1. Oldjuk meg a következő egyenletet : (12 pont)

$$2^{\,3x^2-3x-18} = 8^{\frac{x+2}{x-3}} \iff 8^{\,x^2-x-6} = 8^{\frac{x+2}{x-3}} \iff x^2-x-6=\frac{x+2}{x-3} \iff (x+2)\cdot(x-3)=\frac{x+2}{x-3} \Rightarrow$$

I. $x+2=0 \iff \boxed{x=-2}$ **II.** Ha $x+2\neq 0$, akkor $(x-3)^2=1 \iff |x-3|=1$, melyből $\boxed{x=4}$ vagy $\boxed{x=2}$.

2. Oldjuk meg a következő egyenletet : (12 pont)

$$2\cdot\cos 2x+3\cdot\sin^2 x = 1-\cos x \iff 2\cdot(\cos^2 x-\sin^2 x)+3\cdot\sin^2 x = 1-\cos x \iff 2\cdot\cos^2 x+\sin^2 x = 1-\cos x \iff$$

$$\cos^2 x+\cos^2 x+\sin^2 x = 1-\cos x \iff \cos^2 x+1 = 1-\cos x \iff \cos x\cdot(\cos x+1) = 0 \iff$$

I. $\cos x=0 \iff \boxed{x=\frac{\pi}{2}+k\cdot\pi,\quad k\in\mathbf{Z}}$, **II.** $\cos x=-1 \iff \boxed{x=(2k+1)\cdot\pi,\quad k\in\mathbf{Z}}$.

3. Milyen $k\in\mathbf{R}$ esetén lesz két különböző valós megoldása a $k\cdot x^2-(k+3)\cdot x+4=0$ egyenletnek ? (13 pont)

Két különböző megoldás pontosan akkor van, ha $k\neq 0$ és a diszkrimináns pozitív, azaz ha $k\neq 0$ és

$$(k+3)^2-4\cdot 4\cdot k > 0 \iff k^2-10\cdot k+9>0 \iff (k-1)\cdot(k-9)>0 \iff \boxed{k<1 \text{ és } k\neq 0} \text{ vagy } \boxed{k>9} .$$

4. Három szám számtani sorozatot alkot, összegük 300 .
Ha a harmadikhoz 50 -et hozzáadunk, mértani sorozatot kapunk. Melyik ez a három szám ? (13 pont)

Legyen a sorozat második tagja a, a differencia d, a mértani sorozat hányadosa q .

$$(a-d)+a+(a+d)=300 \Rightarrow \boxed{a=100} , \qquad \frac{100}{q}+100+100\cdot q=300+50 \iff 2\cdot q^2-5\cdot q+2=0$$

$$\Rightarrow \quad q=\frac{5\pm\sqrt{25-4\cdot2\cdot2}}{4}=\frac{5\pm3}{4} \Rightarrow q_1=2,\quad q_2=\frac{1}{2} .$$

A mértani sorozat első három tagja tehát $\boxed{50,\ 100,\ 200}$ vagy $\boxed{200,\ 100,\ 50}$.

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{A három szám : } 50,\ 100,\ 150 \quad \text{vagy} \quad 200,\ 100,\ 0}$.

Így is okoskodhattunk volna : $q=\frac{a}{a-d}=\frac{a+d+50}{a} \Rightarrow \frac{100}{100-d}=\frac{100+d+50}{100} \Rightarrow 100^2=(100^2-d^2)+50\cdot(100-d)$

$\Rightarrow d^2+50\cdot d-50\cdot100=0 \Rightarrow d=50$ vagy $d=-100$, így a három szám $\boxed{50,\ 100,\ 150 \quad \text{vagy} \quad 200,\ 100,\ 0}$.

1. A $p \in \mathbf{R}$ paraméter mely értékeire van a $(p-2)\cdot x^2 + 2p\cdot x + 2p-3=0$ egyenletnek valós megoldása ? (13 pont)

Ha $p \neq 2$, akkor valós megoldás pontosan akkor van, ha a diszkrimináns nemnegatív, azaz ha $(2p)^2 - 4\cdot(p-2)\cdot(2p-3) \geq 0$

$\Leftrightarrow \quad p^2-(2p^2-7p+6) \geq 0 \quad \Leftrightarrow \quad p^2-7p+6 \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad (p-1)\cdot(p-6) \leq 0 \quad \Leftrightarrow \quad 1 \leq p \leq 6$ (de $p \neq 2$),

így figyelembevéve, hogy a $p=2$ lineáris esetben is van valós megoldás (az egyenlet ekkor $4x+1=0$, megoldás $x=-0.25$),

valós megoldás pontosan akkor van, ha $\boxed{1 \leq p \leq 6}$.

2. Oldjuk meg a következő egyenletet : (13 pont)

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2x+3}{2x-1}} = \left(\frac{1}{27}\right)^{\frac{x+9}{3x+3}} \quad \Leftrightarrow \quad \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{2x+3}{2x-1}} = \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{x+9}{x+1}} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2x+3}{2x-1} = \frac{x+9}{x+1} \quad \Leftrightarrow \quad (2x+3)\cdot(x+1) = (2x-1)\cdot(x+9)$$

$$\Leftrightarrow \quad 2x^2+5x+3 = 2x^2+17x-9 \quad \Leftrightarrow \quad 12x-12=0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x=1} \; .$$

3. Oldjuk meg a következő egyenletet : (12 pont)

$$\sin^2 x + 3\cdot\cos^2 x = 3-\sin x \quad \Leftrightarrow \quad \sin^2 x + 3\cdot(1-\sin^2 x) = 3-\sin x \quad \Leftrightarrow \quad -2\cdot\sin^2 x = -\sin x \quad \Leftrightarrow$$

$$2\cdot\sin^2 x - \sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin x\cdot(2\cdot\sin x - 1) = 0$$

$\Rightarrow$ **I.** $\sin x = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = k\cdot\pi, \quad k \in \mathbf{Z}}$,

II. $\sin x = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x = \frac{\pi}{6} + k\cdot 2\pi, \quad k \in \mathbf{Z}}$ vagy $\boxed{x = \frac{5\pi}{6} + k\cdot 2\pi, \quad k \in \mathbf{Z}}$.

4. Egy számtani sorozat második és negyedik elemének összege 16, ötödik és hetedik elemének összege 52.
Mennyi az első hét elem összege ? (12 pont)

Legyen a sorozat (a_n), a differencia d.

Ekkor $(a_3-d)+(a_3+d)=16 \quad \Rightarrow \quad a_3=8$, $\quad (a_6-d)+(a_6+d)=52 \quad \Rightarrow \quad a_6=26$. $\quad a_6 = a_3+3\cdot d \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad d = \frac{a_6-a_3}{3} = \frac{26-8}{3} = 6 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a_1 = a_3-2d = -4}, \qquad \boxed{a_7 = a_6+d = 32},$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\sum_{k=1}^{7} a_k = \frac{a_1+a_7}{2}\cdot 7 = \frac{-4+32}{2}\cdot 7 = 98} \; .$$