

# Fizika úrmérnököknek

## **Pályák**

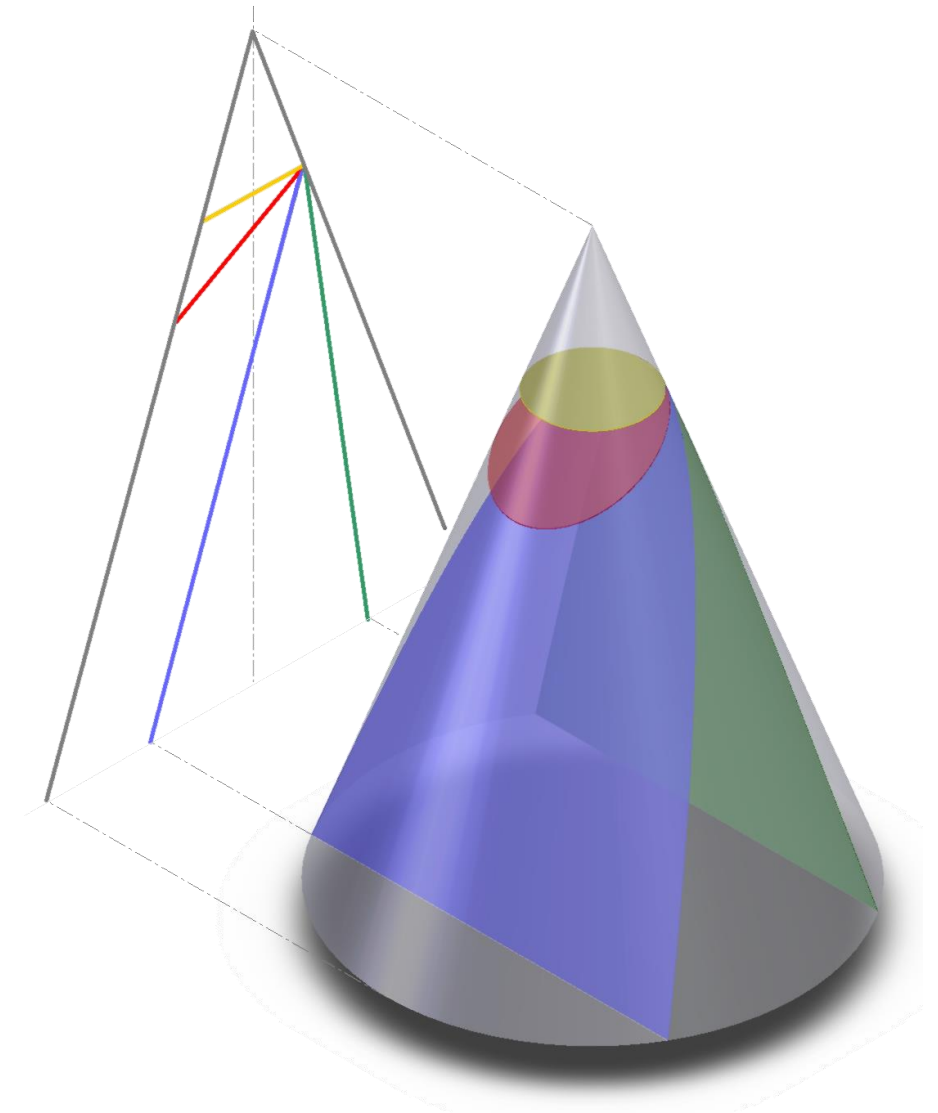
Beneda Károly adjunktus

# Tartalom

- Kepleri pályák
- Kéttest probléma
- Pályaháborgások alapjai
- Jellegzetes Föld körüli pályák

# Kepleri pályák

- A kepleri pályák geometriai eredete egy egyenes körkúp és egy sík metszeteként létrejövő síkgörbék
- A pályák általános egyenlete
$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$
- A, B és C kötelezően nemzérus értékek
- Attól függően, hogy a másodfokú egyenlet diszkriminánsa milyen értéket ad, lehetnek különféle pályaalakok



# Kepleri pályák

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

- Ellipszis esetén  $B^2 < 4AC$

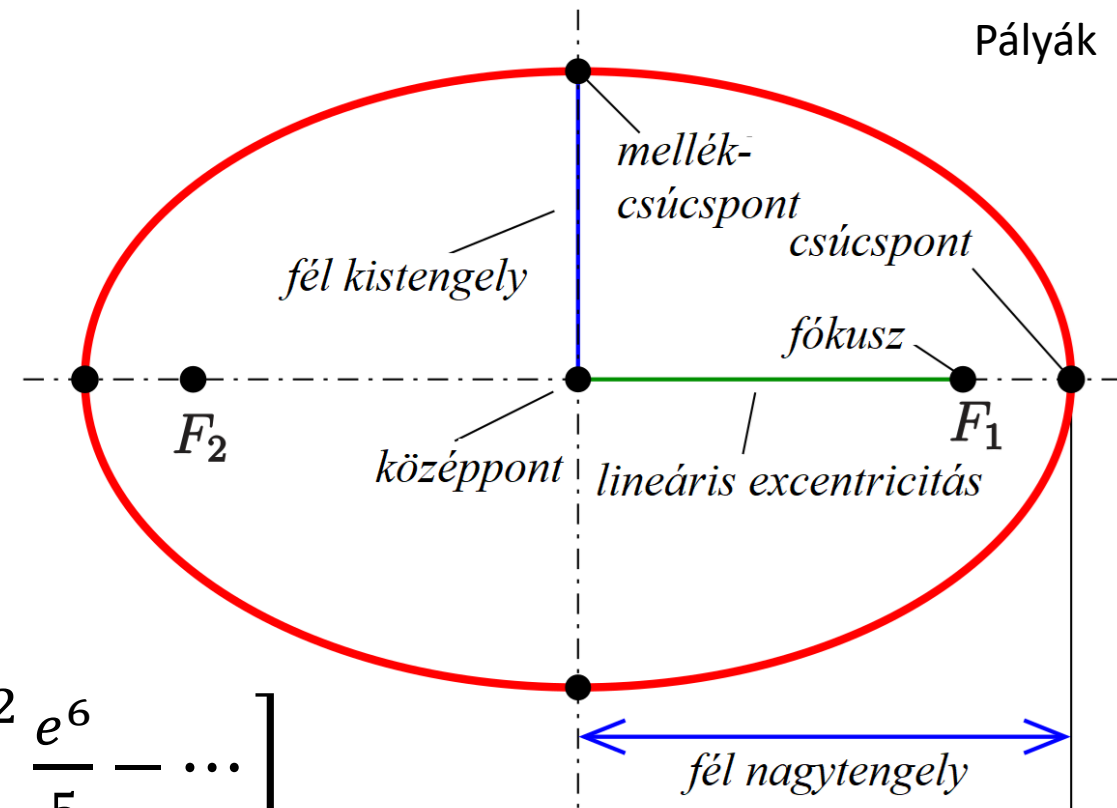
- Az ellipszis pontos kerülete:  $e = \frac{r_a - r_p}{r_a + r_p}$

$$K = 2\pi a \left[ 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 e^2 - \left(\frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4}\right)^2 \frac{e^4}{3} - \left(\frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6}\right)^2 \frac{e^6}{5} - \dots \right]$$

- $e \approx 0,2$ -nél lesz a másodrendű tag 0,01, vagyis a hiba 1%, ha csak a  $K = 2\pi a$  értékkel számolunk.

Égitest	Föld	Hold	Merkúr	Plútó
Excentricitás	0,0167	0,0554	0,2056	0,2488

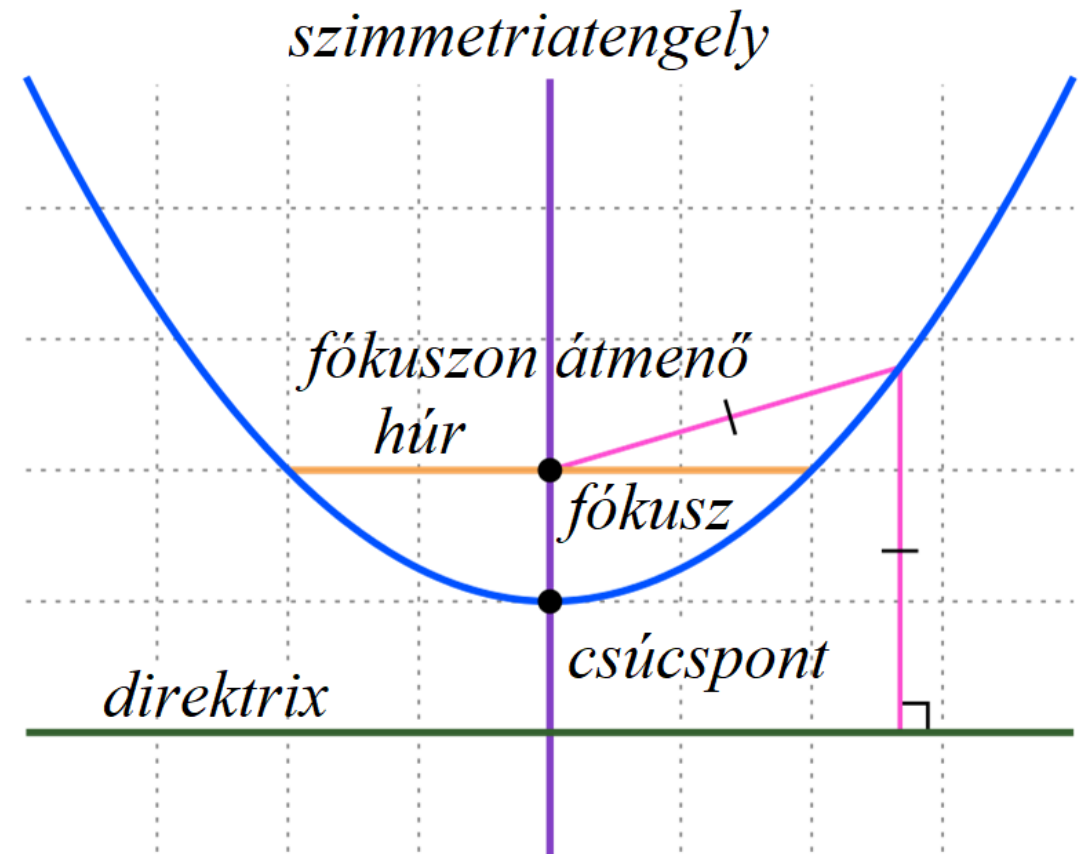
- A harmadik tag  $e = 0,2$  esetén mindössze 0,000075.
- A Plútó esetén a hiba még így is mindössze 1,55%.



# Kepleri pályák

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

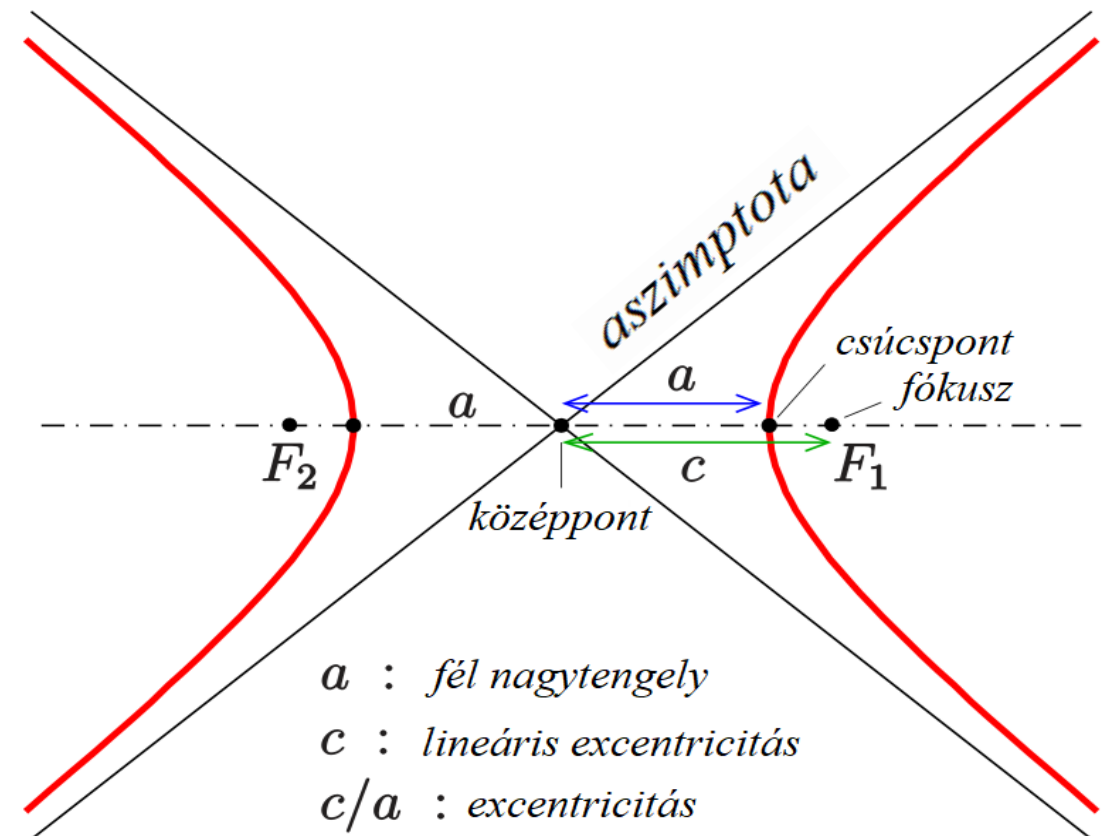
- ahol  $B^2 = 4AC$
- Kúpszelet, melynek excentricitása 1, valamint egyik fókuszpontja a végtelenben van
- Fél nagytengelye ezért végtelen hosszúságú



# Kepleri pályák

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$$

- ahol  $B^2 > 4AC$
- Mivel a középpont a görbe területén kívül fekszik, így magyarázható a negatív fél nagytengely



# Kéttest probléma

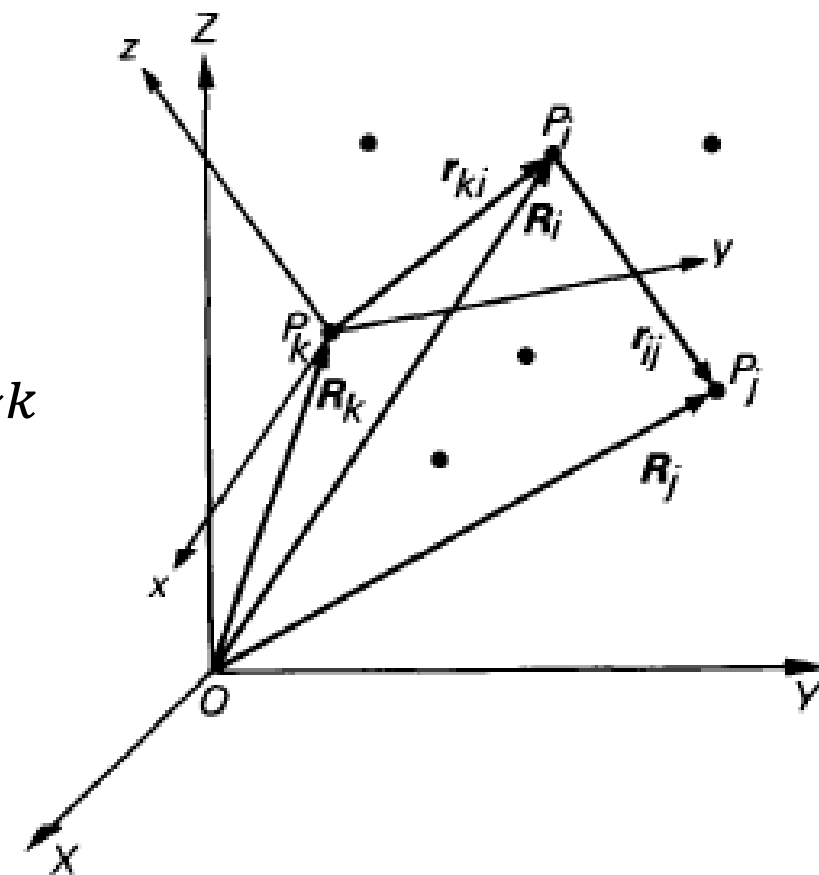
- Amennyiben egy űreszköz a Föld körül kering, néhány tízezer kilométeres felszín feletti magasságig a Nap és más égitestek vonzása elhanyagolható
- Ebben az esetben nem több-, hanem kéttest-problémáról beszélünk
- Ez a bolygók Nap körüli mozgására is igaz, mert ezek tömege egyrészt elhanyagolható a Napéhoz képest, másrészt pedig jelentős távolságok vannak az egyes bolygók között
- A kéttest-probléma már analitikusan is megoldható, ezáltal ez tekinthető az égi mechanikai vizsgálatok kiindulópontjának

# Kéttest probléma – mozgásegyenletek

- Vegyünk egy tömegpontot ( $P_i$ ) egy nem forgó koordináta-rendszerben ( $P_k$  középponttal), amire csak a tömegvonzás hat
- Ekkor a mozgás egyenlete:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = - \frac{\gamma (m_k + m_i)}{r^3}$$

- Amennyiben  $m_k \gg m_i$ , használhatjuk a  $\mu = \gamma m_k$  szerint számítható gravitációs mutatót.





# Kéttest probléma – mozgásegyenletek

- A  $P_i$  test mozgása a  $P_k$  körül úgy zajlik, hogy a mozgás síkja tartalmazza a  $P_k$  pontot, és a mozgás egy kúpszelet lesz, melynek egyik fókuszpontja a  $P_k$ .
- A  $P_i$  test trajektóriája az alábbiak szerint határozható meg:

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} = \frac{H^2 / \mu}{1 + e \cos \theta}$$

ahol

- $p$ : fókuszon átmenő, nagytengelyre merőleges húr fele (semi-latus rectum)
- $e$ : numerikus excentricitás
- $H$ : fajlagos (tömegegységre vonatkoztatott) perdület
- $\theta$ : valódi anomália

# Kéttest probléma – mozgásegyenletek

- A sebességet a Vis Viva egyenlettel határozhatjuk meg bármely kúpszeletre:

$$v^2 = \mu \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

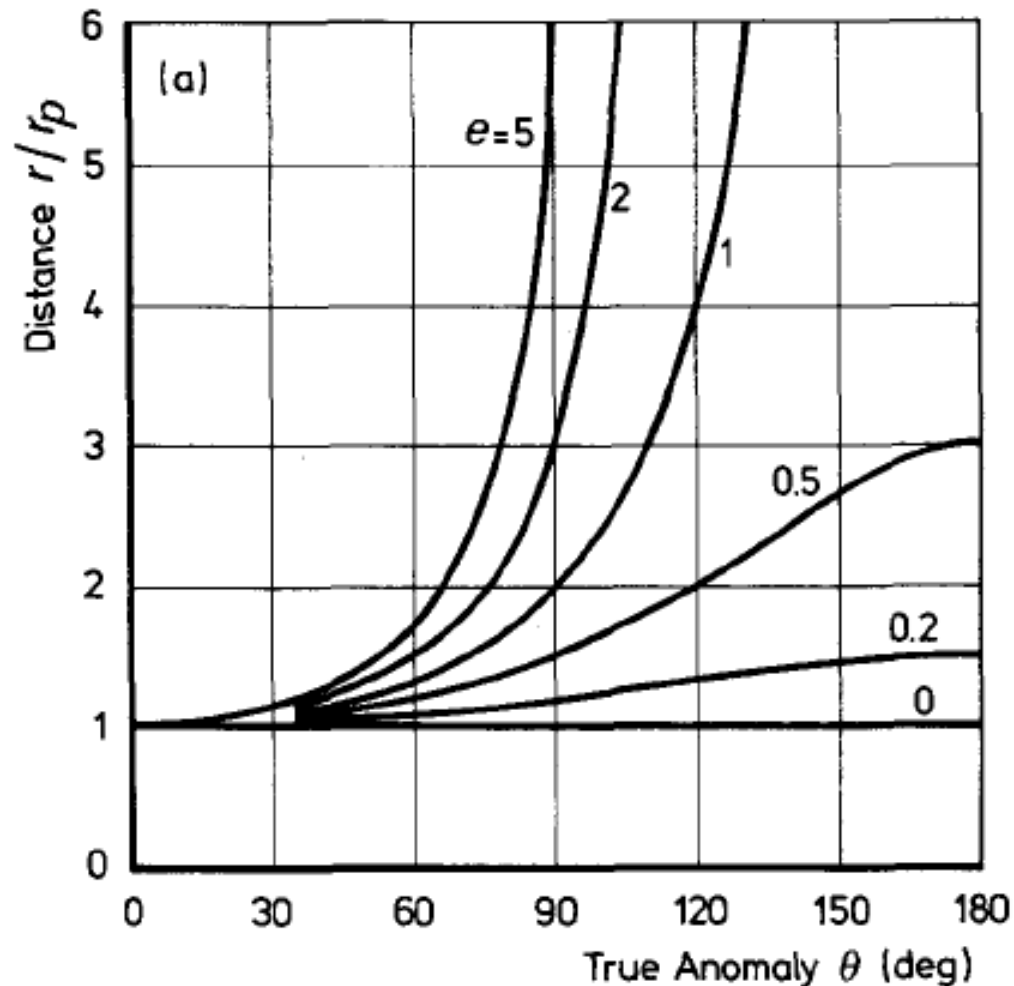
- Ennek speciális esetei a körpálya-, ill. parabola (szökési) sebesség:

$$v_k = \sqrt{\frac{\mu}{r}}, \text{ ill. } v_p = \sqrt{\frac{2\mu}{r}}$$

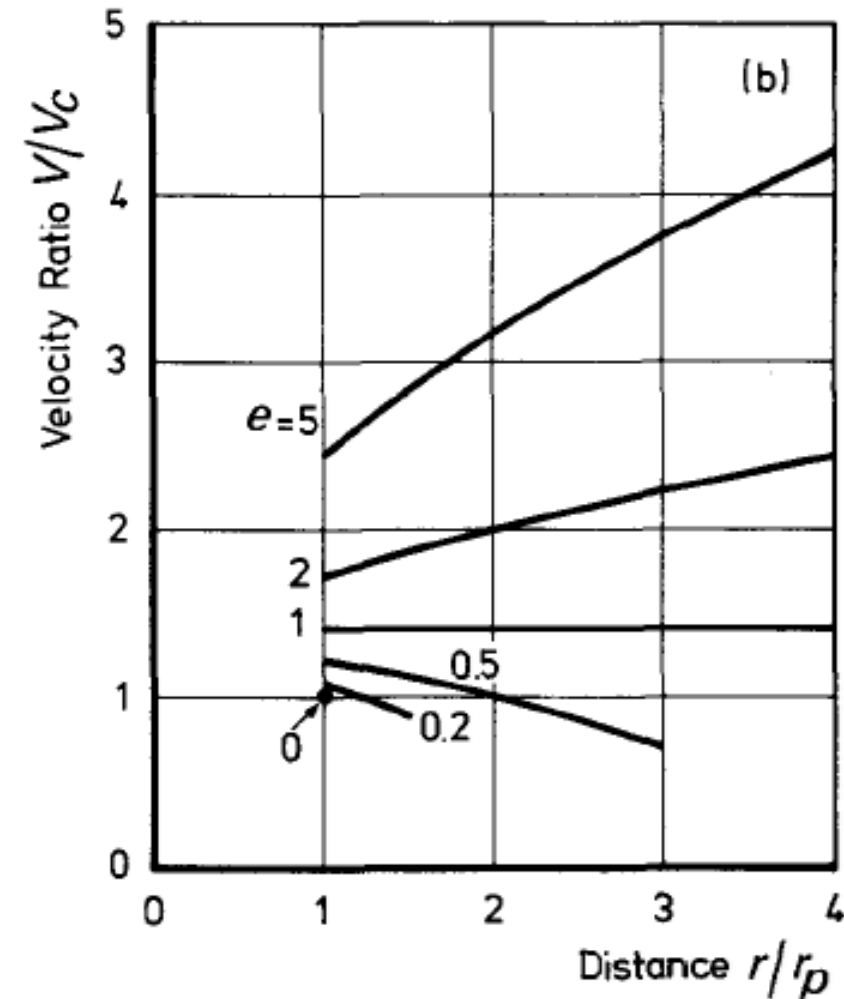
- Körpálya esetén  $a = r$ , parabola esetén  $a = \infty$ .

# Kéttest probléma – mozgásegyenletek

- Távolság és sebesség diagrammok



Forrás: Cornilisse: Rocket Propulsion and Spaceflight Dynamics, p. 364.



# Kéttest probléma – mozgásegyenletek

- A radiális sebesség differenciálás után:

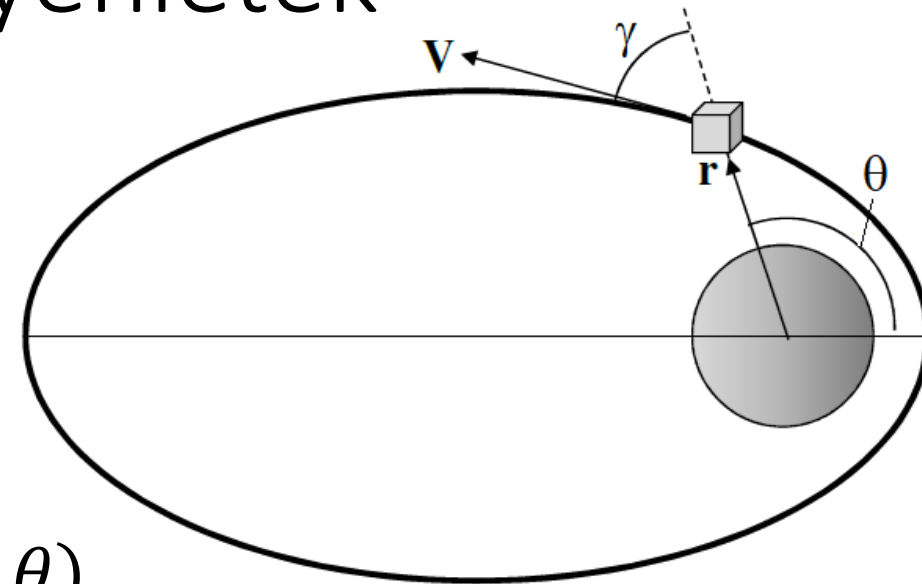
$$v_r = \frac{\mu}{H} e \sin \theta$$

- A tangenciális sebesség:

$$v_\theta = \frac{H}{r} = \frac{\mu}{H} (1 + e \cos \theta)$$

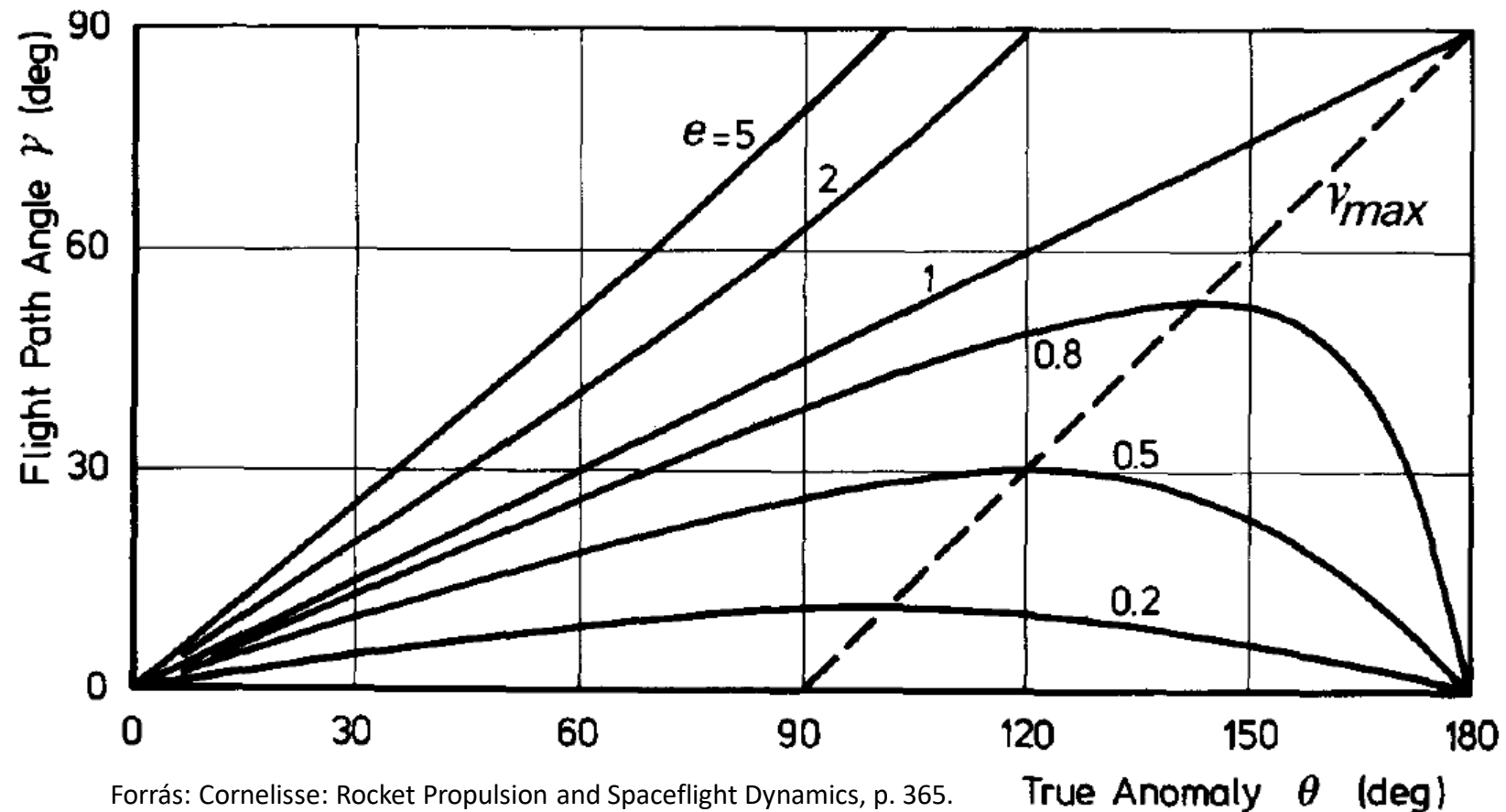
- Útirányszög ( $-90^\circ \leq \gamma \leq 90^\circ$ ):

$$\tan \gamma = \frac{v_r}{v_\theta} = \frac{e \sin \theta}{1 + e \cos \theta}$$



# Kéttest probléma – mozgásegyenletek

- Útirányszög a valódi anomália függvényében:

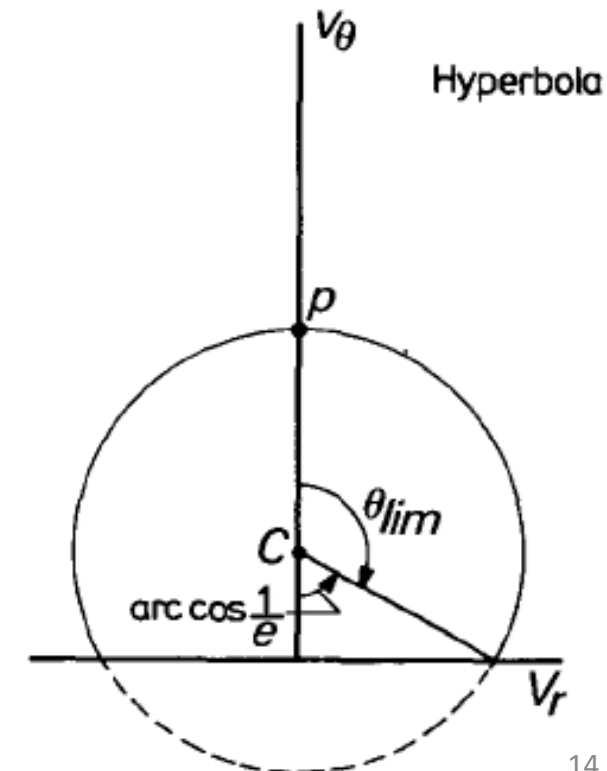
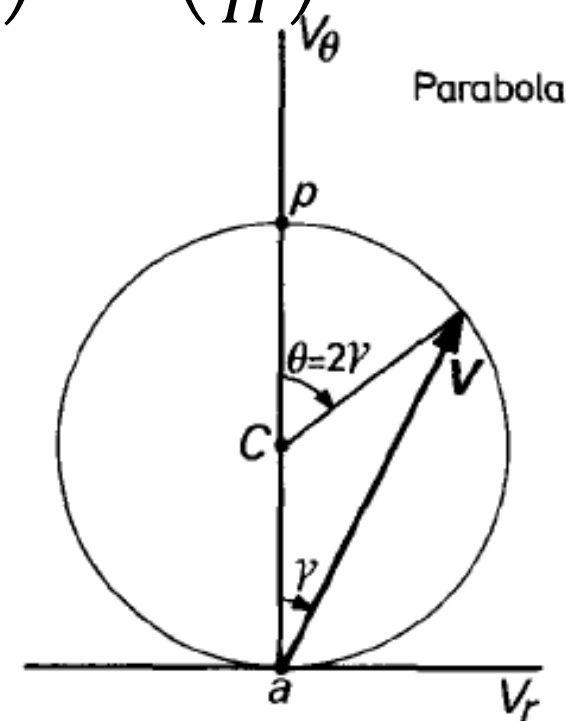
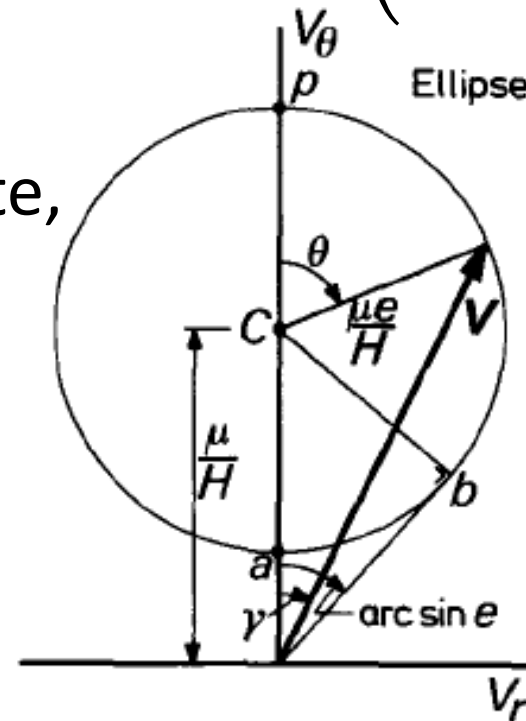


# Kéttest probléma – mozgásegyenletek

- Kihasználva a szögek szinuszára, ill. koszinuszára vonatkozó azonosságot ( $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ ) a  $\theta$ -val egyszerűsíthetünk:

$$v_r^2 + \left( v_\theta - \frac{\mu}{H} \right)^2 = \left( \frac{\mu e}{H} \right)^2$$

- Ez egy  $\frac{\mu e}{H}$  sugarú körnek az egyenlete, amit *hodográf*nak nevezünk



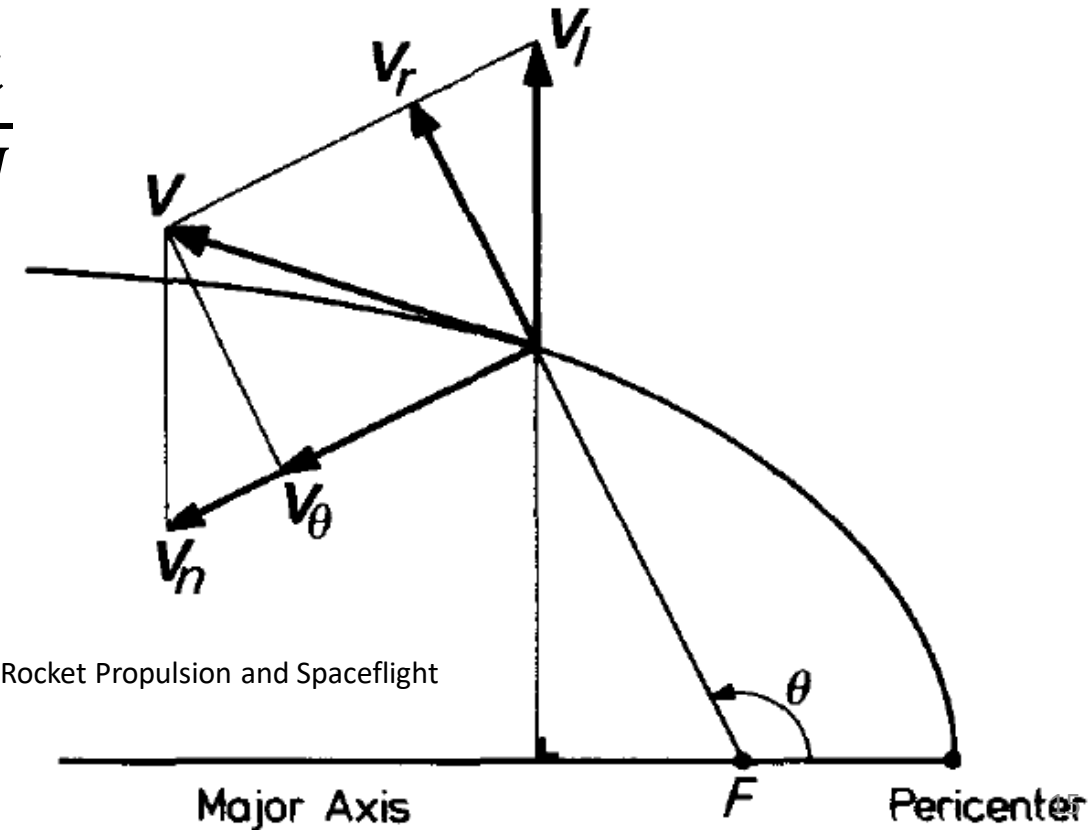
# Kéttest probléma – mozgásegyenletek

- A teljes sebességvektor két másik komponensre is felbontható, egy húrral párhuzamos és egy sugárra merőleges összetevőre:

$$v_l = \frac{v_r}{\sin(180^\circ - \theta)} = \frac{v_r}{\sin \theta} = \frac{\mu e}{H}$$

$$v_n = v_\theta + \frac{v_r}{\tan(180^\circ - \theta)} = v_\theta - \frac{v_r}{\tan \theta} = \frac{\mu}{H}$$

- Ezek nagysága állandó a pálya mentén
- A  $v_l$  komponensnek az iránya is



Forrás: Cornélisse: Rocket Propulsion and Spaceflight Dynamics, p. 366.

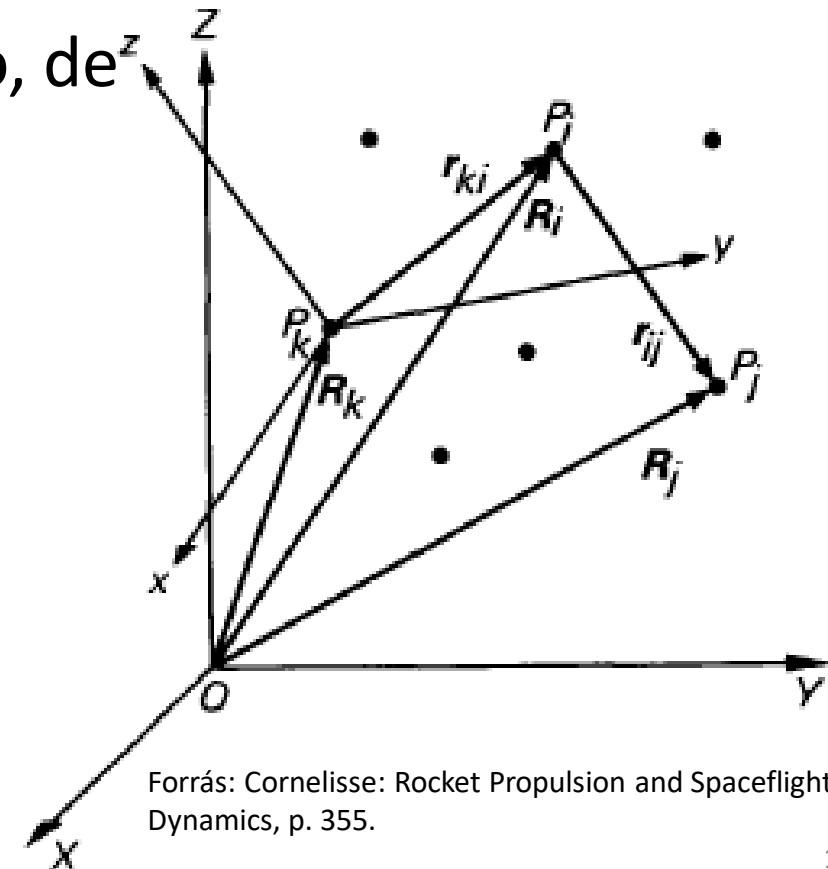
# Pályaháborgások alapjai

- A kéttest-probléma során elhanyagoltuk a pályát „birtokló” égitesten kívül minden más hatást, amely az űreszközre hat, továbbá a tömegpontként való kezelés is rejthet hibákat (pl. Hold, mascon)
- A valóságban azonban számos olyan hatás érvényesül, amelyek az ideális kúpszelet kepleri pályához képest a valóságos pályát megváltoztatják
  - A Föld lapultsága
  - A Föld tömegének egyenlőtlen eloszlása
  - A Föld légkörének zavaró hatása
  - További égitestek gravitációs vonzása
  - Sugárnyomás
  - Elektromágneses hatások



# Pályaháborgások alapjai

- Az általános  $n$ -test probléma egy rögzített  $XYZ$  koordináta-rendszerben vizsgálható, gyakran azonban számunkra egy, ehhez az inercia-rendszerhez képest nem forgó, de a gazda bolygó tömegközéppontjába helyezett referenciára szeretnénk vonatkoztatni
- Legyen az  $xyz$  koordináta-rendszerünk origója a  $P_k$  égitest



Forrás: Cornélisse: Rocket Propulsion and Spaceflight Dynamics, p. 355.

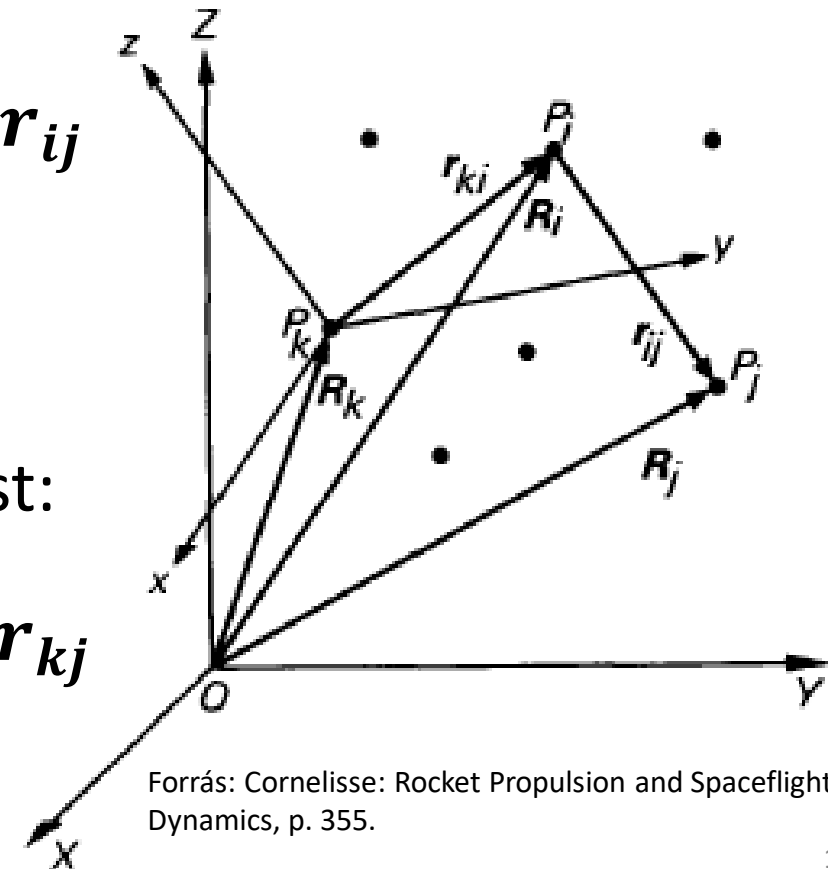
# Pályaháborgások alapjai

- Válasszuk szét a gravitációs vonzásokat a  $P_k$  és  $P_i$ , valamint a  $P_i$  és a többi  $P_j$  testek között, így az inercia-rendszerben  $P_i$  mozgása:

$$\frac{d^2 \mathbf{R}_i}{dt^2} = \gamma \frac{m_k}{r_{ik}^3} \mathbf{r}_{ik} + \gamma \sum_j^{**} \frac{m_j}{r_{ij}^3} \mathbf{r}_{ij}$$

- A fenti egyenletben a  $\sum_j^{**}$  minden  $j$ -re vonatkozó összegzést jelent, kivéve a  $j = i$  és  $j = k$  eseteket.
- Hasonlóan,  $P_k$  mozgása az inerciarendszerhez képest:

$$\frac{d^2 \mathbf{R}_k}{dt^2} = \gamma \frac{m_i}{r_{ki}^3} \mathbf{r}_{ki} + \gamma \sum_j^{**} \frac{m_j}{r_{kj}^3} \mathbf{r}_{kj}$$



Forrás: Cornélisse: Rocket Propulsion and Spaceflight Dynamics, p. 355.

# Pályaháborgások alapjai

- Vonjuk ki egymásból az előbbi egyenleteket:

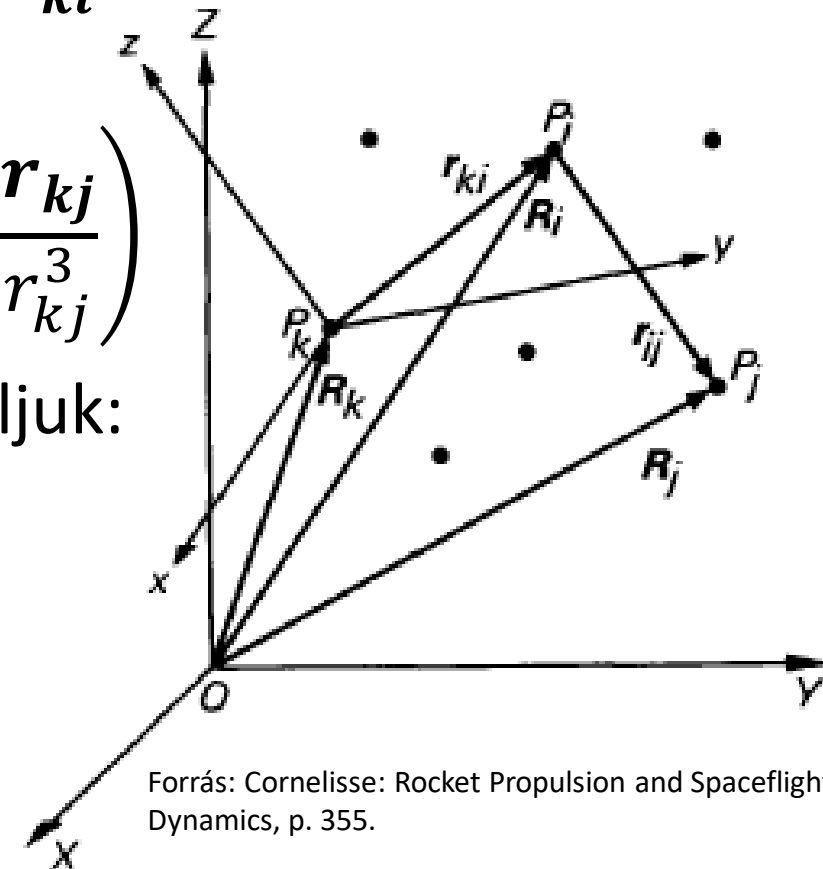
$$\mathbf{r}_{ki} = \mathbf{R}_i - \mathbf{R}_k, \text{ és } \mathbf{r}_{ij} = \mathbf{r}_{kj} - \mathbf{r}_{ki}$$

- Ezt visszahelyettesítve:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_{ki}}{dt^2} = -\gamma \frac{m_k + m_i}{r_{ik}^3} \mathbf{r}_{ki} + \gamma \sum_j^{**} m_j \left( \frac{\mathbf{r}_{kj} - \mathbf{r}_{ki}}{r_{ij}^3} - \frac{\mathbf{r}_{kj}}{r_{kj}^3} \right)$$

- Ha viszont a  $P_i$  pozícióját a  $P_k$ -hoz viszonyítva vizsgáljuk:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} + \gamma \frac{m_k + m_i}{r_i^3} \mathbf{r}_i + \gamma \sum_j^{**} m_j \left( \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{r_{ij}^3} - \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} \right)$$



Forrás: Cornilisse: Rocket Propulsion and Spaceflight Dynamics, p. 355.

# Pályaháborgások alapjai

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} + \gamma \frac{m_k + m_i}{r_i^3} \mathbf{r}_i = \gamma \sum_j^{**} m_j \left( \frac{\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i}{r_{ij}^3} - \frac{\mathbf{r}_j}{r_j^3} \right)$$

- Látható, hogy az egyenlet jobb oldala tartalmazza a  $P_j$  testek  $P_i$ -re gyakorolt,  $P_k$  körül kifejtett vonzásait.
- A zárójel első hányadosa a  $P_i$  gyorsulása a  $P_j$  testek vonzása miatt
- A zárójel második hányadosa a  $P_k$ , vagyis az origó gyorsulásának ellentettje
- Mivel a  $P_k$ -ra vetített eredőre vagyunk kíváncsiak, ezért a *különbség* lesz a fontos
- Vezessük be a zavarás potenciálját:

$$R_i = -\gamma \sum_j^{**} m_j \left( \frac{\mathbf{1}}{r_{ij}^3} - \frac{\mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_j}{r_j^3} \right)$$

# Pályaháborgások alapjai

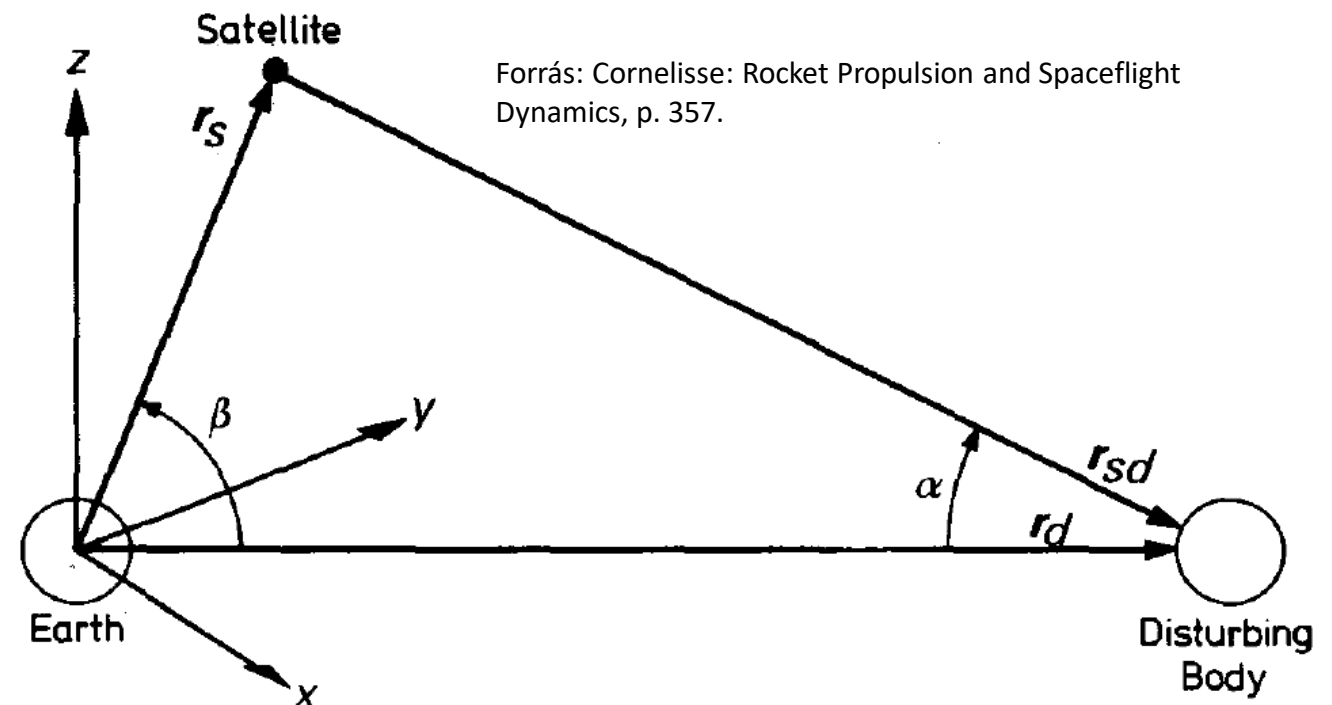
- Ebben az esetben az előző egyenlet így is írható, ahol  $\nabla_i$  a  $P_i$  koordinátáinak  $xyz$  rendszerben vett gradiense:

$$\frac{d^2 \mathbf{r}_i}{dt^2} + \gamma \frac{m_k + m_i}{r_i^3} \mathbf{r}_i = -\nabla_i R_i$$

- Mivel  $R_i$  nem csupán a  $P_i$  koordinátáinak függvénye, hanem a  $P_j$ -ké is, ezért az  $R_i$  potenciál által leírt mező nem konzervatív. Emiatt igen bonyolult általános perturbációszámítást végezni az égi mechanikában.

# Pályaháborgások alapjai – harmadik test okozta perturbációk

- Az általánosból a speciális felé eltérhetünk pl. egy olyan esetben, amikor egy Föld körül keringő műholdra más, közeli égitestek által gyakorolt hatását vesszük egyenként figyelembe.
- Ilyenkor van tehát egy műholdunk, melynek tömege  $m_s$ , amely a Föld (ennek tömege  $m_e$ ) körül kering  $r_s$  tömegközépponttól mért távolságban. A zavaró égitest  $m_d$  tömeggel  $r_d$  távolságban van.



# Pályaháborgások alapjai – harmadik test okozta perturbációk

- A fő gyorsulás a központi égitest miatt:

$$a_m = \gamma \frac{m_e + m_s}{r_s^2}$$

- A zavarásból származó gyorsulás pedig:

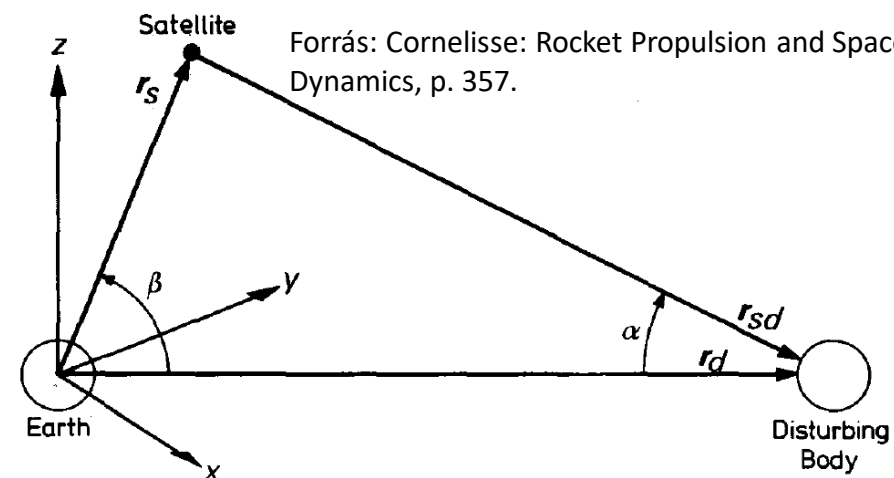
$$a_d = \gamma m_d \sqrt{\left( \frac{\mathbf{r}_{sd}}{r_{sd}^3} - \frac{\mathbf{r}_d}{r_d^3} \right) \cdot \left( \frac{\mathbf{r}_{sd}}{r_{sd}^3} - \frac{\mathbf{r}_d}{r_d^3} \right)}$$

- Elvégezve az egyes műveleteket a gyökjel alatt:

$$a_d = \gamma m_d \sqrt{\frac{1}{r_{sd}^4} + \frac{1}{r_d^4} - \frac{2 \cos \alpha}{r_{sd}^2 r_d^2}}$$

# Pályaháborgások alapjai – harmadik test okozta perturbációk

- Az ábra tanúsága szerint:  $\cos \alpha = \frac{r_d - r_s \cos \beta}{r_{sd}}$
- és  $r_{sd}^2 = r_s^2 + r_d^2 - 2r_s r_d \cos \beta$
- Ezeket helyettesítsük be az előző egyenletbe:



$$a_d = \gamma m_d \sqrt{1 + \frac{1}{(1 - 2\rho \cos \beta + \rho^2)^2} - 2 \frac{1 - \rho \cos \beta}{(1 - 2\rho \cos \beta + \rho^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

- Itt  $\rho = \frac{r_s}{r_d} \ll 1$
- A  $\rho$  szerint sorba fejtvé és a másodrendűen kicsiny tagokat elhanyagolva:

$$a_d = \gamma m_d \frac{r_s}{r_d^3} \sqrt{1 + 3\cos^2 \beta}$$



# Pályaháborgások alapjai – harmadik test okozta perturbációk

- Ezáltal a zavaró és fő gyorsulások viszonyának maximuma:

$$\frac{a_d}{a_m} = 2 \frac{m_d}{m_e} \left( \frac{r_s}{r_d} \right)^3$$

- Vagyis a zavaró hatás a műhold pályasugarának harmadik hatványával arányosan növekszik.
- Jól látszik, hogy a legnagyobb megzavarást a Nap és Hold tudja gerjeszteni, a többiek legalább  $10^4$  nagyságrenddel kisebbek.

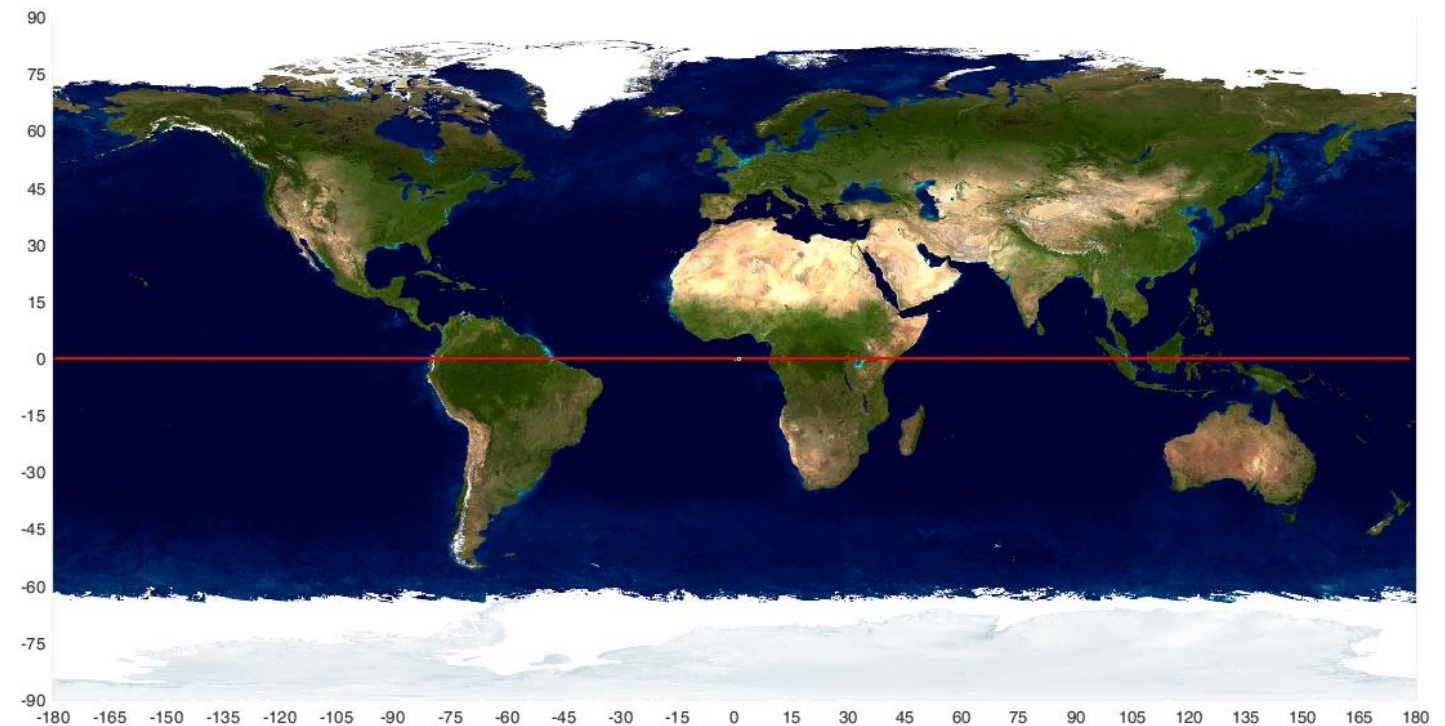
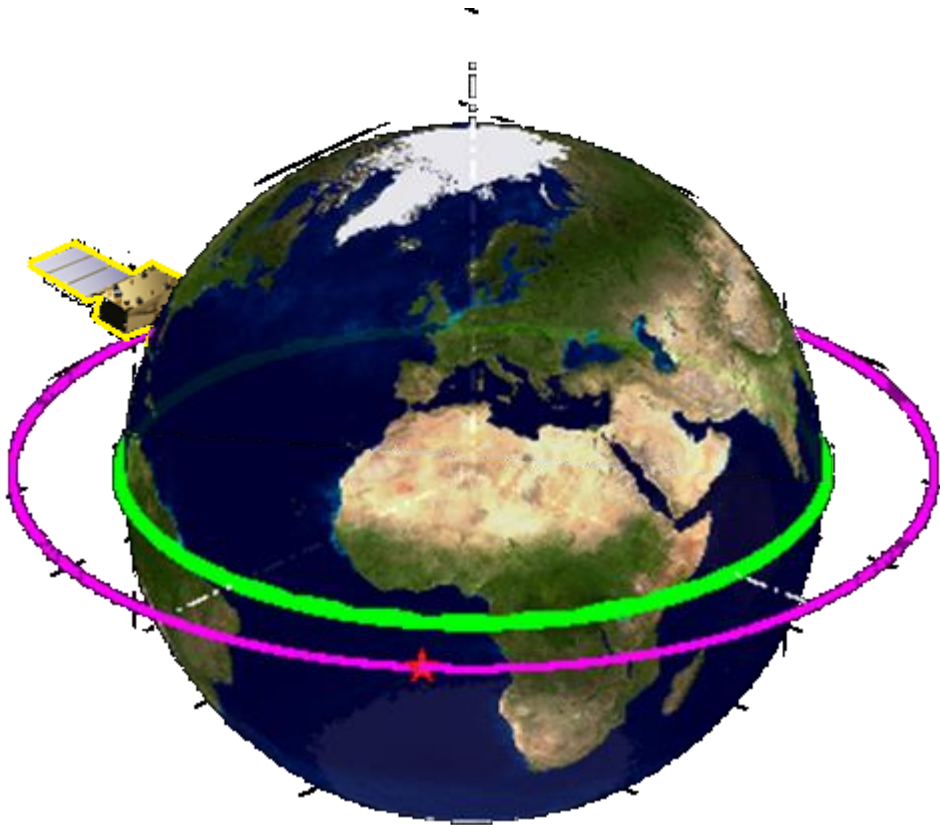
Zavaró égitest	$\frac{m_d}{m_e}$	$\frac{r_d}{r_s}$	$\frac{a_d}{a_m}$	
			Min.	Max.
Nap	332.946	$3,48 \cdot 10^3$		$1,6 \cdot 10^{-5}$
Merkúr	0,056	$1,83 \cdot 10^3$		$1,8 \cdot 10^{-11}$
Vénusz	0,815	$9,03 \cdot 10^2$		$2,2 \cdot 10^{-9}$
Hold	0,0123	9,1		$3,3 \cdot 10^{-5}$
Mars	0,1107	$1,29 \cdot 10^3$		$1,0 \cdot 10^{-10}$
Jupiter	317,9	$1,39 \cdot 10^4$		$2,4 \cdot 10^{-10}$
Szaturnusz	95,2	$2,83 \cdot 10^4$		$8,4 \cdot 10^{-12}$
Uránusz	14,6	$6,11 \cdot 10^4$		$1,3 \cdot 10^{-13}$
Neptunusz	17,2	$1,02 \cdot 10^5$		$3,3 \cdot 10^{-14}$
Plútó	0,11	$1,01 \cdot 10^5$		$2,1 \cdot 10^{-16}$
$\alpha$ Centauri A	$3,6 \cdot 10^5$	$9,68 \cdot 10^8$		$8,0 \cdot 10^{-22}$

# Jellegzetes Föld körüli pályák

- Magasság szerint:
  - Alacsony Föld körüli pálya (Low Earth Orbit, LEO): 160-2.000 km felszín feletti magasság
  - Közepes Föld körüli pálya (Medium Earth Orbit, MEO): 2.000-35.768 km közötti apogeum magasság
  - Geoszinkron pálya (GSO): keringési idő egy sziderikus nap, vagyis 84164 másodperc (de a pálya alakjára és inklinációjára nincs megkötés)
    - Geostacioner pálya (GEO) 35.768 km pályamagasság
  - Magas Föld körüli pálya (High Earth Orbit, HEO): az apogeum magasság nagyobb, mint a GEO pálya magassága

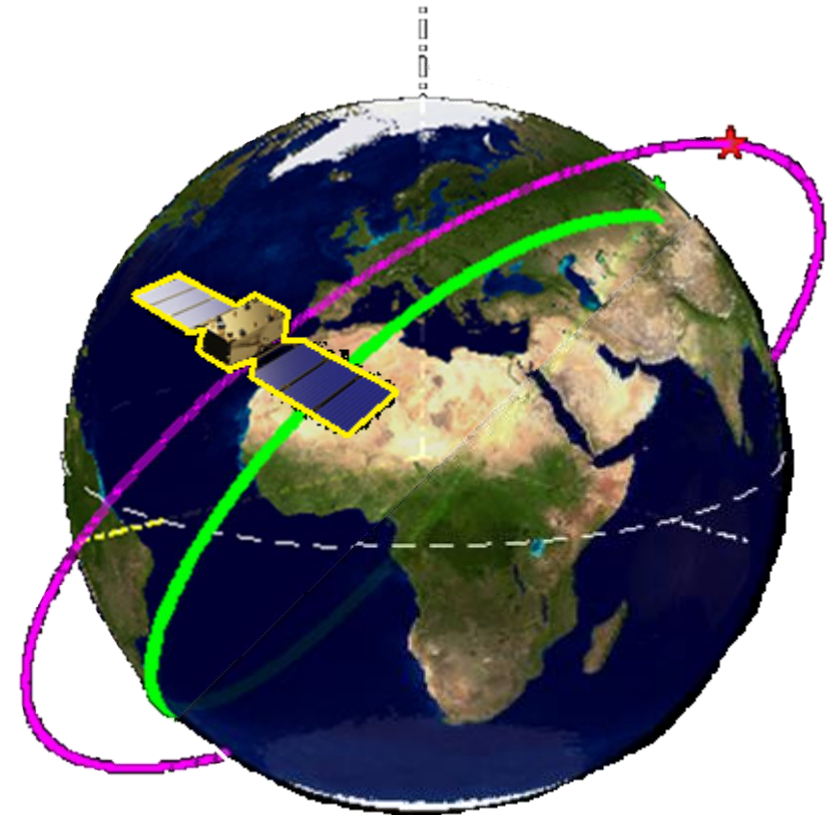
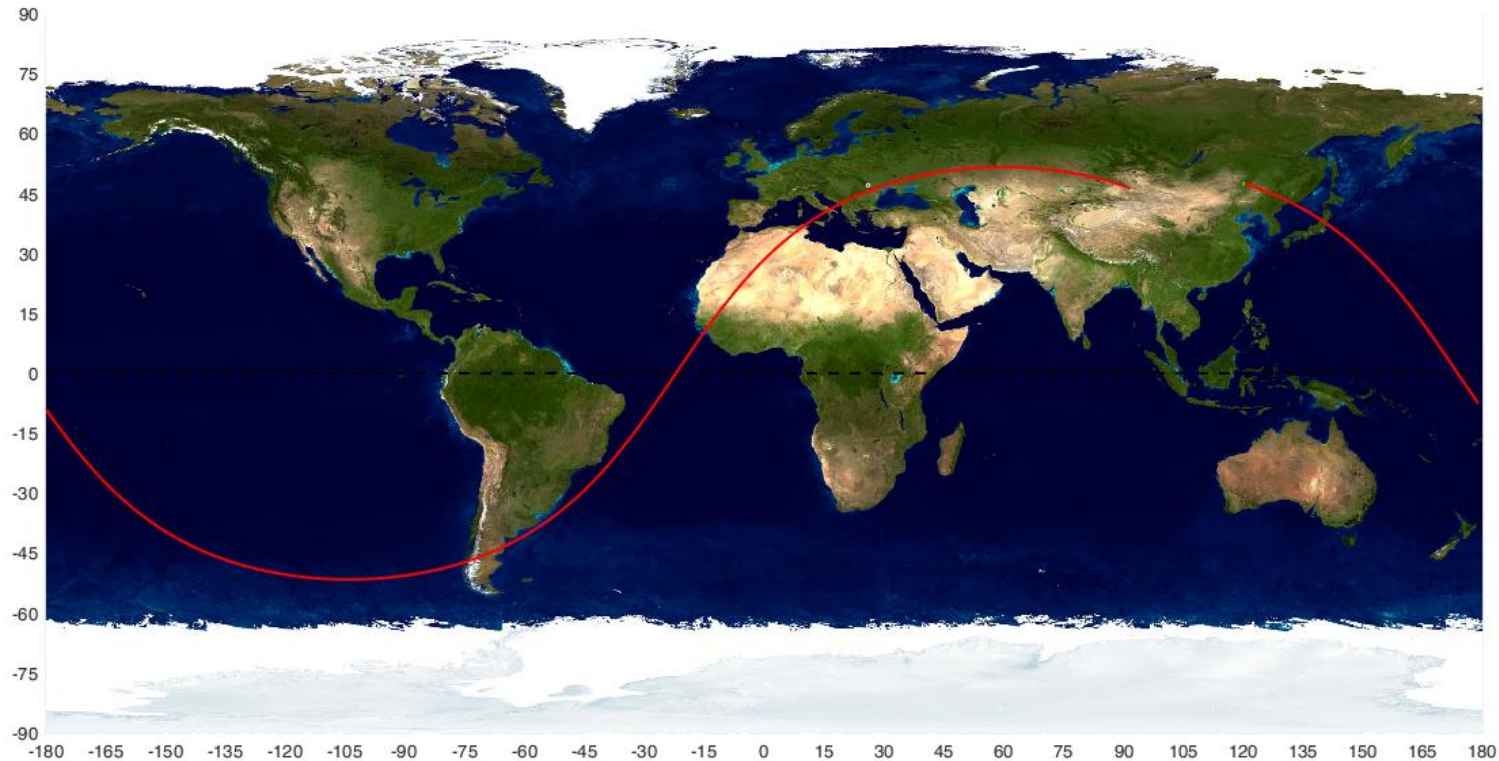
# Jellegzetes Föld körüli pályák

- Inklináció szerint:
  - Egyenlítői pálya:  $0^\circ$  inklináció (mert az Egyenlítő síkja a referencia)



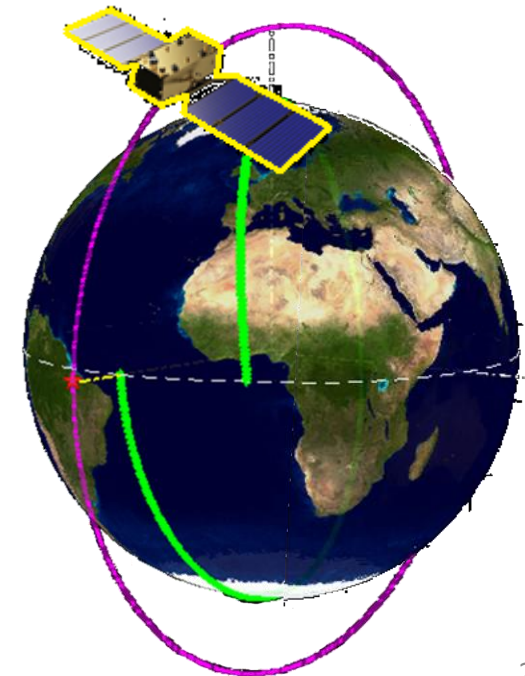
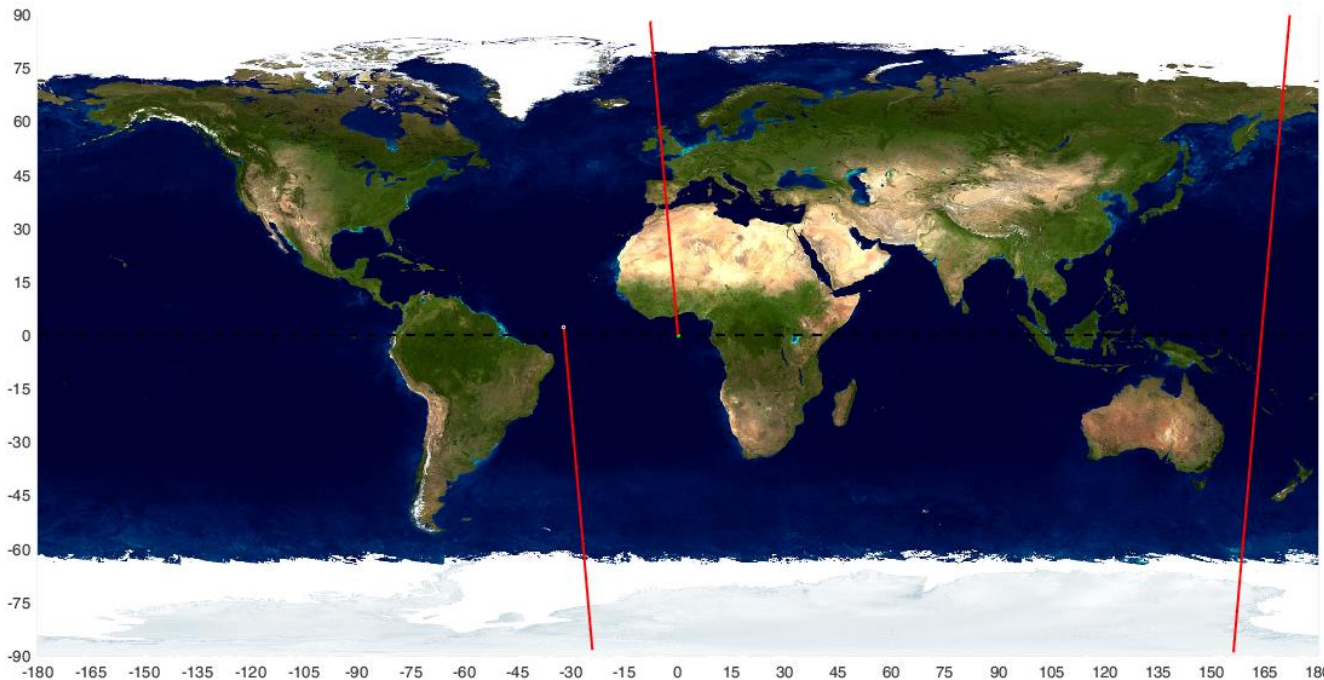
# Jellegzetes Föld körüli pályák

- Inklináció szerint:
  - Közepes inklinációjú pálya:  $0-90^\circ$  (prográd, előre haladó, leggyakoribb pályatípus)



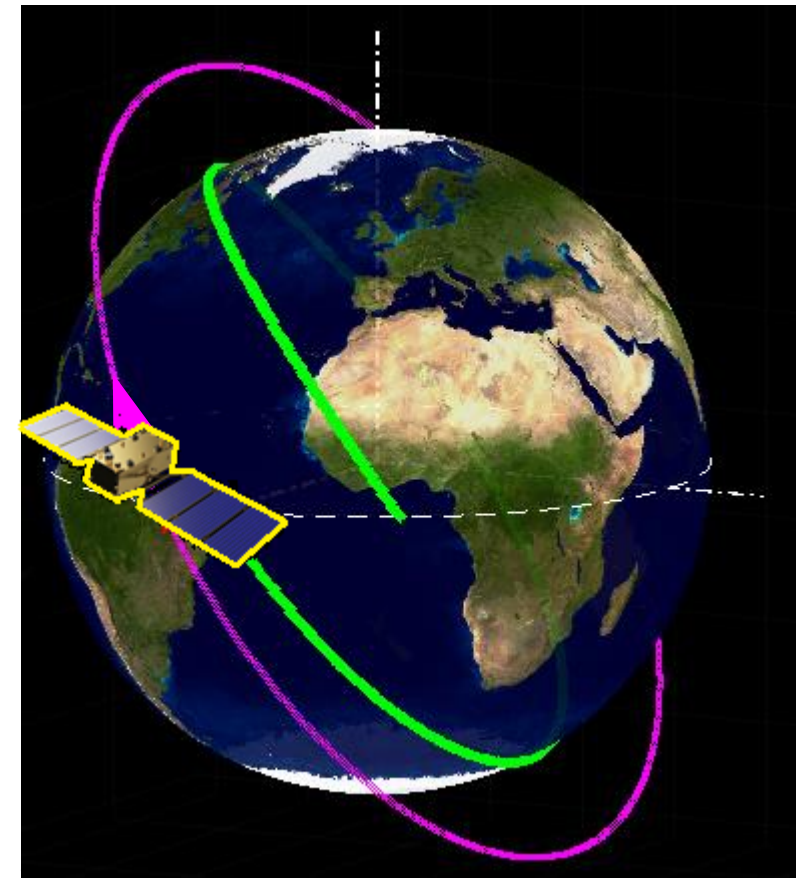
# Jellegzetes Föld körüli pályák

- Inklináció szerint:
  - Poláris:  $90^\circ$  (gyakorlatban kb.  $\pm 5^\circ$ -on belüli már polárisnak számít)
    - Speciális eset a Nap-szinkron (Sun-synchronous Orbit, SSO), amikor az Egenlítő fölötti áthaladás mindig a napnak ugyanazon órájában történik, emiatt az árnyékok ugyanúgy állnak, megfigyelésre kifejezetten alkalmas



# Jellegzetes Föld körüli pályák

- Inklináció szerint:
  - Retrográd:  $90^{\circ}$ - $180^{\circ}$  (visszafelé haladó, ritka, többlet hajtóanyag)



# Jellegzetes Föld körüli pályák

- Excentricitás szerint:

- Fajlagos pályamenti energia  $< 0$

- Körpálya

- Elliptikus

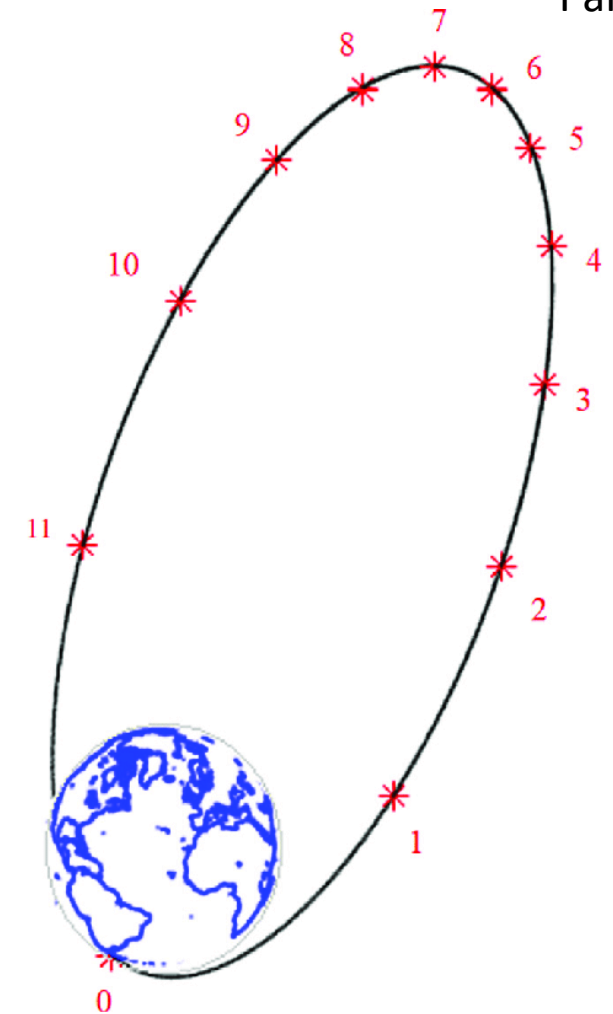
$$\varepsilon = e_{kin} + e_{pot} = \frac{v^2}{2} - \frac{Gm_k}{r}$$

- Hohmann ellipszis

- Geoszinkron transzfer pálya (GTO)

- Nagy excentricitású pályák

- Molnyija-pálya:  $63,4^\circ$  inklinációjú, fél sziderikus nap (43082 másodperc) keringési idejű pálya. Az űreszköz keringésének jelentős idejét a kijelölt terület felett tölti (kéműholdak, telekommunikáció)
- Tundra-pálya:  $63,4^\circ$  inklináció, keringési idő egy sziderikus nap (86164 másodperc), pl. ez is geoszinkron



Forrás: Flores-Burhani-Fantino: A method for accurate and efficient propagation of satellite orbits: A case study for a Molniya orbit. Alexandria Engineering Journal, 2021 April

# Jellegzetes Föld körüli pályák

- Excentricitás szerint:

$$\varepsilon = e_{kin} + e_{pot} = \frac{v^2}{2} - \frac{Gm_k}{r}$$

- Hiperbolikus (fajlagos pályamenti energia  $> 0$ )
  - 1-nél nagyobb excentricitás  $\rightarrow$  az űreszköz a szökési sebességnél gyorsabb, végleg legyőzi a Föld vonzerejét, a végtelenben is megmaradó sebességkomponenssel rendelkezik
- Parabolikus (fajlagos pályamenti energia  $= 0$ )
  - Excentricitás  $= 1 \rightarrow$  az űreszköz éppen a szökési sebességgel halad, és legyőzvé a Föld vonzerejét, a végtelenben zérus sebességre lassul



# Jellegzetes Föld körüli pályák

- Az elliptikus pálya néhány érdekessége

1. A sebesség minimuma az apocentrumban adódik (ahol  $v_{ca}$  az apocentrumra érvényes körpályasebesség):

$$v_a^2 = \frac{\mu}{a} \left( \frac{1-e}{1+e} \right) = v_{ca}^2 (1-e), v_a < v_{ca}$$

2. A maximális sebesség a pericentrumban jön létre (ahol  $v_{cp}$  a pericentrumra vonatkozó körpályasebesség)

$$v_p^2 = \frac{\mu}{a} \left( \frac{1+e}{1-e} \right) = v_{cp}^2 (1+e), v_p > v_{cp}$$

3. A radiális sebesség maximuma a pálya és a fókuszon átmenő merőleges húr metszéspontjaiban maximális (ahol  $v_{c,extr}$  a metszéspontokbeli körpályasebesség):

$$v_{r,extr} = \pm \frac{\mu e}{H} = v_{c,extr} e$$

# Jellegzetes Föld körüli pályák

- Az elliptikus pálya néhány érdekessége

4. A pálya és a kistengely metszéspontjaiban a pályaszög szélsőértéket vesz fel, a sebesség pedig nagyságban megegyezik a helyi körpályasebességgel (de irányában természetesen nem):

$$\gamma_{extr} = \arctan \left( \pm \frac{e}{\sqrt{1 - e^2}} \right)$$

5. Keringési idő:

$$\frac{a^3}{T^2} = \frac{Gm_k}{4\pi^2} \left( 1 + \frac{m_i}{m_k} \right) \rightarrow T = \sqrt{\frac{Gm_k}{4\pi^2 a^3} \left( 1 + \frac{m_i}{m_k} \right)}$$

Ha  $m_i \ll m_k$ , akkor  $T = \sqrt{\frac{Gm_k}{4\pi^2 a^3}}$

# Jellegzetes Föld körüli pályák

- A pozíció és idő közötti összefüggések
  - A valódi anomália idő szerinti megváltozása

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{H}{r^2} = \sqrt{\frac{\mu}{p^3}} (1 + e \cos \theta)^2$$

- Ebből megkapható az idő:

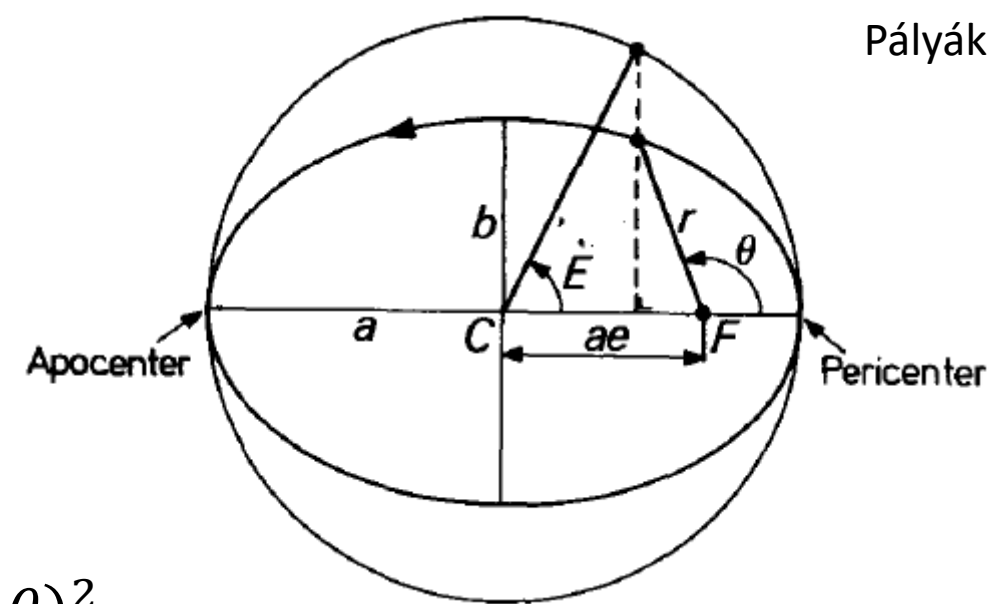
$$\Delta t = \sqrt{\frac{p^3}{\mu}} \int_{\theta_0}^{\theta_e} \frac{d\theta}{(1 + e \cos \theta)^2}$$

- Elliptikus pálya esetén érdemes bevezetni az excentrikus anomáliát, amely az  $a$  sugarú segédkörből levezethető:

$$r = a(1 - e \cos E)$$

$$r \cos \theta = a \cos E - ae$$

$$r \sin \theta = a\sqrt{1 - e^2} \sin E$$



Forrás: Cornélisse: Rocket Propulsion and Spaceflight Dynamics, p. 371.

# Jellegzetes Föld körüli pályák

- A pozíció és idő közötti összefüggések
  - Ezek alapján meghatározhatjuk a  $\theta$  szög tangensét:

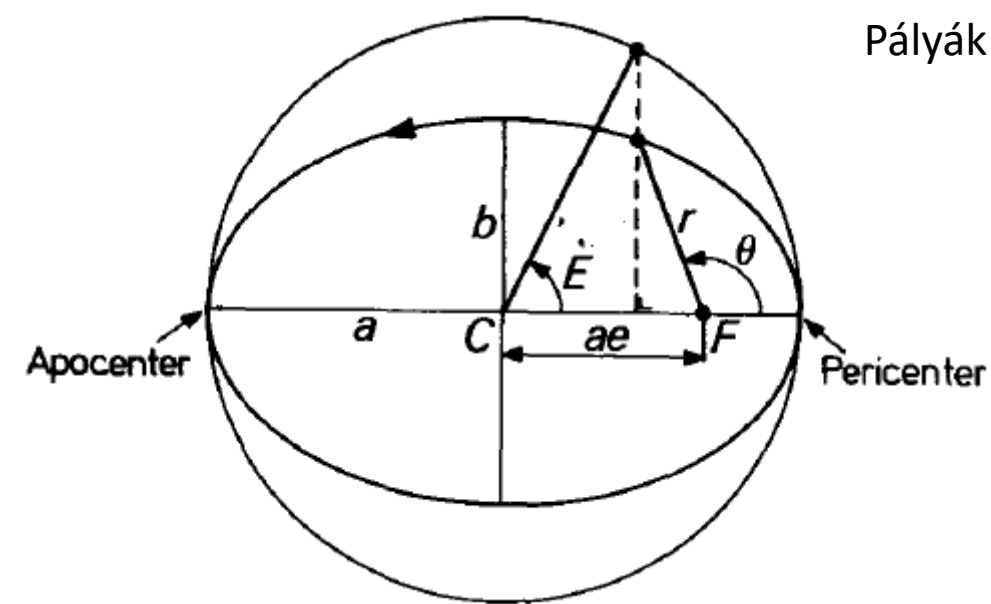
$$\tan \frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}$$

Differenciáljuk az  $r$  kifejezését az idő szerint:

$$\frac{dr}{dt} = ae \sin E \frac{dE}{dt}$$

Az excentrikus anomália idő szerinti deriváltja más kifejezések átalakítása után a következő alakot nyeri:

$$\frac{dE}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3(1-e^2)}} \frac{\sin \theta}{\sin E}$$



Forrás: Cornilisse: Rocket Propulsion and Spaceflight Dynamics, p. 371.

# Jellegzetes Föld körüli pályák

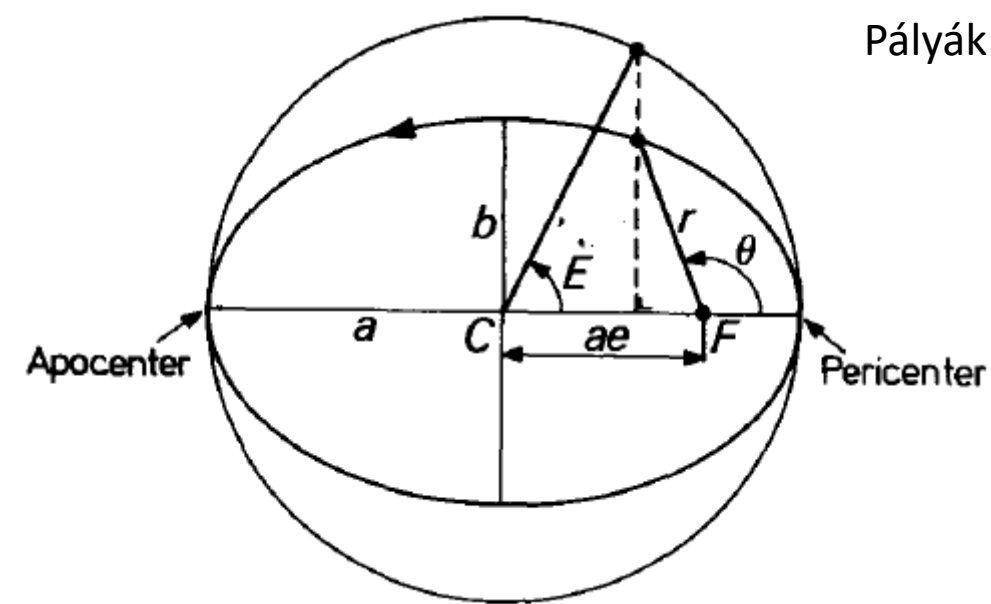
- A pozíció és idő közötti összefüggések
  - Ez további átalakításokat követően:

$$(1 - e \cos E) \frac{dE}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$$

- Ez a képlet már használható integrálásra, hogy adott pillanatbeli pozíciót számíthassunk.

$$E - e \sin E = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} (t - \tau)$$

ahol  $\tau$  az integrálási állandó, aminek könnyen fizikai értelmet is találhatunk: ha  $E = 0$ -t helyettesítünk, akkor  $t = \tau$ , vagyis  $\tau$  a pericentrumon történő áthaladás ideje.



Forrás: Cornелиsse: Rocket Propulsion and Spaceflight Dynamics, p. 371.

# Jellegzetes Föld körüli pályák

- A pozíció és idő közötti összefüggések
  - Vezessük be a közepes szögsebességet:

$$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}}$$

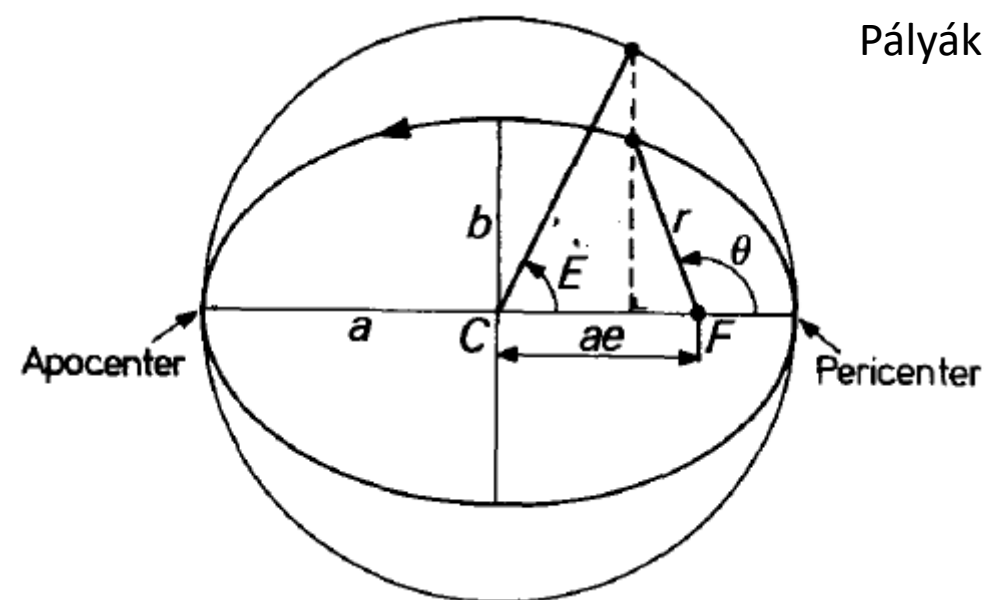
- Valamint a közepes anomáliát:

$$M = n(t - \tau)$$

- Ezáltal a Kepler-egyenlet egyszerűsödik:

$$E - e \sin E = M$$

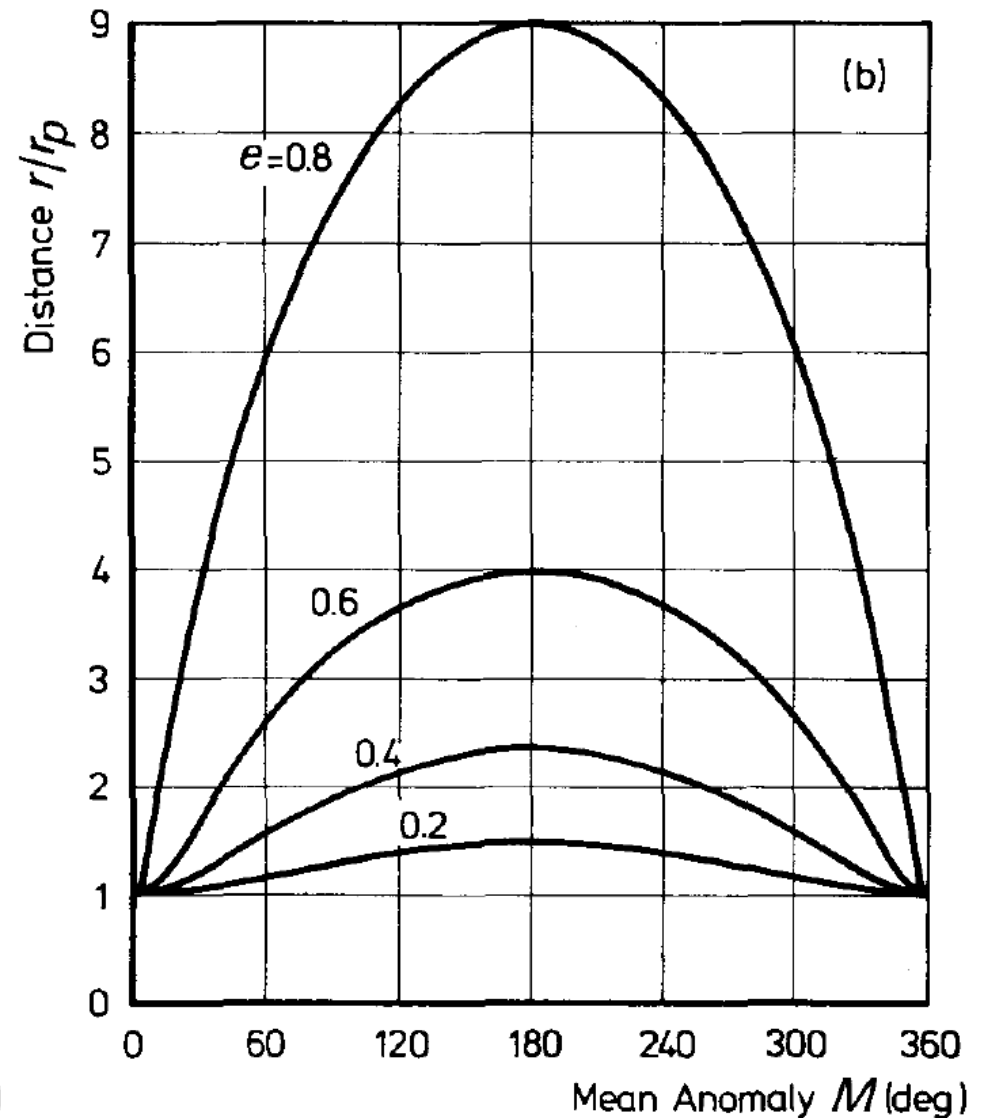
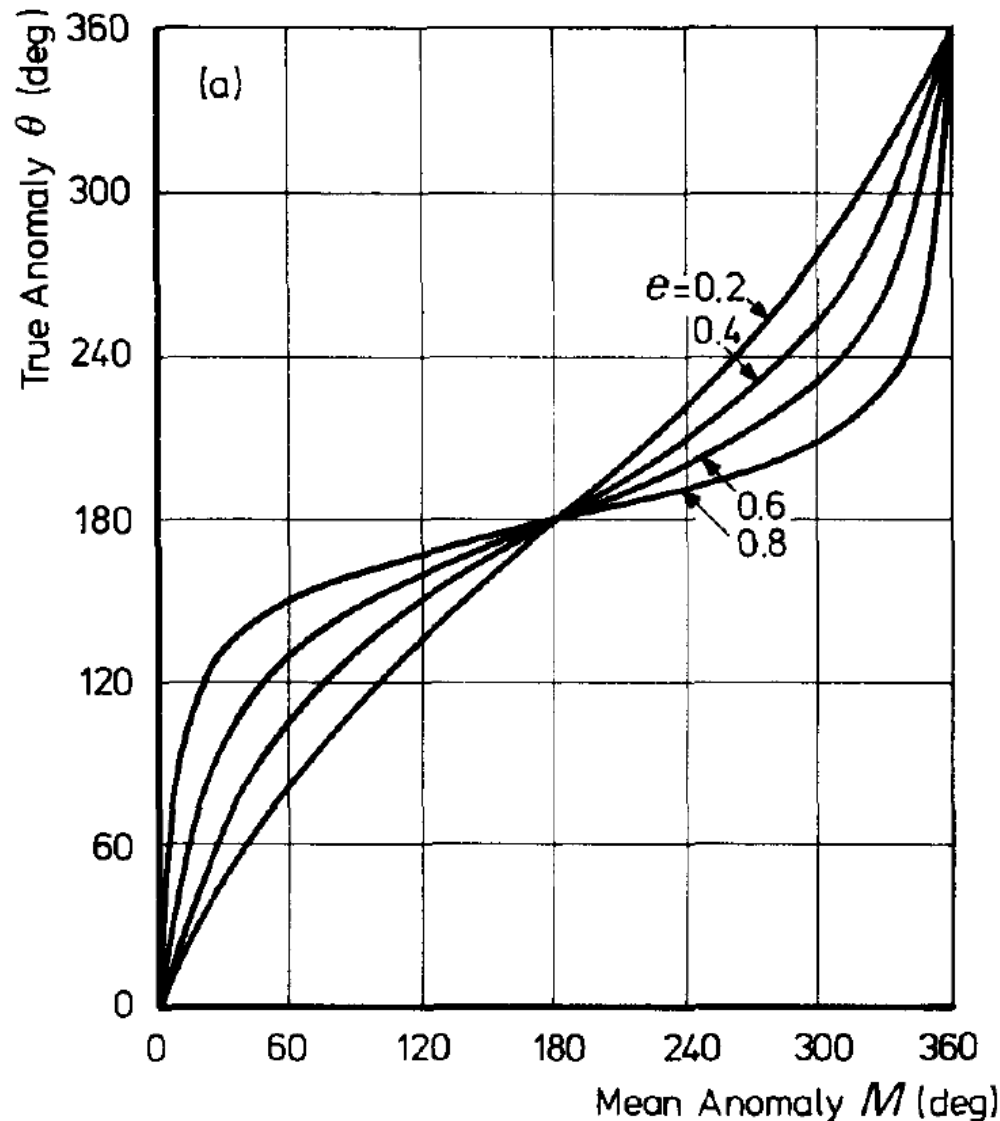
- Ha az a kérdés, hogy mikor van egy bizonyos pozícióban az űrobjektum, akkor egyszerűen megoldjuk ezt az egyenletet.
- Ha azonban űrobjektum pozíciójára vagyunk kíváncsiak egy adott pillanatban, akkor iterációval visszafelé kell megoldani



Forrás: Cornelisse: Rocket Propulsion and Spaceflight Dynamics, p. 371.

# Jellegzetes Föld körüli pályák

- A pozíció és idő közötti összefüggések



Forrás: Cornélisse: Rocket Propulsion and Spaceflight Dynamics, p. 372.

# Jellegzetes Föld körüli pályák

Forrás:

[https://en.wikipedia.org/wiki/Mean\\_anomaly#/media/File:Mean\\_anomaly\\_diagram.png](https://en.wikipedia.org/wiki/Mean_anomaly#/media/File:Mean_anomaly_diagram.png)

