Bevezetés a számításelméletbe II.
Pótzárthelyi feladatok — pontozási útmutató
2018. május 14.

Általános alapelvek.

A pontozási útmutató célja, hogy a javítók a dolgozatokat egységesen értékeljék. Ezért az útmutató minden feladat (legalább egy lehetséges) megoldásának főbb gondolatait és az ezekhez rendelt részpontszámokat közli. Az útmutatónak nem célja a feladatok teljes értékű megoldásának részletes leírása; a leírt lépések egy maximális pontszámot érő megoldás vázlatának tekinthetők.

Az útmutatóban feltüntetett részpontszámok csak akkor járnak a megoldónak, ha a kapcsolódó gondolat egy áttekinthető, világosan leírt és megindokolt megoldás egy lépéseként szerepel a dolgozatban. Így például az anyagban szereplő ismeretek, definíciók, tételek puszta leírása azok alkalmazása nélkül nem ér pontot (még akkor sem, ha egyébként valamelyik leírt tény a megoldásban valóban szerephez jut). Annak mérlegelése, hogy az útmutatóban feltüntetett pontszám a fentiek figyelembevételével a megoldónak (részben vagy egészében) jár-e, teljes mértékben a javító hatásköre.

Részpontszám jár minden olyan ötletért, részmegoldásért, amelyből a dolgozatban leírt gondolatmenet alkalmas kiegészítésével a feladat hibátlan megoldása volna kapható. Ha egy megoldó egy feladatra több, egymástól lényegesen különbözo megoldást is elkezd, akkor legfeljebb az egyikre adható pontszám. Ha mindegyik leírt megoldás vagy megoldásrészlet helyes vagy helyessé kiegészíthető, akkor a legtöbb részpontot éro megoldáskezdeményt értékeljük. Ha azonban több megoldási kísérlet között van helyes és (lényeges) hibát tartalmazó is, továbbá a dolgozatból nem derül ki, hogy a megoldó melyiket tartotta helyesnek, akkor a kevesebb pontot érő megoldáskezdeményt értékeljük (akkor is, ha ez a pontszám 0).

Az útmutatóban szereplő részpontszámok szükség esetén tovább is oszthatók. Az útmutatóban leírttól eltérő jó megoldás természetesen maximális pontot ér.

1. Legyen G egyszerű, összefüggő, síkbarajzolható gráf. Mutassuk meg, hogy ha G-ből töröljük két éldiszjunkt (vagyis közös élet nem tartalmazó) feszítőfájának éleit, akkor a kapott gráf biztosan nem lesz összefüggő.

* * * * *

Ha G n csúcsú, egyszerű, síkbarajzolható gráf, akkor az előadáson látottak szerint legfeljebb $3n-6$ éle lehet. (2 pont)
G bármely feszítőfájának $n-1$ éle van, (2 pont)
így ha két éldiszjunkt feszítőfa éleit töröljük G-ből, akkor annak élszáma $(2n-2)$-vel csökken, (2 pont)
vagyis legfeljebb $n-4$ lesz. (1 pont)
Tudjuk, hogy egy összefüggő, n csúcsú gráfnak legalább $n-1$ éle van (pl. mert van feszítőfája – e megjegyzés hiányáért ne vonjunk le pontot), (2 pont)
így a maradék gráf biztosan nem összefüggő. (1 pont)

2. A $K_{3,3}$ teljes páros gráfba behúzunk két nem csatlakozó élet úgy, hogy a kapott G gráf egyszerű legyen. Határozzuk meg G kromatikus számát.

* * * * *

Legyen a páros gráf két osztálya $A = \{a, b, c\}$ és $B = \{x, y, z\}$. Az új éleket vagy A-n, vagy B-n belül kell behúzni, különben a gráf nem maradna egyszerű (hiszen az A és B közti élek mind szerepelnek G-ben). (1 pont)
Mivel az új élek nem csatlakozók, egyik osztályba sem húzhatunk be kettőt (mivel 3 csúcson nem lehet két független élet behúzni). (1 pont)
Tegyük fel (anélkül, hogy az az általánosság rovására menne), hogy az ab és xy éleket húztuk be. A kapott gráfban van egy 4 csúcsú klikk, melyet az a, b, x, y pontok alkotnak, (2 pont)
így a keresett kromatikus szám legalább 4. (2 pont)
4 színnel való jó színezést nem nehéz megadni: az a, c csúcsokat színezzük 1-esre, az x, z pontokat

2-esre, b-t 3-asra, y-t pedig 4-esre. (2 pont)
A gráf kromatikus száma így legfeljebb 4, (1 pont)
a fentiek figyelembevételével tehát pontosan 4. (1 pont)

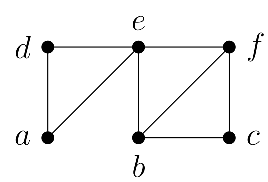
Ha valaki magyarázat nélkül lerajzolja a kapott gráfot és (helyesen) meghatározza a kromatikus számát, az az utolsó 8 pontot kapja meg.

3. Egy 20 csúcsú fában 11 csúcs foka 1 és a maradék 9 csúcs foka is azonos. Határozzuk meg a fa élkromatikus számát.

* * * * *

Legyen a maradék csúcsok foka x, a fa csúcsainak fokszámösszege ekkor $9x + 11$. (2 pont)
Ez a szám azonos az élek számának kétszeresével, (1 pont)
vagyis 38-cal, hiszen minden 20 csúcsú fának 19 éle van. (2 pont)
Innen $x = 3$ adódik. (1 pont)
A fák páros gráfok, (1 pont)
hiszen nincs bennük páratlan kör. (1 pont)
Kőnig tétele szerint minden páros gráf élkromatikus száma azonos a maximális fokszámmal, a keresett élkromatikus szám tehát 3. (2 pont)

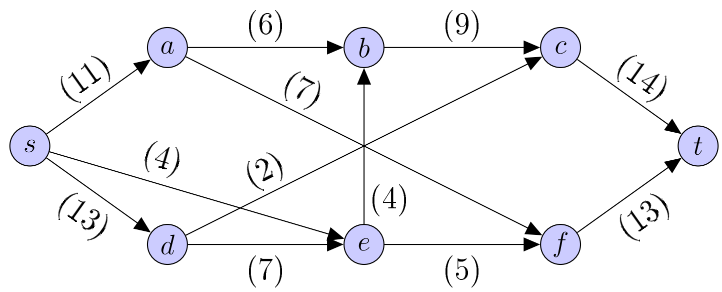
4. Döntsük el, hogy az alábbi gráf intervallumgráf-e.



* * * * *

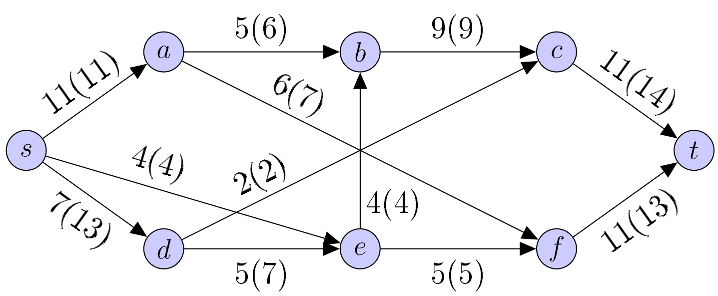
A gráf intervallumgráf lesz, ennek belátásához meg kell adni egy alkalmas intervallumrendszert. Ha ez szerepel, akkor adjunk 10 pontot.

5. Adjunk meg az alábbi hálózatban egy maximális folyamot és egy minimális s-t vágást.



* * * * *

Az alábbi ábrán látható folyam értéke 22.



(3 pont)

Az $\{s, d, e\}$ csúcsok és a többi csúcsok között futó élek alkotta vágás kapacitása szintén 22. (3 pont)
Mivel tetszőleges folyam értéke legföljebb akkora lehet, mint tetszőleges vágás kapacitása, ezért a 22 kapacitású vágás bizonyítja, hogy a 22 értékű folyam maximális és a 22 értékű folyam bizonyítja, hogy a 22 kapacitású vágás minimális. (2+2 pont)

A folyam maximalitása mellett lehet annak megmutatásával is érvelni, hogy a 22 értékű folyamhoz tartozó (helyesen felrajzolt) segédgráfban már nincs javító út. Az utolsó 2+2 pont annak jár, aki (érdemben) indokolja, hogy a megadott folyam maximális és a megadott vágás minimális. (De sem „a Ford-Fulkerson tétel miatt a folyam maximális" mondat – további kiegészítés híján – nem tekintendő (érdemi) indoklásnak, sem az algoritmus puszta futtatása.)

6*. Adjunk meg olyan gráfot, melyből tíz alkalmas élet törölve a kromatikus szám tízzel csökken és határozzuk meg az ilyen gráfok csúcsszámának minimumát.

* * * * *

Ilyen gráf lesz például a 20 csúcsú teljes gráf. (1 pont)
Ebből tíz független élet törölve ugyanis a kromatikus szám 20-ról 10-re csökken. (1 pont)
A tíz él törlése után kapott gráfban a törölt élek végpontjai kaphatják ugyanazt a színt, így a kromatikus szám legfeljebb 10, (1 pont)
másrészt még mindig van a gráfban 10 méretű klikk, így 10 színre szükség is van a színezéshez. (1 pont)
A keresett minimális csúcsszám a 20 lesz. Láttuk, hogy 20 csúcs már elég, (1 pont)
most belátjuk, hogy ennél kevesebb viszont nem. Legyen a törlések utáni gráf G, ehhez tíz alkalmas élet adva az eredeti gráfot kapjuk vissza, melynek a kromatikus száma $\chi(G) + 10$ kell legyen. (1 pont)
Ha az eredeti gráfnak (és így G-nek is) legfeljebb 19 csúcsa volna, akkor a törölt élek között lesz két olyan, melyeknek van közös csúcsa. (2 pont)
Ha G egy jó színezésében ezt a csúcsot egy új, addig nem használt színnel színezzük, és ugyanezt tesszük a bevett további 8 él valamelyik végpontjával is, akkor az eredeti gráf egy jó színezését kapjuk $\chi(G) + 9$ színnel, ami lehetetlen. (2 pont)