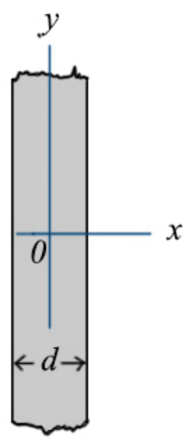
2. gyakorlat

2.1. Feladat: (HN 25B-7) Egy d vastagságú lemezben egyenletes ρ térfogatmenti töltés van. A lemez a $\pm y$ és $\pm z$ irányokban gyakorlatilag végtelen (9. ábra); az x tengely zéruspontját úgy választottuk meg, hogy az a lemez d szélességének a felénél legyen. Számitsuk ki az elektromos térerősség nagyságát x pozitív értékeire az a) $0 < x < d/2$; b) $x > d/2$ esetekre.



9. ábra. A 25B-7 feladathoz

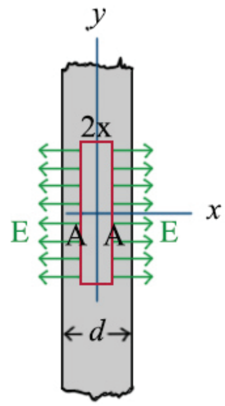
Megoldás: Az elektrosztatikus térerősség forrásai a töltések, ezért: 1) a szimmetria miatt a térerősségnek csak x komponense van, 2) pozitív töltéssűrűség esetén pozitív x-ekre pozitív, negatív x-ekre negatív irányú, emiatt 3) a lemez szélességének felező síkjában nulla.
A Gauss törvény szerint

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 E \text{ fluxusa egy zárt } A \text{ felületre} &= \text{Az összes töltés a felületen belüli térfogatban} \\ \int_A \varepsilon_0 \mathbf{E}\, d\mathbf{A} &= \int_{V(A)} \rho\, dV \qquad (2.1.1) \end{aligned}$$

Vegyünk fel a lemez belsejében egy olyan, $2\,x$ magasságú hengerszerű testet, pl. egyenes hasábot, amelynek két egymással és a lemez felületével párhuzamos A nagyságú felülete van és amely magasságát a lemez középpárhuzamos síkja felezi (ld. 10. ábra). Erre felírva a (2.1.1) Gauss törvényt és felhasználva, hogy a lemez belsejében ρ állandó, illetve $\mathbf{E}$ a hasáb mindkét A felületére merőleges és kifelé mutat, továbbá, hogy a hasáb oldallapjaival/palástjával $\mathbf{E}$ párhuzamos, tehát azokra fluxusa 0:

$$\begin{aligned} \varepsilon_0 E\, 2\, A &= \rho \cdot A\, 2\, x \\ E = \frac{\rho}{\varepsilon_0} x \qquad |x| &\le \frac{d}{2} \qquad (2.1.2) \end{aligned}$$

10. ábra. Térerősség egy egyenletesen töltött szigetelő lemezben



A lemezen kívül ($|x| > d/2$) a térerősség állandó[3] és értéke (2.1.2) maximuma, azaz

$$E = \frac{\rho\, d}{2\,\varepsilon_0} \tag{2.1.3}$$

Vegyük észre, hogy a lemezen kívűl a tér pontosan ugyanolyan, mint egy végtelen σ töltéssűrűségű 2D lemez esetén, mivel $\sigma = \rho\, d$.

2.2. Feladat: (HN 25B-12) Egy nagyon hosszú, R sugarú fémrúdon σ egyenletes felületmenti töltéssűrűség van.
(a) Elhanyagolva a rúd végeinek hatását, számítsuk ki az $\mathbf{E}$ térerősséget a henger felszínétől R távolságban.
(b) Számítsuk ki azt a v sebességet, amellyel egy elektron a rúd körül R távolságban stacionárius körpályán mozogna.

Megoldás:
(a) Az, hogy a fémrúd nagyon hosszú azt jelenti, hogy (első közelítésben) végtelennek tekinthetjük. Szimmetria okokból a térerősség merőleges kell legyen az egyenletesen feltöltött henger felületére, ezért nagysága csak a távolságtól függ. A Gauss törvény használatához egy, a fémrúddal koaxiális henger alakú, r sugarú és l hosszúságú felületet vegyünk fel. Mivel a térerősség ennek a hengernek a palástjára mindenütt merőleges és állandó nagyságú a határoló körök síkjával pedig párhuzamos, erre a teljes zárt felületre vett fluxus megegyezik az r sugarú hengerpalástra vett fluxussal. Az ezen a felületen belüli összes töltés pedig a σ töltéssűrűség és a fémrúd l hosszúságú szakasza felületének szorzata. A Gauss törvény szerint tehát a térerősség a vezetőn kívül

$$\begin{aligned} \varepsilon_o\, 2\, r\, \pi\, l\, E &= 2\, R\, \pi\, l\, \sigma \\ E(r) &= \frac{R\, \sigma}{\varepsilon_o\, r} \end{aligned} \tag{2.2.1}$$

[3]Ez szimmetria okokból is következik.

Innen a térerősség a fémrúdtól R távolságban $(r = 2\,R)$

$$E(R) = \frac{\sigma}{2\,\varepsilon_o} \tag{2.2.2}$$

(b) Ha egy elektron kering ezen az $r = 2\,R$ sugarú körpályán, akkor

$$-e\,E = -\frac{m_e\,v^2}{r} \quad \rightarrow \quad v = \sqrt{\frac{2\,e\,E\,R}{m_e}} = \sqrt{\frac{e\,\sigma\,R}{\varepsilon_o\,m_e}}. \tag{2.2.3}$$

2.3. Feladat: (HN 25C-18) Egy R sugarú gömbben az $\mathbf{E}$ elektromos térerősség kifelé mutat, és értéke mindenütt konstans, E_o. Így, $E = E_o\hat{\mathbf{r}}$, ahol $\hat{\mathbf{r}}$ a kifelé mutató sugárírányú egységvektor.
(a) Felhasználva Gauss törvényét vezessük le hogy hogyan függ a $\rho(r)$ térfogatmenti töltessűrűség az r sugártól. (Útmutatás: az integrálszámítás alaptétele szerint[4] ha $g(x) = \int_o^x f(t)dt$, akkor $\frac{dg}{dx} = f(x)$)
(b) A gömb középpontjával kapcsolatban mílyen nehézség adódik?

Megoldás: Legyen a gömbben a töltéssűrűség ρ. Mivel $\mathbf{E}$ $\mathbf{r}$ irányú a tér gömszimmetrikus, ezért ρ csak a távolságtól függ, az iránytól nem. $\rho = \rho(r)$. A (2.1.1) Gauss törvény alkalmazásához vegyünk fel egy r sugarú köncentrikus A gömbfelületet. Erre a felületre $\mathbf{E}$ mindenhol merőleges, így a Gauss törvény szerint

$$\varepsilon_o\,E(r)\,4\,\pi\,r^2 = \int\limits_{V(r')} \rho(r)\,dV' \tag{2.3.1}$$

A jobboldal integrál kiszámításához vegyük figyelembe, hogy $\rho = \rho(r)$ csak r nagyságától függ, ezért a térfogatra való integrálást elvégezhetjük úgy is, hogy térfogatelemeknek r' sugarú és $d\,r'$ vastagságú gömbhéjakat választunk[5]. Egy ilyen gömbhéj dV' térfogata $dV' = 4\,\pi\,r'^2\,dr'$, töltése $dQ = \rho(r')\,dV' = 4\,\pi\,\rho\,r'^2\,dr'$, azaz a Gauss törvény szerint:

$$\varepsilon_o\,E(r)\,4\,\pi\,r^2 \;=\; 4\,\pi\int_0^r \rho(r')\,r'^2\,dr' \tag{2.3.2}$$

$$\varepsilon_o\,E_o\,r^2 \;=\; \int_0^r \rho(r')\,r'^2\,dr' \tag{2.3.3}$$

[4] Az integrálási változó neve bármi lehet, amit nem keverhetünk össze az integrálás határával. Itt a t-t választottuk.

[5] Vagyis az A felület által határolt térfogatot felosztjuk koncentrikus, dr' vastag $dV'_G = dA' \cdot dr'\; G(r')$ gömbhéjakra, amelyekben ρ jó közelítéssel állandó, tehát az integrál ezekre egyszerűen kiszámítható, majd az így kapott függvényt integráljuk 0 és R között:

$$\int\limits_{V(r)} \rho(r')\,dV' = \int_0^r \int\limits_{G(r')} \rho(r')\,dV'_G = \int_0^r \left(\rho(r') \int\limits_{G(r')} dA'_G\right) dr'$$

$$= \int_0^r \left(\rho(r')\,4\,\pi\,r'^2\right) dr' = 4\,\pi\int_0^r \rho(r')\,r'^2\,dr'$$

Az integrálszámítás alaptétele

$$\text{ha } g(r) = \int_0^r f(r')\, dr' \qquad \text{akkor} \tag{2.3.4}$$

$$f(r) = \frac{d\, g(r)}{d\, r} \tag{2.3.5}$$

A mi esetünkben

$$f(r) \equiv \rho(r)\, r^2 \tag{2.3.6}$$

$$g(r) \equiv \varepsilon_o\, E_o\, r^2 \tag{2.3.7}$$

Tehát

$$\rho(r)\, r^2 = 2\, \varepsilon_o\, E_o\, r$$

$$\rho(r) = 2\, \varepsilon_o\, E_o \frac{1}{r} \tag{2.3.8}$$

b) Látható, hogy ha $r \to 0$, akkor $\rho(r) \to \infty$.

2.4. Feladat: (HN 26B-9) A tér egy tartományában a *volt* egységekben kifejezett V potenciált a

$$V = (3 \left[\frac{V}{m^2}\right])x^2 + (0,2 \left[\frac{V}{m}\right])y$$

függvény adja meg, ahol x és y méterekben megadott távolságok. Számítsuk ki az $x = 10$ cm, $y = 15$ cm koordínátájú helyen levő elektronra ható erő nagyságát és irányát.

Megoldás: A potenciál és a térerősség közötti kapcsolat

$$\mathbf{E} = -gradV(\mathbf{r}) \tag{2.4.1}$$

$$E_x = -\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x}, \quad E_y = -\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y}, \quad E_z = -\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z},$$

Esetünkben $V(x,y,x) = V(x,y) = A\, x^2 + B\, y$

$$E_x = -2\, A\, x, \qquad E_y = -B, \qquad E_z = 0$$

$$F_x = 2\, e\, A\, x, \qquad F_y = e\, B$$

$$F = e\, \sqrt{E_x^2 + E_y^2 + E_z^2} = e\, \sqrt{4\, A^2\, x^2 + B^2} \tag{2.4.2}$$

Az erő iránya az x tengellyel α szöget zár be, ahol $\mathrm{tg}\, \alpha = \frac{B}{2\, A\, x}$, $B = 0,2 \left[\frac{V}{m}\right]$, $A = 3 \left[\frac{V}{m/2}\right]$ és $2\, A\, x = 0.6 \left[\frac{V}{m}\right]$ Behelyettesítve a számértékeket

$$F_x = 6 \cdot 0,1 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 9,6 \cdot 10^{-20}\mathrm{N} \quad F_y = 0,2 \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} = 3,2 \cdot 10^{-20}\mathrm{N}$$

$$F = \sqrt{9,6^2 + 3,2^2} \cdot 10^{-20} = 1,0119 \cdot 10^{-19}\mathrm{N}$$

$$\mathrm{tg}\, \alpha = 0,2/0,6 = 0.33 \quad \Rightarrow \quad \alpha = 18.4^o. \tag{2.4.3}$$

2.5. Feladat: (HN 26B-12) Két egyforma kicsiny fémgömb töltese q_1 illetve q_2. Egymást 1 m távolságból $9 \times 10^{-3} N$ erővel vonzzák. A gömböket összeérintjük, majd újból egymástól 1 m távolságra helyezzük el. Ekkor úgy találjuk, hogy $2 \times 10^{-3} N$ erővel taszítják egymást. Számítsuk ki a q_1 és q_2 töltéseket.

Megoldás: Összeérintés előtt a gömböknek különböző előjelű töltése volt ezért vonzották egymást. Összeérintés után a töltéseik kiegyenlítődtek és mindkettő töltése azonos előjelűvé és $q = \dfrac{q_1 + q_2}{2}$ nagyságúvá vált, ezért taszítják egymást[6] Az egyenleteket felírva

$$
\begin{aligned}
|F_1| &= K\frac{|q_1\, q_2|}{r^2} = 9\,10^9\, q_1\, q_2 = 9\,10^{-3}\ \mathrm{N} \\
|F_2| &= K\frac{q^2}{r^2} = 9\,10^9\, q^2 = 2\,10^{-3}\ \mathrm{N} \qquad (2.5.1)
\end{aligned}
$$

innen, mivel vagy q_1, vagy q_2 negativ kell legyen

$$
\begin{aligned}
q_1 \cdot q_2 = -9 \cdot 10^{-3}/9 \cdot 10^9 &= -10^{-12}\, C^2 \\
\left(\frac{q_1 + q_2}{2}\right)^2 = 2 \cdot 10^{-3}/9 \cdot 10^9 &= 2,22 \cdot 10^{-13}\, C^2; \qquad (2.5.2) \\
\frac{q_1 + q_2}{2} &= \pm\sqrt{2,22 \cdot 10^{-13}}\ \mathrm{C} \\
q_1 + q_2 = \pm 2 \cdot \sqrt{2,22 \cdot 10^{-13}} &= \pm 9,4234 \cdot 10^{-7}\, C \\
q_2 &= -10^{-12}\frac{1}{q_1} \\
q_1 - 10^{-12}\frac{1}{q_1} &= \pm 9,4234 \cdot 10^{-7}\, C \\
q_1^2 \mp 9,4234 \cdot 10^{-7} \cdot q_1 - 10^{-12} &= 0. \qquad (2.5.3)
\end{aligned}
$$

A két egyenletet felírva

$$
\begin{aligned}
q_1^2 - 9,4234 \cdot 10^{-7} \cdot q_1 - 10^{-12} &= 0 \qquad (2.5.4) \\
q_1^2 + 9,4234 \cdot 10^{-7} \cdot q_1 - 10^{-12} &= 0. \qquad (2.5.5)
\end{aligned}
$$

Jelöljük a négyzetgyök előjelét felső indexben

$$
\begin{aligned}
q_{1,\pm}^{+} &= \frac{9,4234 \cdot 10^{-7} \pm \sqrt{3,5555 \cdot 10^{-12} + 4 \cdot 10^{-12}}}{2} \qquad (2.5.6) \\
&= \frac{9,4234 \cdot 10^{-7} \pm 2,7487 \cdot 10^{-6}}{2} \qquad (2.5.7) \\
q_{1,\pm}^{-} &= \frac{-9,4234 \cdot 10^{-7} \pm \sqrt{3,5555 \cdot 10^{-12} + 4 \cdot 10^{-12}}}{2} \qquad (2.5.8) \\
&= \frac{-9,4234 \cdot 10^{-7} \pm 2,7487 \cdot 10^{-6}}{2} \qquad (2.5.9)
\end{aligned}
$$

[6] Ez arra utal, hogy kezdetben nem volt azonos nagyságú a töltésük.

$$q_1^+ = \begin{cases} 1,5767 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C} \\ -6.3425 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{C} \end{cases} \tag{2.5.10}$$

$$q_2^+ = \begin{cases} -6.3425 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{C} \\ 1,5767 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C} \end{cases} \tag{2.5.11}$$

$$q_1^- = \begin{cases} -1,5767 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C} \\ 6.3425 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{C} \end{cases} \tag{2.5.12}$$

$$q_2^- = \begin{cases} 6.3425 \cdot 10^{-7}\ \mathrm{C} \\ -1,5767 \cdot 10^{-6}\ \mathrm{C}. \end{cases} \tag{2.5.13}$$

Innen látható, hogy elég lett volna a négyzetgyökvonásnál a pozitív előjelet használni amivel megkaptuk volna a az első két megoldást, majd utána felcserélni az előjeleket a második két megoldáshoz. Visszahelyettesítve pl. ez első két megoldást és elhagyva a felső indexet

$$K\frac{q_1 \cdot q_2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \tfrac{1,5767 \cdot 10^{-6} \cdot 0,63425 \cdot 10^{-6}}{1} = 9 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N}, \tag{2.5.14}$$

$$K\frac{\left(\frac{q_1+q_2}{2}\right)^2}{r^2} = 9 \cdot 10^9 \cdot \tfrac{\left(1,5767 \cdot 10^{-6} + 0,63425 \cdot 10^{-6}\right)^2}{4} = 2.00 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{N}. \tag{2.5.15}$$

2.6. Feladat: (HN 26C-17) Egy R sugarú gömb belsejében a töltéssűrűség a középponttól való r távolsággal arányos, azaz $\varrho(r) = Ar$, ha $(0 < r < R)$, ahol A egy állandó.
(a) Mi A SI egysége?
(b) Mekkora a gömb teljes Q töltése A-val és R-rel kifejezve?
(c) Gauss törvényét felhasználva számítsuk ki a gömb belsejében és kívül, a középponttól r távolságra az E térerősséget.
(d) Számítsuk ki a V potenciált r függvényében a gömbön belül is, kívül is. (Legyen $V = 0$ a végtelenben.)

Megoldás:
(a) Az A paraméter mértékegysége $\mathrm{C/m^4}$.
(b) A gömb teljes töltése:

$$Q = \int_0^R \varrho(r) 4r^2\pi \mathrm{d}r = \int_0^R A4r^3\pi \mathrm{d}r = AR^4\pi. \tag{2.6.1}$$

(c) A térerősség kiszámolásához

$$\oint \mathbf{E}\mathrm{d}\mathbf{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} \tag{2.6.2}$$

a Gauss-törvényt használjuk. A gömbön belüli térrészre alkalmazva

$$E4r^2\pi = \frac{1}{\varepsilon_0}\int_0^r \varrho(r)4r^2\pi \mathrm{d}r = \frac{1}{\varepsilon_0}Ar^4\pi, \tag{2.6.3}$$

amelyből

$$E = \frac{A}{4\varepsilon_0} r^2 \qquad (0 < r < R). \tag{2.6.4}$$

A gömbön kívüli térrészre az

$$E 4r^2\pi = \frac{1}{\varepsilon_0} AR^4\pi \tag{2.6.5}$$

írható, amelyből

$$E = \frac{AR^4}{4\varepsilon_0}\frac{1}{r^2} \qquad (R < r). \tag{2.6.6}$$

(d) Az elektromos potenciál meghatározása a gömbön kívül $(R < r)$ az

$$U(r) - U(\infty) = -\int_{\infty}^{r} \frac{AR^4}{4\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r = \frac{AR^4}{4\varepsilon_0}\left[\frac{1}{r}\right]_{\infty}^{r} \tag{2.6.7}$$

integrál kiszámolásával történik. Innen a végtelenbeli zérus potenciálhoz viszonyítva az r-beli potenciál:

$$U(r) = \frac{AR^4}{4\varepsilon_0}\frac{1}{r} \qquad (R < r). \tag{2.6.8}$$

A potenciál a gömb felszínén ugyancsak a végtelenbeli zérus potenciálhoz viszonyítva:

$$U(r) = \frac{AR^3}{4\varepsilon_0} \qquad (r = R). \tag{2.6.9}$$

A felületről a gömb belseje felé haladva a potenciálkülönbség

$$U(r) - U(R) = -\int_{\infty}^{R} \frac{A}{4\varepsilon_0} r^2 \mathrm{d}r = -\frac{A}{12\varepsilon_0}\left[r^3\right]_R^r = -\frac{A}{12\varepsilon_0} r^3 + \frac{A}{12\varepsilon_0} R^3. \tag{2.6.10}$$

Így a gömb belsejében lévő r pontban a potenciál a végtelenhez viszonyítva:

$$U(r) = \frac{AR^3}{4\varepsilon_0} - \frac{A}{12\varepsilon_0} r^3 + \frac{A}{12\varepsilon_0} R^3 = -\frac{A}{12\varepsilon_0} r^3 + \frac{A}{3\varepsilon_0} R^3 \qquad (0 < r < R). \tag{2.6.11}$$

Házi feladat (gyakorlásra):
25/ 1, 5, 10, 15, 16, 19, 20
26/3, 7, 8, 9, 21, 24, 27, 33, 37, 41