

Megoldás

1. feladat 24 pont

(a) $\frac{(6 + 3i) \cdot (2 - i)}{(2 + i)^2} = ?$ (Az eredményt algebrai alakban adja meg!)

(b) $\frac{(6 + 3i) + (2 - i)}{(4 + i) \cdot 2} = ?$ (Az eredményt algebrai alakban adja meg!)

(c) Adja meg a $z^8 = 8z^2$ egyenlet komplex megoldásait! Adja meg egy nem valós megoldás valós és képzetes részét!

Megoldás:

(a) $\frac{(6 + 3i) \cdot (2 - i)}{(2 + i)^2} = \frac{3 \cdot (2 - i)^2}{(2 + i) \cdot (2 - i)} = \frac{3}{5}(4 - 4i + i^2) = \frac{9}{5} - \frac{12}{5}i$ **10p.**

(b) $\frac{(6 + 3i) + (2 - i)}{(4 + i) \cdot 2} = \frac{8 + 2i}{8 + 2i} = 1$ **4p.**

(c) $z^8 - 8z^2 = z^2(z^6 - 8)$ gyökei $z_k = \sqrt[6]{8} = \sqrt{2}(\cos(k \cdot 60^\circ) + i \sin(k \cdot 60^\circ))$, ahol $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ és $z_{6,7} = 0$.

Nem valósak valós és képzetes része (csak egy kell):

$$\operatorname{Re} z_1 = \sqrt{2} \cos 60^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ és } \operatorname{Im} z_1 = \sqrt{2} \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\operatorname{Re} z_2 = \sqrt{2} \cos 120^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ és } \operatorname{Im} z_2 = \sqrt{2} \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\operatorname{Re} z_4 = \sqrt{2} \cos 240^\circ = -\frac{\sqrt{2}}{2} \text{ és } \operatorname{Im} z_4 = \sqrt{2} \sin 240^\circ = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$

$$\operatorname{Re} z_5 = \sqrt{2} \cos 300^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ és } \operatorname{Im} z_5 = \sqrt{2} \sin 300^\circ = -\frac{\sqrt{6}}{2}$$
 10p.

2. feladat

39 pont

Határozza meg az

$$\bullet a_n = \frac{n + \sqrt{n} + \sqrt[n]{n}}{4n + \cos(4n)}; \quad \bullet b_n = \left(\frac{n^2 + 2n}{n^2 + 2} \right)^{n^2}; \quad \bullet c_n = \sqrt[n]{3^n + 5^{(-1)^n \cdot n}};$$

sorozatok határértékét, ha léteznek!

Megoldás:

$$\bullet a_n = \frac{1 + \overbrace{\frac{1}{\sqrt{n}}}^{\rightarrow 0} + \overbrace{\frac{\sqrt[n]{n}}{n}}^{\rightarrow 0}}{4 + \underbrace{\cos(4n)}_{\text{korl}} \cdot \underbrace{\frac{1}{n}}_{\rightarrow 0}} = \frac{1}{4} \quad \boxed{11\text{p.}}$$

$$\bullet b_n = \frac{\left(1 + \frac{2}{n}\right)^{n^2}}{\left(1 + \frac{2}{n^2}\right)^{n^2}} \geq \frac{\left(\left(1 + \frac{2}{n}\right)^n\right)^n}{e^2} \geq \frac{3^n}{e^2} \rightarrow \infty, \text{ így a speciális rendőrelv miatt } b_n \rightarrow \infty \quad \boxed{15\text{p.}}$$

• Ha n páros, akkor $5 = \sqrt[n]{5^n} \leq c_n = \sqrt[n]{3^n + 5^n} \leq \sqrt[n]{5^n + 5^n} = \sqrt[n]{2} \cdot 5 \rightarrow 5$, így $c_n \rightarrow 5$
 Ha n páratlan, akkor $3 = \sqrt[n]{3^n} \leq c_n = \sqrt[n]{3^n + \left(\frac{1}{5}\right)^n} \leq \sqrt[n]{3^n + 3^n} = \sqrt[n]{2} \cdot 3 \rightarrow 3$, így $c_n \rightarrow 3$

c_n -nek van 2 torlódási pontja, így nincs határértéke. 13p.

3. feladat **13 pont**

Legyen $d_1 = 2$ és $d_{n+1} = 5 - \frac{4}{d_n}$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén.

Mutassa meg, hogy d_n monoton növény, és korlátos. Adja meg d_n határértékét, ha létezik!

Megoldás:

(a) Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy $1 \leq d_n \leq 4$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén.

Mivel $d_1 = 2$, ezért $n = 1$ -re az állítás teljesül.

Ha valamilyen n -re teljesül, azaz $1 \leq d_n \leq 4$, akkor $\frac{1}{4} \leq \frac{1}{d_n} \leq 1$, így $1 \leq \frac{4}{d_n} \leq 4$, és ezért $1 \leq 5 - \frac{4}{d_n} = d_{n+1} \leq 4$.

Teljes indukcióval megmutatjuk, hogy d_n monoton növény, azaz $d_n \leq d_{n+1}$ minden $n \in \mathbb{N}^+$ esetén.

Mivel $d_2 = 3$, ezért $n = 1$ -re az állítás teljesül.

Ha valamilyen n -re teljesül, azaz $d_n \leq d_{n+1}$, akkor mivel d_n pozitív, ezért $\frac{1}{d_n} \geq \frac{1}{d_{n+1}}$ és így $d_{n+1} = 5 - \frac{4}{d_n} \leq 5 - \frac{4}{d_{n+1}} = d_{n+2}$, vagyis $n + 1$ -re is teljesül az egyenlőtlenség.

Mivel a sorozat korlátos és monoton, ezért konvergens, határértéke a rekurzió valamelyik fixpontja.

Az $A = 5 - \frac{4}{A}$ megoldásai $A = 1$ és $A = 4$. Mivel d_n monoton növény, a határérték felső korlát is, így nem lehet 1. Tehát $\lim d_n = 4$. **13p.**

4. feladat **24 pont**

Határozza meg az

$$f(x) = \frac{\sin(4 - x^2)}{x^2 + 2x}$$

függvény alábbi határértékeit, ha léteznek!

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$;
- $\lim_{x \rightarrow -2} f(x)$;
- $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$;
- $\lim_{x \rightarrow 2} f(x)$;

Megoldás:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \underbrace{\sin(4 - x^2)}_{\text{korl.}} \cdot \underbrace{\frac{1}{x^2 + 2x}}_{\rightarrow 0} = 0 \quad \mathbf{5p.}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -2} f(x) = \lim_{x \rightarrow -2} \underbrace{\frac{\sin(4 - x^2)}{4 - x^2}}_{\rightarrow 1} \cdot \underbrace{\frac{(2+x)(2-x)}{(x+2)x}}_{\rightarrow \frac{4}{-2}} = -2 \quad \mathbf{8p.}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 0 \pm} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0 \pm} \frac{\sin(\overbrace{4 - x^2}^{\rightarrow 4})}{\underbrace{x^2 + 2x}_{\rightarrow 0 \pm}} = \mp \infty, \text{ így } \nexists \lim_{x \rightarrow 0} f(x). \quad \mathbf{8p.}$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{\sin(0)}{8} = 0 \quad \mathbf{3p.}$$

5. IMSC feladat**8 pont**

Adja meg az

$$x_n = \sqrt[n^2]{(2n+1)! - (2n)!}$$

sorozat határértékét, ha létezik!

Megoldás:

$$1 \leq x_n = \sqrt[n^2]{2n \cdot (2n)!} \leq \sqrt[n]{\sqrt[n]{2} \cdot \sqrt[n]{n}} \cdot \sqrt[n]{\sqrt[n]{(2n)^{2n}}} \leq \\ \leq \sqrt[n]{2 \cdot 2} \cdot \sqrt[n]{4n^2} = \sqrt[n]{4} \cdot \sqrt[n]{4} \cdot (\sqrt[n]{n})^2 \rightarrow 1$$

A rendőrelv miatt $x_n \rightarrow 1$.