ANALIZIS(2) I.ZÁRTHELYI B variáns 2008. márc. 19.

Mérnök Informatikus szak Munkaidő: 90 perc

BME, TTK, Matematika Intézet, Analízis Tanszék

1) Feladat (13 pont).

Adja meg az

$$y' = (x-4)\, e^{x}\ \frac{y^3+3y}{3y^2+3}$$

differenciálegyenlet $y(1)=2$, valamint az $y(2)=0$ kezdeti értékhez tartozó megoldását!

$$\frac{dy}{dx} = \underbrace{(x-4)\,e^{x}}_{f(x)}\ \underbrace{\frac{y^3+3y}{3y^2+3}}_{g(y)}$$ szeparábilis de

$y \equiv 0$ megoldás. 1

$y \neq 0$ $\displaystyle\int \frac{3y^2+3}{y^3+3y}\,dy = \underbrace{\int (x-4)e^{x}\,dx}$ 2

$\frac{f'}{f}$

$u = x-4 \quad v' = e^{x}$

$u' = 1 \quad v = e^{x}$

jobb oldal $= (x-4)e^{x} - \int e^{x}\,dx$

Így a de. általános megoldása:

$\ln|y^3+3y| = (x-4)e^{x} - e^{x} + C$, ill. $y \equiv 0$ is mo.

2 4 1

$y(1)=2$: $\ln 14 = -3e - e + C \Rightarrow C = 4e + \ln 14$

$\ln(y^3+3y) = (x-4)e^{x} - e^{x} + 4e + \ln 14$ 2

($y_0 = 2 > 0$ miatt: $|y^3+3y| = y^3+3y$

$y(2)=0$: $y \equiv 0$ (más megoldás nincs) 1

2) Feladat (15 pont).

Írja fel az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y' + \frac{2}{x}\, y = 2x^3$$

$y_{iá} = y_H + y_{ip}$ $x \neq 0$ 2

(H) $y' + \frac{2}{x} y = 0$ $y_H = C \cdot \varphi(x)$ alakú.

Elegendő egy φ-t keresni.

$\frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x} y \Rightarrow \int \frac{dy}{y} = -2 \int \frac{1}{x}\,dx \Rightarrow \ln y = -2\, l$

$\Rightarrow y = \frac{1}{x^2}$ a keresett φ

$y_H = \frac{C}{x^2}$ $C \in \mathbb{R}$ 6

Vagy: $y' + \frac{2}{x} y = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = -\frac{2}{x} y$ $y \equiv 0$ mo

$y \neq 0$ $\int \frac{1}{y}\,dy = -2 \int \frac{1}{x}\,dx \Rightarrow \ln|y| = -2 \ln|x| +$

$\Rightarrow |y| = e^{C_1} e^{\ln \frac{1}{x^2}} = e^{C_1} \frac{1}{x^2} \Rightarrow y = \pm e^{C_1} \frac{1}{x^2}$ ill.

Tehát $y_H = C \cdot \frac{1}{x^2}$ $C \in \mathbb{R}$

(I): $y_{ip} = \frac{c(x)}{x^2}$ 1 $y_{ip}' = \frac{c' \cdot x^2 - c \cdot 2x}{x^4} = \frac{c'}{x^2} - \frac{2c}{x^3}$

Behelyettesítve I-be:

$\frac{c'}{x^2} \cancel{- \frac{2c}{x^3}} + \cancel{\frac{2}{x} \frac{c}{x^2}} = 2x^3 \Rightarrow c' = 2x^5 \Rightarrow c$

$y_{ip} = \frac{x^6}{3}$

$y_{iá} = \frac{C}{x^2} + \frac{x^4}{3}$

3) Feladat (18 pont).

~~a)~~ Vezesse be az $u = y^5$ új változót az alábbi kezdetiérték problémába, majd oldja meg a kapott egyenletet:

$$5y' - 3y = \frac{e^{2x}-6}{y^4}, \qquad y(0) = -1$$

$u = y^5 \Rightarrow u' = 5y^4 \cdot y'$ 2

A de-et y^4-nel beszorozva:

$5y'y^4 - 3y^5 = e^{2x} - 6$

$u' - 3u = e^{2x} - 6$ 3 lineáris elsőrendű

Mivel állandó együtthatójú és a zavaró fü

is megfelelő típusú, használható az n-edre

de-eknél tanult módszer is:

$u_{iá} = u_H + u_{ip}$

(H): $u = e^{\lambda x}$: $\lambda - 3 = 0$: a karakterisztikus eg

$\Rightarrow \lambda = 3$, tehát $u_H = Ce^{3x}$, $C \in \mathbb{R}$

Mivel $f(x) = e^{2x} - 6$, a kísérletező függvény:

$$\begin{array}{r|l} -3 & u_{ip} = Ae^{2x} + B \quad \text{(nincs külső rezonancia)} \\ 1 & u_{ip}' = 2Ae^{2x} \end{array}$$

$$e^{2x}(-3A + 2A) - 3B = e^{2x} - 6 \Rightarrow A = -1, \; B = 2$$

$$\Rightarrow u_{ip} = -e^{2x} + 2$$

$$u_{iá} = Ce^{3x} - e^{2x} + 2 \qquad 8$$

Másik megoldás: $u_{iá} = u_H + u_{ip}$

(H): $u' - 3u = 0 \Rightarrow \frac{du}{dx} = 3u \qquad u_H = C \cdot \varphi(x)$

$$\int \frac{du}{u} = \int 3\,dx \Rightarrow \ln u = 3x \Rightarrow u = e^{3x} = \varphi(x)$$

$$u_H = C \cdot e^{3x}, \; C \in \mathbb{R}$$

$$u_{ip} = c(x)e^{3x} \Rightarrow u_{ip}' = c'e^{3x} + ce^{3x} \cdot 3$$

$$(I): \; c'e^{3x} + \cancel{3ce^{3x}} - \cancel{3ce^{3x}} = e^{2x} - 6$$

$$c' = \frac{e^{2x} - 6}{e^{3x}} = e^{-x} - 6e^{-3x} \Rightarrow c(x) = -e^{-x} - 6\frac{e^{-3x}}{-3}$$

$$\Rightarrow u_{ip} = -e^{2x} + 2$$

Visszatérve y-ra: $y^5 = Ce^{3x} - e^{2x} + 2$ 2

$y(0) = -1$: $-1 = C - 1 + 2 \Rightarrow C = -2$

$$y^5 = -2e^{3x} - e^{2x} + 2 \qquad 2$$

$$\left(y = \sqrt[5]{-2e^{3x} - e^{2x} + 2} \right)$$

4) Feladat (14 pont).

Az $y = y(x)$ akárhányszor differenciálható, átmegy az $x_0 = -2$, $y_0 = 4$ ponton és megoldása az alábbi differenciálegyenletnek:

$$y' = \frac{y + x + 3}{y + x}, \qquad y \neq -x$$

a) Milyen irányú az iránymező ebben a pontban? Mely pontokban lesz ugyanilyen irányú az iránymező?
b) Határozza meg ennek a megoldásnak az $x_0 = -2$ pontbeli második deriváltját!
c) Van-e inflexiója ennek a megoldásnak az $x_0 = -2$ pontban?

a) $y(-2) = 4$

$$y'(-2) = \frac{4 - 2 + 3}{4 - 2} = \frac{5}{2} \qquad 3$$

Az adott ponthoz tartozó izoklína:

$$\frac{y + x + 3}{y + x} = \frac{5}{2} \Rightarrow 3 = \frac{3}{2}(y + x) \Rightarrow y = -x + 2 \qquad 4$$

Tehát ezen egyenes pontjaiban lesz ugyanilyen irányú az iránymező.

b.) $$y'' = \frac{(y'+1)(y+x) - (y+x+3)(y'+1)}{(y+x)^2} \left(= \frac{-3(y'+1)}{(y+x)^2} \right) \qquad 4$$

$$y''(-2) = \frac{-3 \cdot \frac{7}{2}}{(4-2)^2} = -\frac{21}{8} \qquad 1$$

c.) Mivel $y''(-2) \neq 0 \Rightarrow$ nincs inflexió ebben a pontban (Az $y(-2) = 4$ kezdeti feltételt kielégítő megoldásnak nincs inflexiója az $x_0 = -2$ pontban.) 2

5) Feladat (18 pont).

a) Írja fel az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y''' - 6y'' + 25y' = 5$$

b) Írjon fel egy olyan legalacsonyabb rendű, lineáris homogén differenciálegyenletet, amelynek megoldása: $y = 3x^2 + e^{5x}\cos 3x$

a.) (H): $\lambda^3 - 6\lambda^2 + 25\lambda = \lambda(\lambda^2 - 6\lambda + 25) = 0$ 2

$$\lambda_1 = 0 \quad \lambda_{2,3} = \frac{6 \pm \sqrt{36 - 100}}{2} = 3 \pm j4 \qquad 2$$

$$y_H = C_1 + C_2 e^{3x}\cos 4x + C_3 e^{3x}\sin 4x \qquad C_i \in \mathbb{R} \qquad 3$$

$$\begin{array}{r|l} & y_{ip} = Ax \quad \text{(külső rezonancia)} \qquad 2 \\ 25 & y_{ip}' = A \qquad 25A = 5 \Rightarrow A = \frac{1}{5} \Rightarrow y_{ip} = \frac{1}{5}x \qquad 1 \end{array}$$

$$y_{iá} = y_H + y_{ip} = C_1 + C_2 e^{3x}\cos 4x + C_3 e^{3x}\sin 4x + \frac{1}{5}x \qquad 2$$

b.) $3x^2$ miatt: $\lambda_{1,2,3} = 0$

$e^{5x}\cos 3x$ miatt: $\lambda_4 = 5 + j3 \quad \lambda_5 = 5 - j3$ 3

Karakterisztikus egyenlet:

$$\lambda^3(\lambda - (5+j3))(\lambda - (5-j3)) = \lambda^3((\lambda-5) - j3)((\lambda-5) + j3) = \lambda^3((\lambda-5)^2 - (j3)^2) =$$
$$= \lambda^3(\lambda^2 - 10\lambda + 34) = 0$$

A de.: $y^{V} - 10y^{IV} + 34y''' = 0$ 3

Kizárólag a 40% eléréséhez vesszük figyelembe:

8) Feladat (13 pont).

Írja fel az alábbi differenciálegyenlet általános megoldását:

$$y' - \frac{y}{x} = x^3$$

(H): $y' - \frac{y}{x} = 0 \Rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{y}{x}$

$y_H = C\cdot\varphi(x)$ miatt elég egy megoldást keresni.

$\int \frac{dy}{y} = \int \frac{dx}{x} \Rightarrow \ln y = \ln x \Rightarrow y = \varphi(x) = x$

$y_H = C\cdot x$ 6

$y_{ip} = C(x)\cdot x$

$y'_{ip} = c'\cdot x + c\cdot 1$

(I): $c'x + c - \frac{1}{x}\, c\, x = x^3 \Rightarrow c' = x^2 \Rightarrow c(x) = \frac{x^3}{3}$

Tehát $y_{ip} = \frac{x^4}{3}$ 5

$y_{\acute{a}} = y_H + y_{ip} = C\cdot x + \frac{x^4}{3}$ $C\in\mathbb{R}$ 2

9) Feladat (07 pont).

Konvergens-e az alábbi sor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^{3n}\, n^3}{(n+1)^{2n}}$$

$\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{(2^3)^n\, n^3}{((n+1)^2)^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{8\,(\overbrace{\sqrt[n]{n}}^{\to 1})^3}{\underbrace{(n+1)^2}_{\to\infty}} = 0 < 1$ 1 4 1

$\Rightarrow \sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ konv. 1

an2z1080319/6.

6) Feladat (12 pont).

a) Írja le a numerikus sorokra vonatkozó hányadoskritérium limeszes alakját!

b) Konvergens-e az alábbi sor:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3^n\, n^{2n}}{(2n)!}$$

a.) $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$, $a_n > 0$

$\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = c$

Ha $c < 1$: $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ konvergens

Ha $c > 1$ vagy $c = \infty$: $\sum\limits_{1}^{\infty} a_n$ divergens 3

(Ha $c = 1$: ?-es eset)

b.) $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{3^{n+1}(n+1)^{2n+2}\,(2n)!}{(2n+2)!\; 3^n\; n^{2n}}$ 2 $= \frac{3\,(n+1)^2\,(n+1)^{2n}}{(2n+2)(2n+1)\; n^{2n}} =$

$= \frac{3}{2}\,\underbrace{\frac{n+1}{2n+1}}\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right)^2 \to \frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\, e^2 = \frac{3e^2}{4} > 1$ 5 1

$= \frac{1+\frac{1}{n}}{2+\frac{1}{n}}$

$\Rightarrow \sum\limits_{}^{\infty} a_n$ divergens 1

7) Feladat (10 pont).

$$f(n) = \frac{7}{2} f(n-1) - \frac{3}{2} f(n-2)$$

a) Írja fel a rekurzió általános megoldását!

b) Írja fel a rekurzió $f(0) = 5$, $f(1) = \frac{15}{2}$ megoldását!

a.) $f(n) = q^n$, $q \neq 0$: 1

$q^n = \frac{7}{2} q^{n-1} - \frac{3}{2} q^{n-2}$ $\quad | : q^{n-2}$ 2

$q^2 = \frac{7}{2} q - \frac{3}{2} \Rightarrow q^2 - \frac{7}{2} q + \frac{3}{2} = 0 \Rightarrow q_1 = 3,\ q_2 = \frac{1}{2}$ 2

$f(n) = C_1\cdot 3^n + C_2\left(\frac{1}{2}\right)^n$ $\quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ 2

b.) $f(0) = 5$: $\quad C_1 + C_2 = 5$

$f(1) = \frac{15}{2}$ $\quad 3C_1 + \frac{1}{2} C_2 = \frac{15}{2}$ 2 $\Rightarrow \dots\ C_1 = 2,\ C_2 = 3$

$f(n) = 2\cdot 3^n + 3\left(\frac{1}{2}\right)^n$ 1

an2z1080319/5.