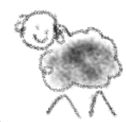
Az algebra alaptétele:

Minden komplex együtthatós polinom felírható elsőfokú polinomok szorzataként, vagy minden komplex polinómnak van gyöke.

Sorozat konvergenciája, korlátossága és monotonitása közti kapcsolat:




Ha egy sorozat konvergens, akkor korlátos. Ha egy sorozat monoton növő és felülről korlátos, akkor konvergens.

Szorzat függvény deriválási szabálya:

Ha f és g az x_0 pontban deriválható függvények, akkor fg is deriválható x_0-ban, és $(fg)'(x_0) =$

$$= f'(x_0)\,g(x_0) + f(x_0)\,g'(x_0).$$

Bizonyítás:

Ha az f és g függvény differenciálható az x_0-ban, akkor akkor folytonosak is ott, tehát:

$$(fg)'(x_0) = \lim \; f(x_0+h)\,g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)$$

$$(fg)'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0)g(x_0)}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0+h) - f(x_0+h)g(x_0)}{h} + \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)g(x_0) - f(x_0)g(x_0)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} f(x_0+h) \lim_{h \to 0} \frac{g(x_0+h) - g(x_0)}{h} + g(x_0) \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} =$$

$$= f(x_0) g'(x_0) + f'(x_0) g(x_0)$$

Elégséges feltétel, f függvény egy (a,b) intervallumon konvex:

Ha f kétszer differenciálható, és $f''(x) \geq 0$ minden $x \in (a,b)$ esetén, akkor f konvex az (a,b) intervallumon.

Vagy:

Ha f differenciálható (a,b)-n, és itt f' monoton nő, akkor akkor f konvex az (a,b) intervallumon.

Helyettesítéses integrál határozatlan integrálra:

$$\int f(x)\,dx = \int f(\varphi(t))\,\varphi'(t)\,dt \Big|_{t=\varphi^{-1}(x)}$$

* Newton-Leibniz formula: Határozott integráláshoz

Ha $f \in R[a,b]$ és $\exists F$, melyre $F' = f$ az $[a,b]$ intervallumon, akkor $\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$.

Rendőrelv:

Ha $a_n \le b_n \le c_n$, és $\lim a_n = \lim_{n\to\infty} c_n = A$, akkor $\lim_{n\to\infty} b_n = A$, ugyanis létezik $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$, hogy $n \ge N_1$ esetén $|a_n - A| < \varepsilon$ és $n \ge N_2$ esetén $|c_n - A| < \varepsilon$, tehát $n \ge N = \max(N_1, N_2)$ esetén

$$A - \varepsilon \le a_n \le b_n \le c_n \le A + \varepsilon$$ vagyis $|b_n - A| < \varepsilon$.

Weierstrass II.:

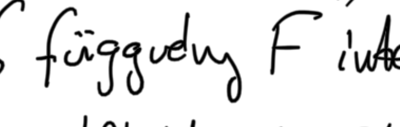
Korlátos zárt intervallumon értelmezett folytonos függvény felveszi a maximumát és a minimumát.

Integrálás II. alaptétele:

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt$$

A Riemann-integrálható f függvény F integrálfüggvénye folytonos. Ha f folytonos, F differenciálható, és $F' = f$.

Hogyan számoljuk ki 2 trigonometrikus alakban felírt komplex szám hányadosát?



$$\frac{r_1(\cos\varphi_1 + i\sin\varphi_1)}{r_2(\cos\varphi_2 + i\sin\varphi_2)} = \frac{r_1}{r_2}\cdot\left(\cos(\varphi_1 - \varphi_2) + i\sin(\varphi_1 - \varphi_2)\right)$$

L'Hospital szabály:

Ha $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = \lim\limits_{x\to 0} g(x) = 0$, akkor $\lim\limits_{x\to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)}$,

amennyiben a jobb oldal létezik.

Adjon egy szükséges valamint egy elégséges feltételt arra, hogy az $f: I \to \mathbb{R}$ teljes értelmezési tartományán differenciálható függvénynek az $x_0 \in I$ pontban lokális szélsőértékhelye van.

Elégséges feltétel: Ha $f'(x_0) = 0$, és f' előjelet vált x_0-ban, akkor f-nek lokális szélsőértéke van x_0-ban.
(vagy előjelváltás helyett $\exists f''(x_0) \neq 0$)

Szükséges feltétel: Ha f-nek lokális szélsőértéke van x_0-ban, akkor $f'(x_0) = 0$.

Parciális integrálás módszere:

$$\int f(x)\, g'(x)\, dx = f(x)\, g(x) - \int f'(x)\, g(x)\, dx,$$ amennyiben mindkét oldalon a deriváltak és integrálok léteznek.

Indoklás: Ha f és g deriválható, akkor

$(fg)' = f'g + fg' \Longrightarrow fg' = (fg)' - f'g$, mindkét oldalt integrálva, és felhasználva, hogy $\int (fg)' = fg$, kapjuk az állítást.

Sorozat torlódási pontjai:

Az $A \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ az (a_n) sorozat torlódási pontja, ha $\exists$ olyan (a_{n_k}) részsorozat, amelyre $\lim_{k \to \infty} a_{n_k} = A$.

Vagy: ha A minden környezetébe végtelen sok sorozatelem esik.

Adjon egy szükséges feltételt arra, hogy egy differenciálható függvény egy intervallumon invertálható!

Ha f az I intervallumon deriválható és invertálható, akkor I-n szigorúan monoton, így $f'(x) \geq 0$ $\forall x \in I$ esetén, vagy $f'(x) \leq 0$ $\forall x \in I$ esetén.

Adja meg minden $\alpha \in \mathbb{R}$, és differenciálható f függvény esetén az $f^{\alpha}(x) f'(x)$ függvény primitív függvényét!

Ha $\alpha \neq -1$, akkor

$$\int f^{\alpha}(x) f'(x)\, dx = \frac{f^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C,$$

$\alpha = -1$ esetén pedig $\int f^{\alpha}(x) f'(x)\,dx = \ln|f(x)| + c$.