

SzA II. gyakorlat

Hányféleképpen?

2011. szeptember 13.

1. A részvényt piacon 20 féle részvény érdekel minket, bármelyikből bármennyit vehetünk (a válság miatt mindegyik nagyon olcsó), és összesen 32 darabot szeretnénk venni. Hányféleképpen tehetjük ezt meg?
2. Hányféleképpen lehet az ötös lottón (90 számból ötöt húznak ki) ötös, négyes, illetve hármas találatom? (Feltételezhetjük, hogy a lottószámokat már kihúzták.)
3. Hány olyan sorrendje van az $1, 2, \dots, n$ számoknak, amelyekben a páros és páratlan számok felváltva követik egymást?
4. Van 4 halmazunk: A_1, A_2, A_3, A_4 . Mekkora $A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4$? Szita formula általánosan:

$$\left| \bigcup_{i \in \{1, 2, \dots, n\}} A_i \right| = \sum_{\emptyset \neq I \subseteq \{1, 2, \dots, n\}} (-1)^{|I|+1} \cdot \left| \bigcap_{i \in I} A_i \right|$$

5. $(a + b)^5 = ?$
6. Egy dobozban 51 piros, 62 zöld és 30 sárga golyó van. Hányat kell (csukott szemmel) kihúzni ahhoz, hogy biztosan legyen köztük
 - (a) legalább két különböző?
 - (b) legalább három piros?
 - (c) legalább két azonos?
7. **[ZH, 2010. október 15.]** A 15 fős képviselőtestület választásra 5 párt állít egy-egy 15 fős listát. A szavazást követően mindegyik párt a listája elejéről az elért eredményének megfelelő számú képviselőt küld a testületbe, úgy, hogy a testület összesen 15 fős legyen. Hányféle lehet a képviselőtestület összetétele a szavazás után?

-
8. Hányféleképpen választhatunk ki a $\{-10, -9, -8, \dots, 10\}$ számok közül 4 különbözőt a sorrendre való tekintet nélkül úgy, hogy a szorzatuk pozitív legyen?
 9. Hány olyan tízjegyű szám van, melyben a második számjegy 5-ös?
 10. Hány olyan tízjegyű szám van, melyben szerepel az 5-ös számjegy?
 11. Hány olyan 10 hosszú 0-1 sorozat van, melyben legalább 8 darab egyes van?
 12. Hány olyan négyjegyű szám van, melyben a jegyek szigorúan monoton növekvő sorrendben követik egymást?
 13. Egy 12 fős társaságot egy szálloda két háromágyas és három kétágyas szobájában kell elszállásolni. Hány különböző szobabeosztás lehetséges, ha az azonos számú ágyat tartalmazó szobákat nem különböztetjük meg egymástól?

14. Hányféleképpen helyezhető el 20 különböző zászló 10 számozott zászlórúdra úgy, hogy egy rúdon tetszőlegesen sok zászló lehet (0 és 20 között), és az egyes rudakon a zászlók sorrendje nem számít?
15. Egy cirkuszban az állatidomár összesen 7 nagymacskát szeretne a porondra küldeni. A cirkusznak tigrisei, oroszánjai és párducai vannak, mindből legalább 7 darab. Ha nem tudjuk megkülönböztetni az azonos fajú állatokat, akkor hányféle bevonulási sorrend közül választhat az idomár? És ha a sorrend nem számít?
16. Hányféleképpen húzhatunk a 32 lapos magyar kártyapakliból 4 lapot úgy, hogy legyen benne
- piros vagy ász?
 - piros és ász?
17. **[pótpótZH, 2010. ősz]** A Cayley egyetem kombinatorika-kertészet szakának első 3 félévében összesen 18 tárgyat kell elvégezni, minden félévben hatot. Az előtanulmányi rend szerint a *Fák* tárgyat a *Feszítőfák* tárgynál előbb kell felvenni, más megkötés nincs. Hányféleképp lehet felvenni a tárgyakat az egyes félévekben, feltéve, hogy minden felvett tárgyat már az adott félévben sikeresen teljesítenek a hallgatók?
18. Hány olyan szám van 1 és 1000 között (zárt intervallum), ami nem relatív prím 105-höz?
19. Bizonyítsuk be, hogy a jelenlévők között van legalább 2, aki a hét ugyanazon napján született!
20. Bizonyítsuk be, hogy egy csoportban mindig van legalább két olyan ember, akik ugyanannyi embert ismernek a csoportból! (Az ismeretségek kölcsönösek.)
21. Igazoljuk, hogy öt darab, 10-nél nagyobb prím között lenni kell kettőnek, amik különbsége osztható 10-zel!
22. Bizonyítsuk be, hogy
- $$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}$$
 - $$n \binom{n}{k} = (k+1) \binom{n}{k+1} + k \binom{n}{k}$$