2. Vizsgazárthelyi megoldásokkal

2000/01 tél I. évf. 13.-18.tk.

1. (a) Bizonyítsa be vektoralgebrai eszközökkel a koszinusz–tételt!
(b) Igaz–e, hogy $a \neq 0$ esetén $a \cdot b = a \cdot c$–ből következik $b = c$.

MO. (a) Irányítsuk úgy a háromszög oldalait, hogy a C csúcsban találkozó élek a csúcsból kifele legyenek irányítva. Ekkor: $a - b = c$ vagy $a - b = -c \rightsquigarrow (a-b)\cdot(a-b) = = a^2 - 2\,a\cdot b + b^2 = c^2 \rightsquigarrow |a|^2 - 2\,|a|\,|b|\cos\gamma + |b|^2 = |c|^2$.
(b) Nem: csak annyi következik, hogy $a \perp b - c$, pl. $c \perp a \rightsquigarrow a\cdot b = a\cdot(c+b)$.

2. Határozza meg a következő határértékeket! a) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\left(1+\dfrac{1}{3\,n}\right)^{n^3}$ b) $\lim\limits_{n\longrightarrow\infty}\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{n^3}\right)^{n^3}$

MO.

a) ∞, mert végül $\left(1+\dfrac{1}{3\,n}\right)^{n^3} = \left(\left(1+\dfrac{1}{3\,n}\right)^{n}\right)^{n^2} \geq \left(\sqrt[3]{2}\right)^{n^2} \longrightarrow \infty$

hisz persze $\left(1+\dfrac{1}{3\,n}\right)^{n} \longrightarrow \sqrt[3]{e} > \sqrt[3]{2} > 1$

b) 0, mert végül $\left(\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{n^3}\right)^{n^3} \leq \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n^3} \longrightarrow 0$

3. Legyen $f(x) = x^2$, $g(x) = \frac{1}{x}$. Mutassa meg, hogy f egyenletesen folytonos a $[0,1]$, míg g az $[1,\infty)$ intervallumon! Igaz–e, hogy f egyenletesen folytonos a $(0,1)$ intervallumon?
MO. f $[0,1]$–en: Heine és persze $(0,1)$–en is mert egyenletes folytonosság a részhalmazokra öröklődik, hisz adott ε–hoz nyilván ott is jó lesz az a δ, amelyik az egész halmazon jó. g $[1,\infty]$–en: deriváltja korlátos: $|f'(x)| = \left|-\dfrac{1}{x^2}\right| \leq 1$ ha $x \geq 1$.

4. Határozza meg a $\lim\limits_{x\longrightarrow 0+}\sqrt{x}\,\ln x$ határértéket!

MO. $\sqrt{x}\,\ln x = \dfrac{\ln x}{\frac{1}{\sqrt{x}}} \sim \dfrac{\frac{1}{x}}{-\frac{1}{2\,\sqrt{x^3}}} = -2\sqrt{x} \xrightarrow[x\longrightarrow 0+]{} 0$,

VAGY: $y \stackrel{\circ}{=} \sqrt{x}$ helyettesítéssel: $\sqrt{x}\,\ln x = y\ln y^2 = 2\,y\ln y \xrightarrow[y\longrightarrow 0+]{} 0$

5. Legyen $f(x) = x^3\cos\frac{1}{x^2}$ ha $x \neq 0$ és $f(0) = 0$. Létezik–e, és ha igen folytonos–e az f függvény deriváltja az origóban?

MO. Létezik, $f'(0) = 0$, mert $\dfrac{f(x)-f(0)}{x} = \dfrac{x^3\cos\frac{1}{x^2}}{x} = x^2\cos\dfrac{1}{x^2} \xrightarrow[x\longrightarrow 0]{} 0$ hisz egy korlátos és egy 0–hoz tartó szorzatának 0 a határértéke, de nem folytonos, mert ha $x \neq 0$, akkor $f'(x) = 3\,x^2\cos\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x}\sin\frac{1}{x^2}$, aminek persze nincs határértéke az origóban, hiszen az első tagnak, mint egy korlátos és egy 0–hoz tartó szorzatának 0 a határértéke, míg a második tagnak persze nincs határértéke az origóban (pl. Átviteli elvvel $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n\,\pi}}$, $y_n = \dfrac{1}{\sqrt{(4n+1)\,\frac{\pi}{2}}}$ esetén $f'(x_n) \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} 0$, $f'(y_n) \xrightarrow[n\longrightarrow\infty]{} \infty$) és így a kettő összegének sem lehet határértéke itt.

6. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx = ?$

MO. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{1+\cos x}\,dx = -\ln|1+\cos x|\,\Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \ln 2 - \ln 1 = \ln 2$