$$

$b_n = \left(\frac{n^2+1}{n^2+8}\right)^{n^2} \cdot \left(\frac{n^2+1}{n^2+8}\right)^3 =$ (1)

$= \frac{\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}}{\left(1+\frac{8}{n^2}\right)^{n^2}} \cdot \left(\frac{1+\frac{1}{n^2}}{1+\frac{8}{n^2}}\right)^3 \implies$ (2)

$\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{e^1}{e^8} \cdot 1^3 = e^{-7}$ (2)

$\boxed{\text{Megjegyz. } \left(1+\frac{\alpha}{n}\right)^n \to e^\alpha \ (1)}$

a.) (T) Rendőrelv:

$$\begin{pmatrix} a_n \to A & \text{és} & a_n \le c_n \le b_n \\ b_n \to A & & \forall n \in \mathbb{N} \end{pmatrix} \implies (c_n \to A) \quad (2)$$

$$0 < \underbrace{\left(\frac{n^2+1}{3n^2+8}\right)^n}_{:=a_n} < \left(\frac{n^2+n^2}{3n^2+0}\right)^n = \left(\frac{2}{3}\right)^n \to 0$$
(1) 0 (2) (1)

$\implies \lim_{n\to\infty} a_n = 0$ a rendőrelv miatt (1)

v1 030123/1

$\boxed{\text{Megjegyzés: } a_n \sim \left(\frac{1}{3}\right)^n \ (1) \quad \left(\frac{1}{3}\right)^n \to 0 \ (1) \implies a_n \to 0 \quad \text{HIÁNYOS.}}$

3. feladat (11 pont)

Legyen c az f függvény értelmezési tartományának belső pontja!
a) Mit értünk azon, hogy f-nek lokális maximuma van a c pontban?
b) Melyik állítás igaz?
b1) $f'(c) = 0 \implies f$-nek lokális szélsőértéke van c-ben
b2) $f'(c) = 0 \impliedby f$-nek lokális szélsőértéke van c-ben
Az igaz állítást bizonyítsa be, a hamis állításra adjon ellenpéldát!

(2)
a) (D) f-nek lokális maximuma van az értelmezési tartomány belső c pontjában, ha $\exists\ K_{c,\delta}$: $f(x) \le f(c)$, ha $x \in K_{c,\delta}$.

b.) (T) Ha f a c helyen differenciálható és ott lokális szélsőértéke van, akkor $f'(c) = 0$. (2)
$(K_{c,\delta} \subset D_f)$
Tehát a b2) állítás igaz.

(B) Pl. lokális maximumra:
(5)

$$\lim_{h\to -0} \underbrace{\frac{f(c+h)-f(c)}{h}}_{\frac{-}{-}} = \underbrace{f'_-(c) = f'(c)}_{\text{deriválhatóság miatt}} \ge 0$$

deriv. def (2)
$f'_+ = f'_- = f'$ (1)
előjelek vizsg. (2)

$$\lim_{h\to +0} \underbrace{\frac{f(c+h)-f(c)}{h}}_{\frac{-}{+}} = f'_+(c) = f'(c) \le 0$$

$\implies f'(c) = 0$ (vízszintes érintő) ∎

b1) nem igaz. Pl. $f(x) = x^3$: $f'(0) = 0$, de nincs lokális szélsőértéke $x = 0$-ban. (2)

4. feladat (18 pont)

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{\sin\left(4\sqrt[3]{x^2}\right)}{\sqrt[5]{x}}, & \text{ha } x > 0 \\ (x+7)\, e^{\frac{1}{x+3}}, & \text{ha } x \le 0 \end{cases}$$

A szakadási pontokban keresse meg a jobb és bal oldali határértékeket!
Írja fel $f'(x)$ értékét ahol az létezik!

$$f(+0) = \lim_{x\to+0} f(x) = \lim_{x\to+0} \frac{\sin 4\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[5]{x}} = \lim_{x\to+0} \underbrace{\frac{\sin 4\sqrt[3]{x^2}}{4\sqrt[3]{x^2}}}_{\to 1} \ \underbrace{\frac{4\sqrt[3]{x^2}}{\sqrt[5]{x}}}_{=4x^{\frac{2}{3}-\frac{1}{5}} = 4x^{\frac{7}{15}} \to 0} = 0 \quad (5)$$

$$f(-0) = \lim_{x\to-0} (x+7)\, e^{\frac{1}{x+3}} = 7e^{1/3} \quad (1)$$

v1 030123/2.

$$f(-3+0) = \lim_{x\to -3+0} \underbrace{(x+7)}_{4}\, e^{\frac{1}{x+3}\to\infty} = \infty \quad (1)$$

$$f(-3-0) = \lim_{x\to -3-0} \underbrace{(x+7)}_{4}\, e^{\frac{1}{x+3}\to -\infty} = 0 \quad (2)$$

$f'(-3)$ ∄, mert f nincs értelmezve $x=-3$-ban. (1)

(2) $f'(0)$ ∄, mert f nem folytonos $x=0$-ban $(f(-0)\neq f(+0))$ (1)

$$f'(x) = \begin{cases} \dfrac{\cos(4\sqrt[3]{x^2})\cdot 4\cdot\frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}\cdot\sqrt[5]{x} - \sin(4\sqrt[3]{x^2})\cdot\frac{1}{5}x^{-\frac{4}{5}}}{(\sqrt[5]{x})^2}, & \text{ha } x>0 \quad (3)\\[2ex] e^{\frac{1}{x+3}} + (x+7)\, e^{\frac{1}{x+3}}\, \dfrac{-1}{(x+3)^2}, & \text{ha } x<0 \text{ és } x\neq -3 \quad (2) \end{cases}$$

5. feladat (8 pont)

$$f(x) = x^2\cdot e^{-4x}$$

Van-e minimuma, illetve maximuma az f függvénynek a $[0,1]$ intervallumon? (Indokoljon!) Ha igen, határozza meg!

f folytonos $[0,1]$-en $\xRightarrow{\text{Weierstr. II. tétele}}$ ∃ minimuma és maximuma $[0,1]$-en (2)

$$f'(x) = 2x e^{-4x} + x^2 e^{-4x}(-4) = 2xe^{-4x}(1-2x) = 0 \quad (2)$$

$\Rightarrow$ lok. szélsőérték lehet $\underbrace{x=0\text{-ban}}_{\text{ez végpont is}}$ ill. $x=\frac{1}{2}$-ben (1)

Így a minimum ill. maximum a következő három függvényérték közül kerül ki: (1)

$f(0)=0$; $f(\frac{1}{2}) = \frac{1}{4}e^{-2} = \frac{1}{4e^2}$; $f(1) = e^{-4} = \frac{1}{e^4}$

$f(0) < f(1) < f(\frac{1}{2})$

$\Rightarrow \min\limits_{x\in[0,1]}\{f(x)\} = 0$ (1) ; $\max\limits_{x\in[0,1]}\{f(x)\} = \frac{1}{4e^2}$ (1)

6. feladat (16 pont)*

a) $\int xe^{-5x^2}\,dx = ?$ b) $\int xe^{-5x}\,dx = ?$ c) $\int_0^\infty xe^{-5x}\,dx = ?$

(3) a.) $\int xe^{-5x^2}dx = -\frac{1}{10}\int \underbrace{-10x\, e^{-5x^2}}_{f'e^f} dx = -\frac{1}{10}e^{-5x^2}$ (2) $+ C$ (1)

(5) b.) Parciális integrálás ($\int uv'dx = uv - \int u'v\,dx$)

$$\int x e^{-5x}dx = \underbrace{-\frac{x}{5}e^{-5x} + \frac{1}{5}\int e^{-5x}dx}_{(4)} = -\frac{x}{5}e^{-5x} - \frac{1}{25}e^{-5x} + C \quad (1)$$

$u=x \quad v'=e^{-5x}$

$u'=1 \quad v=-\frac{1}{5}e^{-5x}$

(8) c.) $\int_0^\infty xe^{-5x}dx = \lim\limits_{\omega\to\infty}\int_0^\omega xe^{-5x}dx$ (1) $\overset{\text{b) alapján}}{=} \lim\limits_{\omega\to\infty}\left(-\frac{x}{5}e^{-5x} - \frac{1}{25}e^{-5x}\right)\Big|_0^\omega$ (1) $=$

$$= \lim_{\omega\to\infty}\left(-\frac{1}{5}\underbrace{\frac{\omega}{e^{5\omega}}}_{\to 0} - \frac{1}{25}\underbrace{e^{-5\omega}}_{\to 0\ (1)} - \left(0-\frac{1}{25}\right)\right) = \frac{1}{25} \quad (1)$$

N-L (2)

0, mert $\lim\limits_{\omega\to\infty}\frac{\omega}{e^{5\omega}} \left(\frac{\infty}{\infty}\right) \overset{L'H}{=} \lim\limits_{\omega\to\infty}\frac{1}{5e^{5\omega}} = 0$ (2)

7. feladat (17 pont)*

a) $\int \frac{2x}{\sqrt{x^2+2x+5}}\,dx = ?$ b) $\int \frac{x^3+5x-1}{x^2+5}\,dx = ?$

(10) a.) $I_a = \int \underbrace{(2x+2)}_{f'}\underbrace{(x^2+2x+5)^{-\frac{1}{2}}}_{f^\alpha}dx - 2\underbrace{\int\frac{1}{\sqrt{x^2+2x+5}}dx}$ (2) $=$

$= \int \frac{1}{\sqrt{(x+1)^2+4}}dx$ (2) $= \frac{1}{2}\int\frac{1}{\sqrt{1+(\frac{x+1}{2})^2}}dx$ (1)

$= \frac{\sqrt{x^2+2x+5}}{\frac{1}{2}}$ (2) $- 2\cdot\frac{1}{2}\,\frac{\operatorname{arsh}\frac{x+1}{2}}{\frac{1}{2}}$ (2) $+ C$ (1) $= 2\sqrt{x^2+2x+5} - 2\operatorname{arsh}\frac{x+1}{2} + C$ (2)

(7) b.) $I_b = \int\frac{x(x^2+5)-1}{x^2+5}dx = \int\left(x - \frac{1}{x^2+5}\right)dx$ (2) $= \frac{x^2}{2}$ (1) $- \frac{1}{5}\int\frac{1}{1+(\frac{x}{\sqrt5})^2}dx$ (2) $=$

$= \frac{x^2}{2} - \frac{1}{5}\,\frac{\operatorname{arctg}\frac{x}{\sqrt5}}{\frac{1}{\sqrt5}} + C$ (2)

8. feladat (12 pont)*

Írja le az integrálkritériumot és alkalmazza a

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \ln 2n}$$

sor konvergenciájának eldöntésére!

3 *Integrálkritérium*:

Legyen f pozitív értékű monoton csökkenő függvény $[1,\infty)$-en és $f(k) = a_k > 0$.

1. Ha $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ konvergens $\Longrightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergens
2. Ha $\int_1^{\infty} f(x)\,dx$ divergens $\Longrightarrow$ $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ divergens

$f(x) := \dfrac{1}{x \ln 2x}$ monoton csökkenő, ha $x>1$ 1 és $f(n) = a_n > 0$ 1

$$\int_1^{\infty} \frac{1}{x \ln 2x}\,dx \ (1) = \lim_{\omega\to\infty} \int_1^{\omega} \frac{\frac{1}{x}}{\ln 2x}\,dx \ (1) = \lim_{\omega\to\infty} \ln \ln 2x \Big|_1^{\omega} \ (2) =$$

$\frac{f'}{f}$

$$(\ln 2x)' = \frac{1}{2x}\cdot 2 = \frac{1}{x}$$

$$= \lim_{\omega\to\infty} \left(\ln \ln 2\omega - \ln \ln 2 \right) \ (1) = \infty \ (1)$$

$$\Rightarrow \sum_1^{\infty} \frac{1}{n \ln n} \text{ divergens } (1)$$

Pótfeladatok (csak az elégséges (indokolt! esetben a közepes) vizsgához javítjuk ki):

9. feladat (10 pont)

Konvergens-e az alábbi numerikus sor?

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{2n^2+6+\cos^2 3n}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(\ln \sqrt[n]{n})^2+1}$

5 a) $\sum a_n$; $a_n > 0$

$a_n < \dfrac{1+1}{2n^2} = \dfrac{1}{n^2}$; $\sum^{\infty} \dfrac{1}{n^2}$ konv. $\Rightarrow \sum^{\infty} a_n$ is konv.

5 b) $\sum^{\infty} b_n$; $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{(\ln \sqrt[n]{n})^2+1} = 1 \neq 0$; nem

teljesül a konvergencia szükséges feltétele $\Rightarrow \sum^{\infty} b_n$ div.

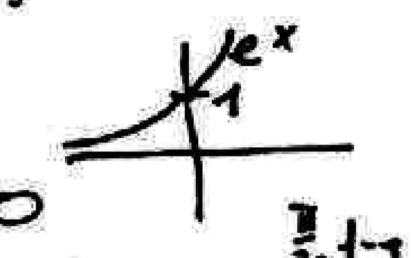
v1 030123/5.

10. feladat (10 pont)

$$f(x) = \arcsin e^x$$

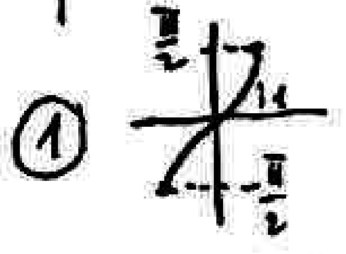
a) Határozza meg f értelmezési tartományát és értékkészletét!
b) Adja meg azt a legbővebb intervallumot, melyben a függvény invertálható! (Indokoljon!)
Írja fel az inverzfüggvényt, és adja meg annak értelmezési tartományát!

a.) $-1 \le e^x \le 1$-nek kell teljesülni. 1



Mivel $e^x > 0$, ezért $e^x \le 1$ teljesítendő $\Rightarrow x \le 0$

$D_f = (-\infty, 0]$ 2 így $0 < e^x \le 1$ miatt $R_f = (0, \frac{\pi}{2}]$ 1



b.) $x_1 < x_2 \le 1$ esetén $e^{x_1} < e^{x_2} \Rightarrow \arcsin e^{x_1} < \arcsin e^{x_2}$,

tehát f szig. mon. nő D_f-en 1 $\Rightarrow \exists f^{-1}$ D_f-en 1

(Vagy: $f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-e^{2x}}}\cdot e^x > 0 \Rightarrow f$ szig. mon. nő)

$y = \arcsin e^x \ \to\ \sin y = e^x \ \to\ x = \ln \sin y$

$x \leftrightarrow y$: $f^{-1}(x) = \ln \sin x$ 3

$D_{f^{-1}} = R_f = (0, \frac{\pi}{2}]$

1

v1 030123/6.