Pl1: Zárt, de előjelet vált jel +1 −1
zajos megfigyelés → Gauss fgtlen

milyen előjelű?

$-a = -1$
$a = 1$
$\sigma_n = 0.3$

H_0: a jel negatív előjelű

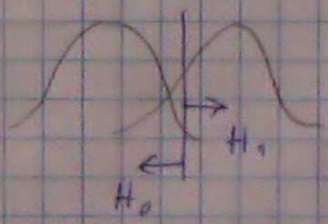
$P_0 = 0.9$

H_1: a jel poz. –″–

$P_1 = 0.1$

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \cdot \exp\left(\frac{-(z+a)^2}{2\sigma_n^2}\right) \quad \text{ill.} \quad \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_n} \cdot \exp\left(\frac{-(z-a)^2}{2\sigma_n^2}\right)$$

$a = -1$ ↓ H_0 $\qquad$ $a = 1$ ↓ H_1



$C_{10} = C_{01} = 1$;

$C_{00} = C_{11} = 0$

Küszöb, $z = ?$

mi a feltétele h a $z = 0$ legyen

---

likelihood arány

$$\frac{H_1}{H_0} = \frac{\frac{1}{\sqrt{\sigma_n^2}} \exp \frac{-(z-a)^2}{2\sigma_n^2}}{\frac{1}{\sqrt{\sigma_n^2}} \exp \frac{-(z+a)^2}{2\sigma_n^2}} \underset{H_0}{\overset{H_1}{\gtrless}} \frac{P_0 (C_{10} - C_{00})}{P_1 (C_{01} - C_{11})} = \eta$$

$\Big\downarrow \ln$

$$-\frac{(z-a)}{2\sigma_n^2} + \frac{(z+a)}{2\sigma_n^2} \underset{H_0}{\gtrless} \ln \eta$$

$$\frac{-(z^2-2za+a^2)+(z^2+2za+a^2)}{2\sigma_n^2} \gtrless \ln \eta$$

$$z \gtrless \frac{\sigma_n^2}{2a} \ln \eta = \frac{\sigma_n^2}{2} \ln \left(\frac{0.7}{0.3}\right) =$$

[illegible]

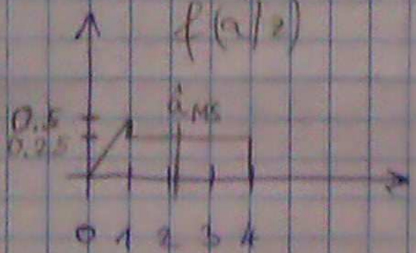
akkor lesz a $z = 0$ határ, ha $\ln \eta = 0$

$\Downarrow$

$P_0 = P_1$ azonos valószínűséggel érkezik

---

(2)



sűrűségfv. alatti integrál = 1

$\Downarrow$

1 és 4 között a konst. érték 0.25

$\hat{a}_{MS} = ?$
$\hat{a}_{ABS} = ?$
$\hat{a}_{MAP} = ?$

$$\hat{a}_{MS} = \int_{-\infty}^{\infty} a\, f(a|z)\, da = \int_0^1 0.5a \cdot a\, da + \int_1^4 0.25 \cdot a\, da =$$

$$\left[\frac{0.5a^3}{3}\right]_0^1 + \left[\frac{0.25a^2}{2}\right]_1^4 = \frac{1}{6} + 2 - 0.125 = 2\frac{1}{24}$$

$\hat{a}_{ABS} = f(a|z)$ mediánja $= 2$

mert 0.5 a görbe alatti terület

$\hat{a}_{MAP} = f(a|z)$ max helye $= 1$

$E\{(y - \hat{y})^2\}$

$\hat{y} = a_1 + a_2 u^2$ parabolát illesztünk

u és y mely momentumaira szükséges a meghatározáshoz?

$(y - a_1 - a_2 u^2)^2 = y^2 + \underline{a_1^2} + \underline{a_2^2} u^4 - 2 \underline{a_1} y + 2 \underline{a_1 a_2} u^2 - 2 \underline{a_2} u^2 y$

$$E(u^4), \; E(y), \; E(u^2), \; E(u^2 y)$$

$$\hat{x}(n+1) = \hat{x}(n) + \frac{1}{n+1}\left[y(n) - \hat{x}(n)\right]$$ → egyszerű átlagolás rekurzív formája

$y_1 = u^4(n)$

$y_2 = y(n)$

$y_3 = u^2(n)$

$y_4 = u^2(n)\, y(n)$

a várható értékeket ezen mint átlagokat képezzük

---

(4) Gauss Markov becslés

- Gauss eloszlású zaj/zavarás
- lineáris modell ($z = Ua$)

---

(5) $A = \mathrm{diag}\langle 1, -1 \rangle = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$

$C = \mathrm{diag}\langle 0.1, 0.1 \rangle = \begin{bmatrix} 0.1 & 0 \\ 0 & 0.1 \end{bmatrix}$

$G = ?$

$A - GC = 0 \rightarrow G = AC^{-1}$

$C^{-1} = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/c_{11} & 0 \\ 0 & 1/c_{22} \end{bmatrix}$

$G = \begin{bmatrix} 10 & 0 \\ 0 & -10 \end{bmatrix}$ 1 lépéses konvergencia

(6) [illegible]

$$\hat{x}(n) = \frac{1}{N} \sum_{k=n-N}^{n-1} y(k)$$

$$\hat{x}(n+1) = \frac{1}{N} \sum_{k=n-N+1}^{n} y(k) = \hat{x}(n) + \frac{1}{N}\left[y(n) - y(n-N)\right]$$

[illegible]

$$z\hat{X}(z) = \hat{X}(z) + \frac{1}{N}\left(Y(z) - Y(z)z^{-N}\right)$$

$$\frac{\hat{X}(z)}{Y(z)} = \frac{1}{z-1}\,\frac{1}{N}\left(1 - z^{-N}\right) =$$

$$= \frac{z^{-1}}{N}\,\underbrace{\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}}}$$

polinom osztás

$$\frac{1}{1-z^{-1}} = 1 + z^{-1} + z^{-2} + \dots$$

$$z^{-N} + z^{-(N+1)} + z^{-(N+2)} + \dots$$

$$\frac{1-x^{n}}{1-x} = 1 + x + \dots + x^{n-1} \qquad 1 + z^{-1} + \dots + z^{-(N-1)}$$

ampl. és fázisban

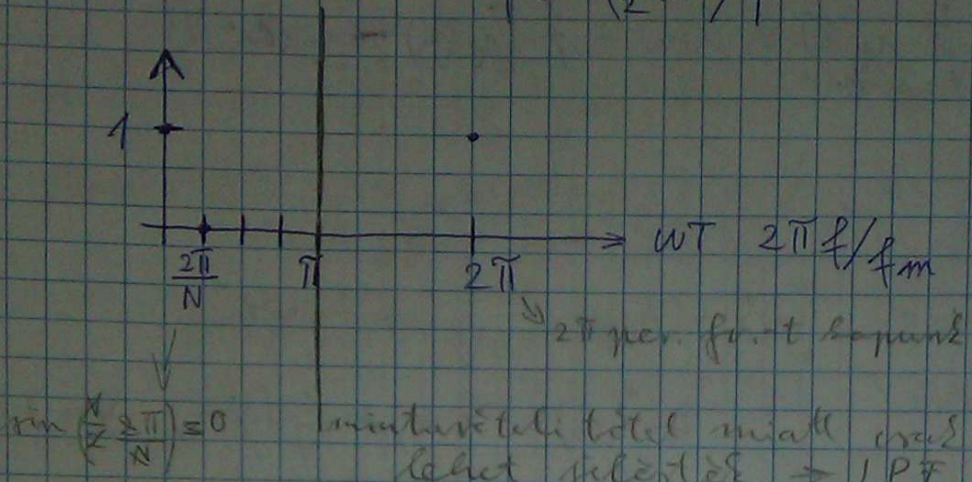
$$\frac{z^{-1}}{N}\,\frac{1-z^{-N}}{1-z^{-1}} \xrightarrow{z=e^{j\omega T}} \frac{e^{-j\omega T}}{N}\,\frac{1-e^{-j\omega TN}}{1-e^{-j\omega T}} =$$

$$= \frac{e^{-j\omega T}}{N}\,\frac{e^{-j\frac{N}{2}\omega T}\left(e^{j\frac{N}{2}\omega T} - e^{-j\frac{N}{2}\omega T}\right)/2j}{e^{-j\omega T/2}\left(e^{j\omega T/2} - e^{-j\omega T/2}\right)/2j} =$$

$$= \frac{e^{-j\omega T\frac{N+1}{2}}}{N}\,\frac{\sin\frac{N}{2}\omega T}{\sin\frac{1}{2}\omega T}$$

ABS

$$\frac{1}{N}\left|\frac{\sin\left(\frac{N}{2}\omega T\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\omega T\right)}\right|$$

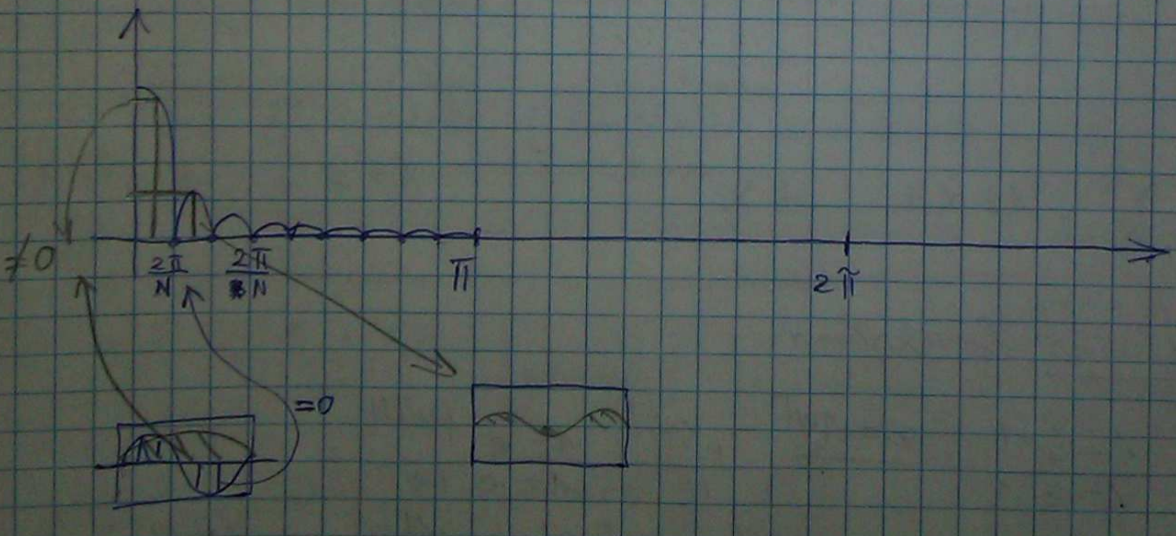


mintavételi tétel miatt csak eddig
lehet felértelés → LPF

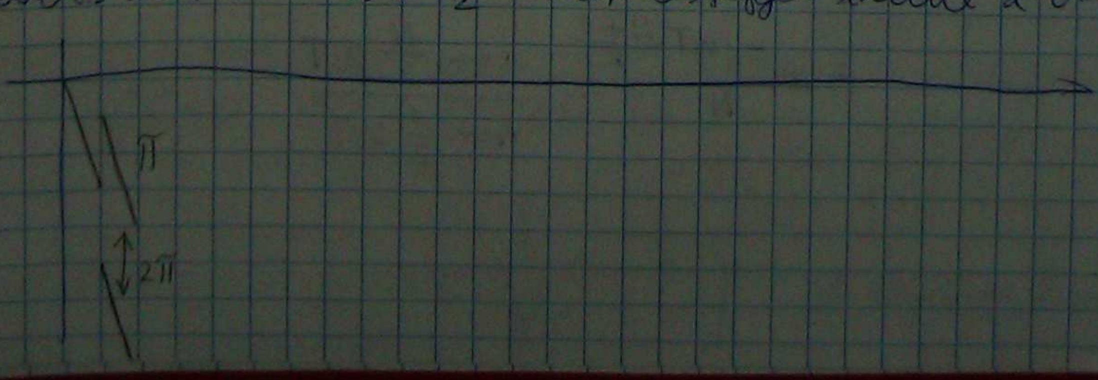
const jel → 0 frekv. az átlaga egységnyi
ezt a legyen

$1,1,1,1 \rightarrow \hat{X} = 1$

ha $\omega T \rightarrow 0$ akkor $\sin(\omega T) \sim \omega T$

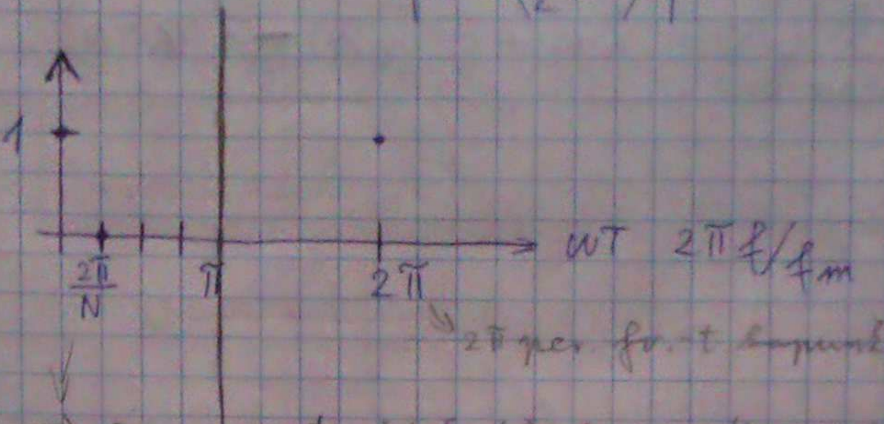


fázisban $-\omega T\frac{N+1}{2}$ meredekséggel indul a 0-ból



$\Downarrow$ ABS

$$\frac{1}{N}\left|\frac{\sin\left(\frac{N}{2}\omega T\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\omega T\right)}\right|$$

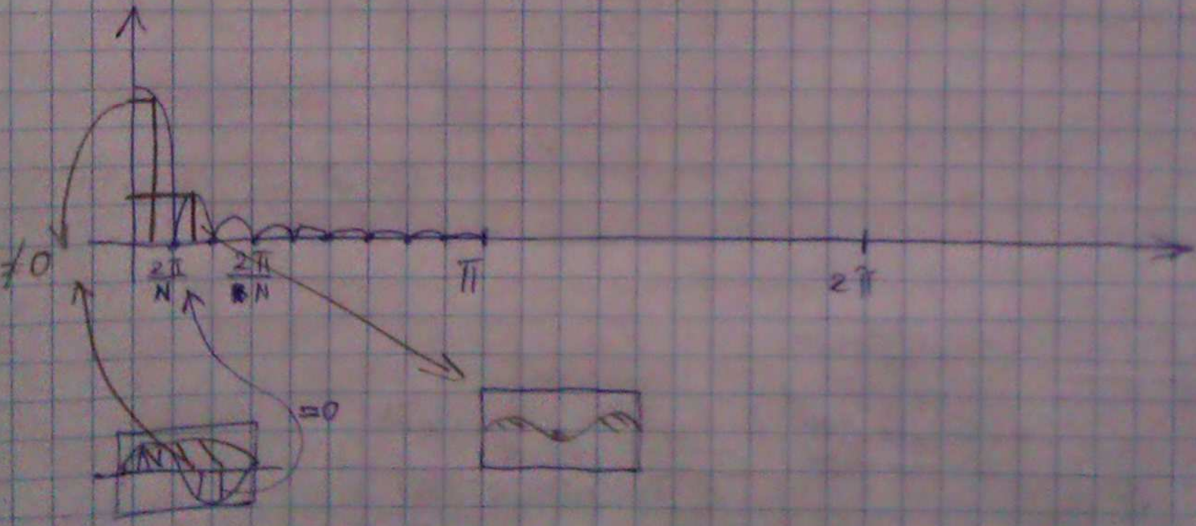


$\sin\left(\frac{N}{2}\frac{2\pi}{N}\right)=0$ | mintavételi tétel miatt csak eddig lehet jelentős → LPF

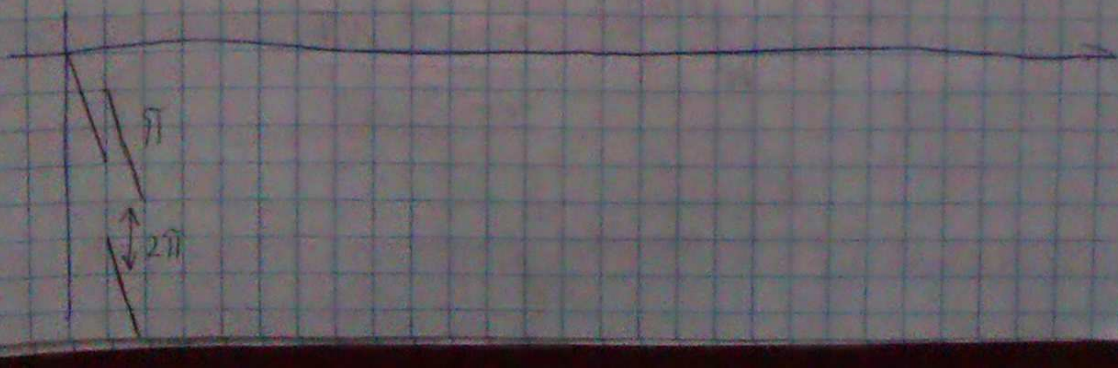
const jel → 0 frekv. az átvitele egységnyi kell, hogy legyen

$1,1,1,1 \rightarrow \hat{x}=1$

ha $\omega T \rightarrow 0$ akkor $\sin(\omega T) \sim \omega T$



fázisban $-\omega T\frac{N+1}{2}$ meredekséggel indul a 0-ból



(7) IIR $\Rightarrow$ FIR EQUATION ERROR

$$H(z) = \frac{(1-r)z^{-1}}{1 - r z^{-2}}$$

$z = 1 \quad H(z) = 1$

$z = -1 \quad H(z) = \frac{1-r}{1+r}$

$\Downarrow$

$\pi/2 \quad \frac{\pi}{4}$

$$\frac{\hat{Y}(z)}{X(z)} = \frac{(1-r)z^{-1}}{1 - r z^{-2}} \qquad (1 - r z^{-2})\hat{Y}(z) = (1-r)z^{-1}X(z)$$

$\Downarrow$ [illegible]

$e = y(n) - \hat{y}(n)$

$Y(z) - \hat{Y}(z)$

$$E_e(z) = [Y(z) - \hat{Y}(z)](1 - r z^{-2}) = Y(z)(1 - r z^{-2}) - (1-r)z^{-1}X(z)$$

$(1-r)X z^{-1}$

$$e_e(n) = y(n) - r\,y(n-2) - x(n-1) + r\,x(n-1)$$

$$= \underbrace{y(n) - x(n-1)}_{u(n)} + \hat{r}\underbrace{[-y(n-2) + x(n-1)]}_{v(n)}$$

$$e_e(n) = u(n) + r v(n)$$

$$E(e_e^2(n)) = E[(u(n) + r\,v(n))^2]$$

$\Downarrow \frac{\partial}{\partial r}$

$$2E[(u(n) + r\,v(n))\,v(n)] = 0$$

$$r = -\frac{E[u(n)v(n)]}{E[v^2(n)]}$$

(8) $P^T = [0 \quad -0.5 \sin\frac{6\pi}{N}$

$$R = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5\cos\frac{6\pi}{N} \\ 0.5\cos\frac{6\pi}{N} & 0.5 \end{bmatrix}$$

$\underline{W = R^{-1} P}$ $\qquad$ $\underline{N = 18}$

$$R^{-1} = \frac{1}{\det R} R^*$$

$$= \underbrace{\frac{1}{0.5^2 - 0.5^2\cos^2\frac{6\pi}{N}}}_{\frac{4}{\sin^2\frac{6\pi}{N}}} \begin{bmatrix} 0.5 & -0.5\cos\frac{6\pi}{N} \\ -0.5\cos() & 0.5 \end{bmatrix} = \frac{2}{\sin^2\frac{6\pi}{N}} \begin{bmatrix} 1, & -\cos() \\ -\cos, & 1 \end{bmatrix}$$

$$W = R^{-1}P = \begin{bmatrix} 1/\mathrm{tg}\,\pi/3 \\ -1/\sin\pi/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{3} \end{bmatrix}$$

sin-t vezetünk a lin. kombinátorra
egységnyi ampl:

a fázishelyzet a kérdés a 2 sin-ra

$$\boxed{\sin\left(\frac{2\pi}{N}n\right) \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{N}n + \varphi\right)}$$

a korreláció fázismérésre használható

$\cos(\alpha + \beta)$

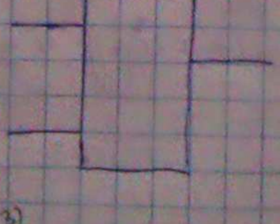
$\cos(\alpha - \beta)$

R-ben?

$$\varphi = -\frac{\pi}{3} = -\frac{6\pi}{N}$$

$\sin(2\pi/N n)$

$\sin\left(\frac{2\pi}{N}n + \varphi\right)$



$= \sin\frac{2\pi}{N}(n-3)$

~ 3 késleltető

$$\frac{1}{\mathrm{tg}\,\pi/3} \sin\frac{2\pi}{N}n + \frac{1}{\sin\pi/3} \sin\frac{\ldots}{N}$$

$$= \cos\frac{2\pi}{N}n$$

$\sin\frac{6\pi}{N}n \ldots \sin\frac{6\pi}{N}$

$\cos\frac{6\pi}{N}n \ldots \sin\frac{6\pi}{N}$

$\sin\frac{6\pi}{N}n$-nél $\rightarrow \sin\frac{6\pi}{N}(n-1) \rightarrow -\frac{6\pi}{18}$ ✓

(9) $\hat{x}_{k}$ szabadon esetben (órán változna volt)

(10) geom. interpretáció a vázlatban

pl. Kálmán-szűrőnél ezen és b ortogonalizálása
ill. és merőleges vetítés (=a minimális a hiba)

(11) Megfigyelő

$A = \mathrm{diag}\langle 1, -1 \rangle$

$C = \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \end{bmatrix}$ megfigyelési mx.

$G = ?$

$(A - GC)^N = 0$ vagy $\underline{\forall \lambda_i = 0}$

$\Downarrow$

$$F = A - GC = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0.1 & 0.1 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 - 0.1 g_0 & -0.1 g_0 \\ -0.1 g_1 & -1 - 0.1 g_1 \end{bmatrix}}_{F}$$

$\det(\lambda I - F) = 0$

$$\det \begin{bmatrix} \lambda - 1 + 0.1 g_0 & +0.1 g_0 \\ +0.1 g_1 & \lambda + 1 + 0.1 g_1 \end{bmatrix} = 0$$

$$\lambda^2 + \cancel{\lambda} + \underline{0.1 g_0 \lambda} - \cancel{\lambda} - 1 - \cancel{\lambda} - 0.1 g_1 + \underline{0.1 g_1 \lambda} + 0.1 g_0 + \underbrace{0.01 g_0 g_1 - 0.01 g_0 g_1}_{=0}$$

$$\lambda^2 + \underbrace{\lambda (0.1 g_0 + 0.1 g_1) - 1 - 0.1 g_1 + 0.1 g_0}_{=0} = 0$$

$$\left.\begin{aligned} g_0 + g_1 &= 0 \\ -1 + 0.1(g_0 - g_1) &= 1 \end{aligned}\right\} \quad \begin{aligned} g_0 &= 5 \\ g_1 &= -5 \end{aligned}$$