

4. Vizsgazárthelyi

A1 2011/12 tél Munkaidő 90'

1. Bizonyítsa be vektoralgebrai módszerekkel, hogy az egyenlőszárú háromszög alapjához tartozó súlyvonal merőleges az alapra!

2. Legyen $a_n = \frac{n!}{n^n}$. (a) $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = ?$ (b) $\lim_{n \rightarrow \infty} (a_{n+1} - a_n) = ?$ (c) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = ?$

3. Legyen $f(x) = xe^x$. Döntse el, hogy korlátos-e f az $I = (-\infty, 2)$ intervallumon és ha igen, akkor adja meg a $\sup_{x \in I} f(x)$ és $\inf_{x \in I} f(x)$ értékét és döntse el, hogy f felveszi-e ezeket vagy ezek valamelyikét!

4. Legyen $f(x) = \frac{1 - \cos x}{x}$ az origón kívül és $f(0) = 0$. Döntse el, hogy f deriválható-e az origóban, és ha igen, akkor a derivált folytonos-e itt!

5. (a) $\int_0^1 \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx = ?$

(b) Konvergens-e az $\int_1^{\infty} \frac{1}{(x+1)(x+2)} dx$ improprius integrál?

6.

(1) Melyek igazak és melyek hamisak az alábbi állítások közül?

- (a) Minden nem konvergens sorozatnak van nem monoton részsorozata.
- (b) Minden monoton sorozatnak van konvergens részsorozata.
- (c) Minden nem korlátos sorozatnak van nem konvergens részsorozata.
- (d) Minden nem konvergens sorozatnak van nem korlátos részsorozata.

(2) Legyen f és g mindenütt értelmezett valós függvények. Melyek igazak és melyek hamisak az alábbi állítások közül?

- (a) Ha létezik a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ de nem létezik a $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$, akkor akkor nem létezik a $\lim_{x \rightarrow 0} (f + g)(x)$.
- (b) Ha nem léteznek a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ és $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$, akkor nem létezik a $\lim_{x \rightarrow 0} (f + g)(x)$.
- (c) Ha létezik a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ de nem létezik a $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$, akkor akkor nem létezik a $\lim_{x \rightarrow 0} (f \cdot g)(x)$.
- (d) Ha léteznek a $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ és $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)$, akkor létezik a $\lim_{x \rightarrow 0} (f \circ g)(x)$.